LIMITES DE REPRÉSENTATIONS CRISTALLINES

par

Laurent Berger

Résumé. — Soit F le corps des fractions de l'anneau des vecteurs de Witt d'un corps parfait de caractéristique p (par exemple $F = \mathbf{Q}_p$), et G_F le groupe de Galois absolu de F. Le résultat principal de cet article est le suivant : une représentation p-adique de G_F, qui est une limite de sous-quotients de représentations cristallines à poids de Hodge-Tate dans un intervalle $[a;b]$, est elle-même cristalline à poids de Hodge-Tate dans $[a;b]$. Afin de montrer ce résultat, nous étudions les (φ, Γ)-modules associés aux représentations cristallines, ce qui nous permet de préciser des résultats de Fontaine, Wach and Colmez.

Abstract. — Let F be the fraction field of the ring of Witt vectors over a perfect field of characteristic p (for example $F = \mathbf{Q}_p$), and let G_F be the absolute Galois group of F. The main result of this article is the following : a p-adic representation of G_F, which is a limit of subquotients of crystalline representations with Hodge-Tate weights in an interval $[a;b]$, is itself crystalline with Hodge-Tate weights in $[a;b]$. In order to show this, we study the (φ, Γ)-modules attached to crystalline representations, which allows us to improve some results of Fontaine, Wach and Colmez.

Table des matières

***Classification mathématique par sujets* (2000).** — 11F80, 11R23, 11S25, 12H25, 13K05, 14F30.
Mots clefs. — p-adic representations, crystalline representations, Wach modules, deformations.

Introduction

Dans tout cet article, k est un corps parfait de caractéristique p, et F est le corps des fractions de l'anneau des vecteurs de Witt sur k. Fixons-nous une clôture algébrique $\overline{F}$ de F, et posons $G_F = \mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$. Dans ce texte, nous nous intéressons aux représentations *cristallines* de V, notion introduite par Fontaine, qui est l'analogue p-adique de la notion ℓ-adique de « bonne réduction ».

L'objet de cet article est principalement de démontrer une conjecture de Fontaine sur les limites de représentations cristallines. Plus précisément, nous démontrons le résultat suivant :

Théorème 1. — *Une représentation p-adique de G_F, qui est une limite de sous-quotients de représentations cristallines à poids de Hodge-Tate dans un intervalle $[a;b]$, est elle-même cristalline à poids de Hodge-Tate dans $[a;b]$.*

Avant d'aller plus loin, mentionnons que cette conjecture a été énoncée sous une forme plus générale par Fontaine dans [**Fon96**, Final Remark (c)]. Si la longueur de la filtration (l'entier $b-a$) est $\leq p-1$, alors le théorème ci-dessus est une conséquence immédiate des constructions de Fontaine et Laffaille (cf. [**FL82**]). Son analogue pour les représentations semi-stables a été démontré quand $b-a \leq p-2$ par Breuil dans [**Br99**, §2.3]. Si $b-a=1$ et si k est contenu dans $\overline{\mathbf{F}}_p$, alors Breuil a donné dans [**Br00**, théorème 1.4] une description complète des objets qui entrent en jeu, en terme de groupes p-divisibles. Enfin, on montre le résultat correspondant pour les limites (mais pas pour les limites de sous-quotients) de représentations cristallines ou semi-stables dans [**BC03**].

Quand la longueur de la filtration n'est plus $\leq p-1$, on ne dispose plus d'une description des représentations cristallines de torsion à la Fontaine-Laffaille, et notre démonstration se fait via la théorie des (φ,Γ)-modules. Cette théorie se comporte bien vis-à-vis des structures entières que l'on peut mettre sur les représentations p-adiques, et le problème devient alors de caractériser les représentations cristallines à partir de leur (φ, Γ)-modules. Une telle caractérisation avait été entreprise par Fontaine [**Fon91**], Wach [**Wa96, Wa97**] et Colmez [**Col99**] ; l'autre objet de cet article est donc de rassembler et de préciser ces résultats.

