Équations différentielles - Cours no 5
Champs de vecteurs

1 Définition et exemples

Définition 1 (Champ de vecteurs) *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^d$. Un* champ de vecteurs *sur U est une application de classe C^1 $X\colon U \to \mathbb{R}^d$.*

Si $X(x) = (a_1(x), \dots, a_d(x))$ où $a_i \in C^1(U)$, on note

$$X = \sum_{i=1}^{d} a_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Exercice 1 : représenter les champs de vecteurs suivant ($d = 2$, $U = \mathbb{R}^2$)

$$X = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}, \quad X = x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y}, \quad X = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}.$$

Définition 2 (Dérivée le long d'un champ de vecteur) *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et X un champ de vecteurs sur U. Soit f une application $U \to \mathbb{R}$ de classe C^1. La dérivée de f selon X est*

$$X \cdot f(x) := \sum_{i=1}^{d} a_i(x) \frac{\partial f}{\partial x_i}(x).$$

Remarque : (voir cours d'introduction) Soit X tel que ci-dessus et soit S une surface de U décrite par $S := \{x \in U; f(x) = 0\}$ où $f\colon U \to \mathbb{R}$ est de classe C^1 et $\nabla f(x) \neq 0$ pour tout $x \in U$. Alors X est tangent à S si $X \cdot f = 0$.

Exercice 2 : 1) Montrer que le champ de vecteurs $X = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}$ est tangent aux cercles centrés en l'origine. 2) Résoudre $X \cdot f = 0$ avec $X = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}$ (f de classe C^1).

Exemple : (équations aux dérivées partielles du premier ordre) Soit $T > 0$ et $u \in C^1(]0, T[\times\mathbb{R}^d)$. Soit $a_1, \dots, a_d$ des fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$. On considère l'équation aux dérivées partielles du premier ordre

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i=1}^{d} a_i(t, x) \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0, \quad 0 < t < T, x \in \mathbb{R}^d.$$

En posant

$$U =]0,T[\times\mathbb{R}^d, \quad x_0 = t, \quad X = \frac{\partial}{\partial x_0} + \sum_{i=1}^{d} a_i(t,x)\frac{\partial}{\partial x_i},$$

elle se réécrit

$$X \cdot u = 0 \text{ sur } U.$$

2 Flot d'un champ de vecteur

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et X un champ de vecteurs sur U. Par le Théorème de Cauchy-Lipschitz, a étant donné dans U, il existe une unique solution maximale $(J_a, \phi(\cdot;a))$ au Problème de Cauchy

$$\dot{z}(t) = X(z(t)), \quad z(0) = a.$$

Définition 3 (Flot d'un champ de vecteur) *Le flot de X est le flot de l'équation différentielle $\dot{z} = X(z)$, c'est-à-dire l'application $(t,a) \mapsto \phi(t;a)$.*

On rappelle (voir Cours numéro 2) que ϕ est définie sur $\mathcal{D}_\phi := \cup_{a\in U} J_a \times \{a\}$. On rappelle (résultats admis) que $\mathcal{D}_\phi$ est ouvert et que ϕ est lipschitzienne (et même de classe C^1) sur $\mathcal{D}_\phi$.

Proposition 1 *Soit $f \in C^1(U)$ satisfaisant $X \cdot f = 0$. Alors, f est constant le long des trajectoires du flot : pour tout $a \in U$, $f(\phi(t;a)) = \text{cst}$.*

Preuve de la Proposition 1 : Il suffit de dériver :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} f(\phi(t;a)) =& \sum_{i=1}^{d} \frac{d}{dt}\phi_i(t;a)\frac{\partial f}{\partial x_i}(\phi(t;a)) \\
& \text{par dérivation des fonctions composées} \\
=& \sum_{i=1}^{d} X_i(\phi(t;a))\frac{\partial f}{\partial x_i}(\phi(t;a)) \\
=& (X \cdot f)(\phi(t;a)) \\
=& 0.
\end{aligned}$$

■

Exemple : (équations aux dérivées partielles du premier ordre) Soit $T > 0$. Soit $a_1, \ldots, a_d$ des fonctions de classe C^1, bornées, sur $[0,T] \times \mathbb{R}^d$. On cherche $u \in C^1([0,T[\times\mathbb{R}^d)$ solution du problème de Cauchy