Dans la suite, on dira que T est une $\mathbf{Z}_p$-représentation de G_F si T est un $\mathbf{Z}_p$-module libre de rang fini muni d'une action continue de G_F. Dans ce cas, T s'identifie naturellement à un réseau de la représentation p-adique $V = \mathbf{Q}_p \otimes_{\mathbf{Z}_p} T$. Pour les autres notations de cette introduction, on se reportera au chapitre suivant.

Rappelons que Fontaine a construit dans [**Fon91**, §A.3.4] une équivalence de catégories $T \mapsto \mathbf{D}(T)$ entre la catégorie des $\mathbf{Z}_p$-représentations de G_F et la catégorie des (φ, Γ_F)-modules étales. Un (φ, Γ_F)-module est un module libre de rang fini sur l'anneau local $\mathbf{A}_F$ qui est le complété p-adique de $\mathcal{O}_F[[\pi]][1/\pi]$, muni d'un Frobenius semi-linéaire φ et d'une action semi-linéaire de Γ_F commutant à celle de φ. Un tel module est étale si φ est de pente 0. L'action de φ et de Γ_F sur $\mathbf{A}_F$ est donnée par $\varphi(\pi) = (1+\pi)^p - 1$ et $\gamma(\pi) = (1+\pi)^{\chi(\gamma)} - 1$ (où $\chi : G_F \to \mathbf{Z}_p^*$ est le caractère cyclotomique).

La $\mathbf{Z}_p$-représentation T est donc caractérisée par les deux matrices P et G de φ et d'un générateur topologique γ de Γ_F. En général, ces matrices sont assez barbares, mais si on a de la chance, leurs coefficients vivent dans des anneaux plus sympathiques que $\mathbf{A}_F$, par exemple $\mathbf{A}_F^+ = \mathcal{O}_F[[\pi]]$. De fait, on dit que T est de hauteur finie s'il existe une base de $\mathbf{D}(T)$ dans laquelle P et G ont leurs coefficients dans $\mathbf{A}_F^+$. Le point de départ de cet article est le théorème [**Col99**, théorème 1] de Colmez (montré différemment dans [**Ber02**, §3.3]), qui dit que si $V = \mathbf{Q}_p \otimes_{\mathbf{Z}_p} T$ est cristalline, alors T est de hauteur finie.

Il existe des représentations de hauteur finie qui ne sont pas cristallines, mais Wach a montré qu'une représentation de hauteur finie est cristalline si et seulement s'il existe une base de $\mathbf{D}(T)$, telle que le $\mathbf{A}_F^+$-module N qu'elle engendre vérifie les propriétés suivantes : N est stable par φ et Γ_F et il existe $r \in \mathbf{Z}$ tel que l'action de Γ_F sur $(N/\pi N)(-r)$ est triviale. Ce module N n'est pas canoniquement attaché à T, mais le devient si on impose une condition supplémentaire ; on le note alors $\mathbf{N}(T)$. La majeure partie de cet article est donc consacrée à la démonstration de quelques unes des propriétés vérifiées par les « modules de Wach » $\mathbf{N}(T)$ et $\mathbf{N}(V) = \mathbf{Q}_p \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathbf{N}(T)$. On renvoie à la définition III.4.1 pour la définition précise d'un module de Wach.

Théorème 2. — *Le foncteur $V \mapsto \mathbf{N}(V)$ est une équivalence de catégories entre la catégorie des représentations cristallines de G_F, et la catégorie des modules de Wach sur $\mathbf{B}_F^+ = \mathbf{Q}_p \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathbf{A}_F^+$, compatible à toutes les opérations habituelles ($\otimes$, dualité et suites exactes).*

De plus, pour une représentation cristalline donnée V, l'application $T \mapsto \mathbf{N}(T)$ induit une bijection respectant l'inclusion entre les réseaux de V et les modules de Wach sur $\mathbf{A}_F^+$ contenus dans $\mathbf{N}(V)$ et qui en sont un $\mathbf{A}_F^+$-réseau.

Après avoir rappelé la construction de $\mathbf{N}(T)$, on montre comment retrouver le φ-module sous-jacent à $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)$ (le φ-module filtré associé à V par la théorie de Fontaine) à partir de $\mathbf{N}(V)$ à la manière de [**Ber02**, §3.2]. Ensuite, on peut voir $\mathbf{A}_F^+$ comme l'algèbre des fonctions bornées par 1 sur le disque unité ouvert. On peut donc « évaluer » $\mathbf{N}(V)$ en certains points bien choisis, les $\zeta_n - 1$ où ζ_n est une racine primitive p^n-ième de l'unité. En 0, on retrouve (d'une manière différente) le φ-module $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)$. En $\zeta_n - 1$, avec $n \geq 1$, on récupère l'invariant associé à V par la théorie de Sen (cf. [**Sen80**]). Ceci nous donne des informations suffisamment précises sur les matrices P et G pour pouvoir montrer l'ingrédient principal pour la démonstration du théorème , un résultat qui affirme que si V est cristalline, alors $\mathbf{N}(V)$ est « suffisamment gros », c'est-à-dire que l'on borne le conoyau de l'inclusion $\mathbf{B}^+ \otimes_{\mathbf{B}_F^+} \mathbf{N}(V) \subset \mathbf{B}^+ \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$ où $\mathbf{B}^+$ est un certain anneau de périodes p-adiques. On peut déduire de cela un résultat de « continuité » pour le foncteur $\mathbf{N}(\cdot)$: si T_1 et T_2 sont deux $\mathbf{Z}_p$-représentations cristallines qui sont égales modulo p^n, alors $\mathbf{N}(T_1)$ et $\mathbf{N}(T_2)$ sont égaux modulo $p^{n-\alpha(r)}$ où $\alpha(r)$ est une constante qui ne dépend que de la longueur de la filtration $r = b - a$.

Nous démontrons par ailleurs quelques autres propriétés de $\mathbf{N}(T)$. Par exemple, on peut définir une filtration sur $\mathbf{N}(V)$ qui permet de retrouver le φ-module filtré $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)$ à partir de $\mathbf{N}(V)$ par la formule suivante : $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V) = \mathbf{N}(V)/\pi\mathbf{N}(V)$.

Théorème 3. — *Si V est une représentation cristalline de G_F, et si on munit $\mathbf{N}(V)$ de la filtration $\mathrm{Fil}^i\,\mathbf{N}(V) = \{x \in \mathbf{N}(V),\ \varphi(x) \in (\varphi(\pi)/\pi)^i\mathbf{N}(V)\}$, alors on a un isomorphisme naturel de φ-modules filtrés $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V) \simeq \mathbf{N}(V)/\pi\mathbf{N}(V)$.*

Si l'on combine cela avec le théorème de Colmez-Fontaine (cf. [**CF00**, théorème A] et [**Col02**, §11.6]), on en déduit que tout φ-module filtré (sur F) faiblement admissible provient par le procédé ci-dessus ($N \mapsto N/\pi N$) d'un module de Wach, ce qui répond à une question de Fontaine (cf. [**Fon91**, §B.2.3]). Enfin, on voit que $\mathbf{N}(T)/\pi\mathbf{N}(T)$ s'identifie à un réseau $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(T)$ de $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)$, canoniquement attaché à T. Il s'agit donc d'une version « entière » du foncteur $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(\cdot)$. On montre que le déterminant de l'isomorphisme de comparaison entre $\mathbf{B}_{\mathrm{cris}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$ et $\mathbf{B}_{\mathrm{cris}} \otimes_F \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)$, calculé dans des bases de T et de $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(T)$ est le produit d'une puissance de $t = \log(1+\pi)$ par une unité. Ensuite, on démontre que si $b - a \leq p - 1$, alors $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(T)$ est fortement divisible et que inversement, si on se donne une représentation cristalline V et un réseau fortement divisible M de $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)$, alors on peut construire « à la main » un réseau T de V tel que $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(T) \simeq M$

(toujours si $b-a \leq p-1$) ce qui donne une démonstration différente de certains résultats de Fontaine-Laffaille.

Enfin, pour terminer, nous donnons quelques exemples de modules de Wach associés à certaines représentations cristallines. Il serait très utile de savoir construire aussi explicitement que possible les modules de Wach, cela devrait permettre de répondre à un certain nombre de questions intéressantes, ainsi que de donner une démonstration différente du théorème de Colmez-Fontaine.