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) + \sum_{i=1}^{d} a_i(t,x)\frac{\partial u}{\partial x_i}(t,x) = 0, \quad 0 < t < T, x \in \mathbb{R}^d, \tag{1}$$

$$u(0,x) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^d. \tag{2}$$

En posant
$$U =]0,T[\times\mathbb{R}^d, \quad x_0 = t, \quad X = \frac{\partial}{\partial x_0} + \sum_{i=1}^{d} a_i(t,x)\frac{\partial}{\partial x_i},$$
l'équation (1) se réécrit
$$X \cdot u = 0 \text{ sur } U.$$
On note $a = (a_1, \ldots, a_d)$ et on introduit ψ solution du Problème de Cauchy
$$\dot{\psi}(t;x) = a(t,\psi), \quad \psi(0;x) = x \in \mathbb{R}^d.$$

Lemme 1 *La fonction ψ est définie sur $[0,T] \times \mathbb{R}^d$.*

Preuve : fixons x dans $\mathbb{R}^d$. Il s'agit de montrer que la solution maximale $z = \psi(\cdot;x)$ du Problème de Cauchy
$$\dot{z}(t) = a(t,z(t)), \quad z(0) = x$$
est définie sur $[0,T]$. Elle est définie sur $]T_-,T_+[$ avec $T_- < 0 < T_+$. Supposons $T_+ \leq T$. Par hypothèse, a est bornée sur $[0,T] \times \mathbb{R}^d$ donc $\dot{z}$ est bornée sur $[0,T_+[$, donc (par intégration) z aussi : cela contredit le Théorème de sortie de tout compact et son corollaire en dimencion finie. Par conséquent $T_+ > T$. ∎

On a maintenant la proposition

Proposition 2 *Si $u \in C^1([0,T[\times\mathbb{R}^d)$ est solution du Problème (1)-(2), alors*
$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \forall t \in [0,T[, u(t,\psi(t;x)) = u_0(x).$$

Preuve : Pour $x \in \mathbb{R}^d$, posons $\phi(t) := (t,\psi(t;x))$. On a alors $\phi(0) = (0,x)$ et on calcule
$$\dot{\phi} = X(\phi).$$
De la Proposition 1 on déduit $u(\phi(t)) = \text{cst}$ d'où $u(\phi(t)) = u(\phi(0)) = u(0,x) = u_0(x)$. ∎

Exercice 3 : calculer la solution dans le cas $a = (a_i) = \text{cst}$ (transport pur).

3 Application : équation de Burgers

3.1 Introduction

On considère un ensemble de particules situées dans $\mathbb{R}^d$ en évolution libre (cela suppose qu'il n'y ait pas de rencontre de particules). Le mouvement d'une particule est donc une translation rectiligne uniforme. Quel est le mouvement d'ensemble ? Selon la configuration initiale, quand est-ce que (au moins) deux particules se rencontrent ?

Pour étudier le problème, on introduit $u(t,x)$, vitesse de la particule située en x au temps t (c'est le *champ des vitesses* des particules). Soit $x=\psi(t)$ la trajectoire d'une particule. Le principe fondamental de la dynamique donne

$$\ddot{\psi}(t)=0. \tag{3}$$

D'autre part, par définition de u, on a

$$\dot{\psi}(t)=u(t,\psi(t)). \tag{4}$$

En dérivant de nouveau et d'après (3), on a

$$0=\ddot{\psi}(t)=\frac{\partial u}{\partial t}(t,\psi(t))+\sum_{i=1}^{d}\dot{\psi}_i(t)\frac{\partial u}{\partial x_i}(t,\psi(t)).$$

En utilisant de nouveau (4), on obtient

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,\psi(t))+\sum_{i=1}^{d}u_i(t,\psi(t))\frac{\partial u}{\partial x_i}(t,\psi(t))=0.$$

On est donc amené à étudier l'équation de Burgers

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\sum_{i=1}^{d}u_i\frac{\partial u}{\partial x_i}=0. \tag{5}$$

L'analyse peut-être faite en adaptant l'étude menée au paragraphe 2. Cette fois-ci, $a_i(x,t)=u_i(x,t)$ n'est plus une donnée du problème, c'est l'inconnue. Ainsi, "tant que u reste de classe C^1 bornée", on peut la calculer...