Remerciements : Je souhaite remercier Pierre Colmez, qui est à l'origine de plusieurs des idées de cet article ; il a aussi relu attentivement de nombreuses versions de ce texte. Lors de la rédaction de cet article, j'ai bénéficié de conversations enrichissantes avec lui et avec Christophe Breuil, Fred Diamond, Jean-Marc Fontaine, Hanfeng Li, Barry Mazur et Hui June Zhu. Je remercie aussi les éditeurs de Compositio pour leur patience. Enfin, l'article « Représentations p-adiques potentiellement cristallines » de Nathalie Wach a été une source constante d'inspiration.

I. Rappels et compléments sur les périodes p-adiques

Ce chapitre est consacré à quelques rappels sur les périodes p-adiques ; on pourra se reporter aux articles originaux de Fontaine [**Fon88a, Fon88b, Fon91**] pour beaucoup des constructions décrites ci-dessous. Dans cet article, k désigne un corps parfait de caractéristique p, de clôture algébrique $\overline{k}$, et F est le corps des fractions de l'anneau des vecteurs de Witt sur k. Soit $\overline{F}$ une clôture algébrique de F et $\mathbf{C} = \widehat{\overline{F}}$ sa complétion p-adique. Le corps $\mathbf{C}$ est un corps complet algébriquement clos dont le corps résiduel s'identifie à $\overline{k}$. On pose $G_F = \mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$. On écrit $\mu_{p^n} \subset \overline{F}$ pour désigner l'ensemble des racines p^n-ièmes de l'unité, et on définit $F_n = F(\mu_{p^n})$ ainsi que $F_\infty = \cup_{n=0}^{+\infty} F_n$. Soit H_F le noyau du caractère cyclotomique $\chi : G_F \to \mathbf{Z}_p^*$ et $\Gamma_F = G_F/H_F$ le groupe de Galois de F_∞/F, qui s'identifie via le caractère cyclotomique à $\mathbf{Z}_p^*$. On choisit pour tout $n \geq 1$ un élément $\varepsilon^{(n)}$ de μ_{p^n}, de telle manière que $\varepsilon^{(1)} \neq 1$ et $(\varepsilon^{(n+1)})^p = \varepsilon^{(n)}$ ce qui fait que $\varepsilon^{(n)}$ est un générateur de μ_{p^n}.

Une représentation p-adique de G_F est un $\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel V de dimension finie d, muni d'une action linéaire et continue de G_F. La principale stratégie (due à Fontaine, voir par exemple [**Fon88b**]) pour étudier les représentations p-adiques de G_F est de construire des anneaux de périodes p-adiques, c'est-à-dire des $\mathbf{Q}_p$-algèbres topologiques B munies d'une action de G_F et de structures supplémentaires de telle manière que si V est une représentation p-adique, alors $D_B(V) = (B \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{G_F}$ est un B^{G_F}-module qui hérite de ces structures, et que le foncteur qui à V associe $D_B(V)$ fournisse des invariants intéressants de V. On dit qu'une représentation p-adique V de G est *B-admissible* si on a $B \otimes_{\mathbf{Q}_p} V \simeq B^d$ en tant que $B[G]$-modules. Dans les deux paragraphes qui suivent, nous allons rappeler la construction d'un certain nombre d'anneaux de périodes p-adiques.

I.1. Théorie de Hodge p-adique. — Commençons par définir $\widetilde{\mathbf{E}}$ et $\widetilde{\mathbf{E}}^+$ (qui sont les anneaux $\operatorname{Fr}\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}$ de [**Fon88a**, §1.2]). Soient

$$\widetilde{\mathbf{E}} = \varprojlim_{x \mapsto x^p} \mathbf{C} = \{(x^{(0)}, x^{(1)}, \cdots) \mid (x^{(i+1)})^p = x^{(i)}\},$$

et $\widetilde{\mathbf{E}}^+$ l'ensemble des $x \in \widetilde{\mathbf{E}}$ tels que $x^{(0)} \in \mathcal{O}_{\mathbf{C}}$. Si $x = (x^{(i)})$ et $y = (y^{(i)})$ sont deux éléments de $\widetilde{\mathbf{E}}$, alors on définit leur somme $x+y$ et leur produit xy par :

$$(x+y)^{(i)} = \lim_{j \to +\infty} (x^{(i+j)} + y^{(i+j)})^{p^j} \text{ et } (xy)^{(i)} = x^{(i)} y^{(i)},$$

ce qui fait de $\widetilde{\mathbf{E}}$ un corps de caractéristique p dont on peut montrer qu'il est algébriquement clos. Si $x = (x^{(n)})_{n \geq 0} \in \widetilde{\mathbf{E}}$, on pose $v_{\mathbf{E}}(x) = v_p(x^{(0)})$. C'est une valuation sur $\widetilde{\mathbf{E}}$ pour laquelle celui-ci est complet ; l'anneau des entiers de $\widetilde{\mathbf{E}}$ est bien sûr $\widetilde{\mathbf{E}}^+$. Soit $\widetilde{\mathbf{A}}^+$ l'anneau $W(\widetilde{\mathbf{E}}^+)$ des vecteurs de Witt à coefficients dans $\widetilde{\mathbf{E}}^+$ et $\widetilde{\mathbf{B}}^+ = \widetilde{\mathbf{A}}^+[1/p] = \{\sum_{k \gg -\infty} p^k [x_k],\ x_k \in \widetilde{\mathbf{E}}^+\}$ où $[x] \in \widetilde{\mathbf{A}}^+$ est le relèvement de Teichmüller de $x \in \widetilde{\mathbf{E}}^+$. Cet anneau est muni d'un morphisme d'anneaux $\theta : \widetilde{\mathbf{B}}^+ \to \mathbf{C}$ défini par la formule $\theta(\sum_{k \gg -\infty} p^k [x_k]) = \sum_{k \gg -\infty} p^k x_k^{(0)}$. Soient $\varepsilon = (\varepsilon^{(i)}) \in \widetilde{\mathbf{E}}^+$ avec $\varepsilon^{(0)} = 1$ et $\varepsilon^{(1)} \neq 1$, ainsi que

$$\pi = [\varepsilon] - 1, \quad \pi_1 = [\varepsilon^{1/p}] - 1, \quad \omega = \frac{\pi}{\pi_1} \quad \text{et} \quad q = \varphi(\omega) = \frac{\varphi(\pi)}{\pi}$$

où φ est le Frobenius, qui relève l'application $x \mapsto x^p$. On peut montrer que $\ker(\theta : \widetilde{\mathbf{A}}^+ \to \widetilde{\mathbf{A}}^+)$ est l'idéal principal engendré par ω.

Remarquons que ε est un élément de $\widetilde{\mathbf{E}}^+$ tel que $v_{\mathbf{E}}(\varepsilon - 1) = p/(p-1)$. On pose $\mathbf{E}_F = k((\varepsilon - 1))$ et on définit $\mathbf{E}$ comme étant la clôture séparable de $\mathbf{E}_F$ dans $\widetilde{\mathbf{E}}$ ainsi que $\mathbf{E}^+ = \mathbf{E} \cap \widetilde{\mathbf{E}}^+$ l'anneau des entiers de $\mathbf{E}$. Remarquons que, par définition, $\mathbf{E}$ est séparablement clos (mais pas complet), et que l'on retrouve $\widetilde{\mathbf{E}}$ à partir de $\mathbf{E}$ en prenant le complété de sa clôture radicielle ($\widetilde{\mathbf{E}}$ est en fait aussi le complété de $\mathbf{E}$ par le théorème [**Ax70**, Theorem (p. 417)] de Ax). Enfin, le groupe H_F agit sur $\mathbf{E}$ et la théorie du corps des normes de Fontaine et Wintenberger (cf. [**FW79, Win83**]) permet de montrer que $\operatorname{Gal}(\mathbf{E}/\mathbf{E}_F) = H_F$.

L'anneau $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ est défini comme étant le complété de $\widetilde{\mathbf{B}}^+$ pour la topologie $\ker(\theta)$-adique (on remarquera que $\widetilde{\mathbf{A}}^+$ est complet pour cette topologie) :

$$\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+ = \varprojlim_{n \geq 0} \widetilde{\mathbf{B}}^+ / \ker(\theta)^n.$$

C'est un anneau de valuation discrète, d'idéal maximal $\ker(\theta)$; la série qui définit $\log([\varepsilon])$ converge dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ vers un élément t, qui est un générateur de l'idéal maximal, ce qui fait que $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}} = \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+[1/t]$ est un corps, muni d'une action de G_F et d'une filtration définie par $\mathrm{Fil}^i(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}) = t^i\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ pour $i \in \mathbf{Z}$.

On dit qu'une représentation V de G_F est de *de Rham* si elle est $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$-admissible ce qui équivaut à ce que le F-espace vectoriel

$$\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V) = (\mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{G_F}$$

est de dimension $d = \dim_{\mathbf{Q}_p}(V)$. L'espace $\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V)$ hérite de la filtration de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$, et les poids de Hodge-Tate de V sont les opposés des sauts de la filtration (comptés avec multiplicités). On dira que V est positive si ses poids de Hodge-Tate sont ≤ 0 (terminologie un peu malheureuse).

L'anneau $\mathbf{B}_{\max}^+$ est défini (dans [**Col98**, §III.2]) comme étant

$$\mathbf{B}_{\max}^+ = \{\sum_{n\geq 0} a_n \frac{\omega^n}{p^n} \text{ où } a_n \in \widetilde{\mathbf{B}}^+ \text{ est une suite qui tend vers 0 dans } \widetilde{\mathbf{B}}^+\}$$

et $\mathbf{B}_{\max} = \mathbf{B}_{\max}^+[1/t]$. On peut bien sûr remplacer ω par n'importe quel générateur de $\ker(\theta)$ dans $\widetilde{\mathbf{A}}^+$. Cet anneau se plonge canoniquement dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$ (les séries définissant ses éléments convergent dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$) et en particulier il est muni de l'action de Galois et de la filtration induites par celles de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$, ainsi que d'un Frobenius φ, qui étend l'application $\varphi : \widetilde{\mathbf{A}}^+ \to \widetilde{\mathbf{A}}^+$ déduite de $x \mapsto x^p$ dans $\widetilde{\mathbf{E}}^+$. On remarquera que φ ne se prolonge pas par continuité à $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$. On pose aussi $\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}^+ = \cap_{n=0}^{+\infty}\varphi^n(\mathbf{B}_{\max}^+)$.

On dit qu'une représentation V de G_F est *cristalline* si elle est $\mathbf{B}_{\max}$-admissible ou, ce qui revient au même, $\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}^+[1/t]$-admissible (les périodes des représentations cristallines vivent dans des sous F-espaces vectoriels de dimension finie et stables par φ de $\mathbf{B}_{\max}$, et donc en fait dans l'anneau $\cap_{n=0}^{+\infty}\varphi^n(\mathbf{B}_{\max}^+)[1/t]$) ; ceci équivaut à ce que le F-espace vectoriel

$$\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V) = (\mathbf{B}_{\max} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{G_F} = (\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}^+[1/t] \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{G_F}$$

est de dimension $d = \dim_{\mathbf{Q}_p}(V)$. On voit que $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)$ est muni d'un Frobenius et d'une filtration induits par ceux de $\mathbf{B}_{\max}$, et que si V est cristalline, alors $(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{G_F} = \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V) = \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)$ ce qui fait qu'une représentation cristalline est aussi de de Rham. Remarquons que cette définition de $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)$ est compatible avec la définition habituelle (via $\mathbf{B}_{\mathrm{cris}}$) parce que $\cap_{n=0}^{+\infty}\varphi^n(\mathbf{B}_{\mathrm{cris}}^+) = \cap_{n=0}^{+\infty}\varphi^n(\mathbf{B}_{\max}^+)$.

I.2. (φ, Γ)**-modules.** — Soit $\widetilde{\mathbf{A}}$ l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans $\widetilde{\mathbf{E}}$ et $\widetilde{\mathbf{B}} = \widetilde{\mathbf{A}}[1/p]$. On définit $\mathbf{A}_F$ comme étant le complété de $\mathcal{O}_F[\pi, \pi^{-1}]$ dans $\widetilde{\mathbf{A}}$ pour la topologie de celui-ci, et il s'identifie donc au complété p-adique de $\mathcal{O}_F[[\pi]][\pi^{-1}]$. Muni de la norme de Gauss (induite par la norme p-adique), $\mathbf{A}_F$ est un anneau de valuation discrète complet pour cette valuation dont le corps résiduel est $\mathbf{E}_F$. Soit $\mathbf{B}$ le complété pour la topologie p-adique de l'extension maximale non ramifiée du corps $\mathbf{B}_F = \mathbf{A}_F[1/p]$ dans $\widetilde{\mathbf{B}}$.

On définit alors $\mathbf{A} = \mathbf{B} \cap \widetilde{\mathbf{A}}$ ainsi que $\mathbf{B}^+ = \mathbf{B} \cap \widetilde{\mathbf{B}}^+$ et $\mathbf{A}^+ = \mathbf{A} \cap \widetilde{\mathbf{A}}^+$. Ces anneaux sont munis d'une action de Galois et d'un Frobenius déduits de ceux de $\widetilde{\mathbf{E}}$. On peut montrer que $\mathbf{A}_F = \mathbf{A}^{H_F}$ et donc que $\mathbf{B}^{H_F} = \mathbf{A}_F[1/p]$. On pose aussi $\mathbf{A}_F^+ = (\mathbf{A}^+)^{H_F}$ ainsi que $\mathbf{B}_F^+ = (\mathbf{B}^+)^{H_F}$ et la théorie du corps des normes permet de montrer que $\mathbf{A}_F^+ = \mathcal{O}_F[[\pi]]$ et que $\mathbf{B}_F^+ = \mathcal{O}_F[[\pi]][1/p]$.

Si V est une représentation p-adique de G_F, soit $\mathbf{D}(V) = (\mathbf{B} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{H_F}$. On sait [**Fon91**, §A.3.4] que $\mathbf{D}(V)$ est un $\mathbf{B}_F$-espace vectoriel de dimension $d = \dim(V)$ muni d'un Frobenius et d'une action résiduelle de Γ_F qui commutent (c'est un (φ, Γ_F)-module) et que l'on peut récupérer V grâce à la formule $V = (\mathbf{B} \otimes_{\mathbf{B}_F} \mathbf{D}(V))^{\varphi=1}$.

De même, si T est un réseau d'une représentation p-adique de G_F on pose $\mathbf{D}(T) = (\mathbf{A} \otimes_{\mathbf{Z}_p} T)^{H_F}$. C'est un $\mathbf{A}_F$-module libre de rang $d = \dim(V)$ muni d'un Frobenius et d'une action résiduelle de Γ_F qui commutent (on dira aussi que c'est un (φ, Γ_F)-module), et on peut récupérer T grâce à la formule $T = (\mathbf{A} \otimes_{\mathbf{A}_F} \mathbf{D}(T))^{\varphi=1}$.

On dit qu'une représentation p-adique V de G_F est de *hauteur finie* si $\mathbf{D}(V)$ possède une base sur $\mathbf{B}_F$ formée d'éléments de $\mathbf{D}^+(V) = (\mathbf{B}^+ \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{H_F}$. Un résultat de Fontaine [**Fon91**, §B.2.1] (voir aussi [**Col99**, §III.2]) montre que V est de hauteur finie si et seulement si $\mathbf{D}(V)$ possède un sous-$\mathbf{B}_F^+$-module libre de type fini stable par φ de rang égal à $d = \dim_{\mathbf{Q}_p}(V)$. Rappelons le résultat principal (le théorème [**Col99**, théorème 1] de Colmez, voir aussi [**Ber02**, §3.3] pour une démonstration différente) sur les représentation cristallines de G_F : si V est une représentation cristalline de G_F, alors V est de hauteur finie.

Si T est un réseau d'une représentation p-adique de G_F on pose $\mathbf{D}^+(T) = (\mathbf{A}^+ \otimes_{\mathbf{Z}_p} T)^{H_F}$. Si $V = \mathbf{Q}_p \otimes_{\mathbf{Z}_p} T$ est de hauteur finie, alors $\mathbf{D}^+(T)$ est un $\mathbf{A}_F^+$-module libre de rang $d = \dim(V)$ qui contient une base de $\mathbf{D}(T)$ sur $\mathbf{A}_F$. Cela suit de [**Fon91**, B.1.4.2].

Un mot de mise en garde : le fait que V est de hauteur finie ne veut pas dire que V est $\mathbf{B}^+$-admissible en tant que représentation de H_F ! Voir à ce sujet la remarque III.3.4.

I.3. Les idéaux des anneaux $\mathbf{B}_F^+$ et $\mathbf{B}_{\mathrm{rig},F}^+$. — Rappelons que $\mathbf{B}_F^+ = \mathcal{O}_F[[\pi]][1/p]$. On peut donc voir $\mathbf{B}_F^+$ comme l'anneau des séries formelles bornées sur le disque unité ouvert $\{z \in \mathbf{C},\ |z| < 1\}$. Soit $\mathbf{B}_{\mathrm{rig},F}^+$ l'ensemble des séries de la forme $A(\pi) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \pi^k$, telles que $a_k \in F$ et telles que la série $A(X)$ converge sur le disque unité ouvert. Rappelons que $\mathbf{B}_F^+$ est un anneau principal, et que $\mathbf{B}_{\mathrm{rig},F}^+$ se comporte comme un anneau principal, en ce sens qu'il est de Bézout (tout idéal de type fini est principal) et [**Ber02**, §4.2] qu'il admet la théorie des diviseurs élémentaires.

Si R est un anneau qui admet la théorie des diviseurs élémentaires, et si M est un sous-module de type fini de $N \simeq R^d$, alors il existe des éléments $r_1, \cdots, r_d$ de R (les diviseurs élémentaires) et une base $n_1, \cdots, n_d$ de N tels que $r_1 | \cdots | r_d$ et $r_1 n_1, \cdots r_d n_d$

est une base de M ; les idéaux $(r_1), \cdots, (r_d)$ sont déterminés de manière unique par ces conditions. On écrira pour simplifier : $[N : M] = [r_1; \cdots; r_d]$.

Les deux anneaux $\mathbf{B}_F^+$ et $\mathbf{B}_{\mathrm{rig},F}^+$ sont munis d'actions de φ et de Γ_F qui commutent, et que l'on peut déduire par semi-linéarité des formules $\varphi(\pi) = (1+\pi)^p - 1$ et $\gamma(\pi) = (1+\pi)^{\chi(\gamma)} - 1$.

Remarque I.3.1. — Rappelons que $q = \varphi(\pi)/\pi$, ce qui fait que si $n \geq 1$, alors

$$\varphi^{n-1}(q) = \frac{(1+\pi)^{p^n} - 1}{(1+\pi)^{p^{n-1}} - 1}$$

et l'idéal engendré par $\varphi^{n-1}(q)$ est alors un idéal premier stable par Γ_F. On a de plus une identification de $F[\Gamma_F]$-modules

$$\mathbf{B}_{\mathrm{rig},F}^+/\varphi^{n-1}(q) = \mathbf{B}_F^+/\varphi^{n-1}(q) = F_n.$$

L'application $\mathbf{B}_{\mathrm{rig},F}^+ \to F_n$ peut être vue comme « l'évaluation » en $\varepsilon^{(n)} - 1$. Le lemme ci-dessous montre que tout idéal principal de $\mathbf{B}_{\mathrm{rig},F}^+$ qui est stable par Γ_F est produit de tels idéaux. Rappelons que comme $\mathbf{B}_{\mathrm{rig},F}^+$ est de Bézout, ses idéaux principaux sont ceux qui sont de type fini.

Lemme I.3.2. — *Si I est un idéal principal de $\mathbf{B}_{\mathrm{rig},F}^+$, qui est stable par Γ_F, alors il existe des entiers $j_0, j_1, \cdots$ tels que I est engendré par un élément de la forme $\pi^{j_0} \prod_{n=1}^{+\infty} (\varphi^{n-1}(q)/p)^{j_n}$. De plus :*

(1) *$\varphi(I) \subset I$ si et seulement si la suite $\{j_n\}_n$ est décroissante ;*

(2) *$I \subset \varphi(I)$ si et seulement si la suite $\{j_n\}_n$ est croissante ;*

(3) *les résultats précédents restent vrais pour les idéaux de $\mathbf{B}_F^+$, et dans ce cas $j_n = 0$ si $n \gg 0$ (par exemple, $I \subset \varphi(I)$ implique que $I = \mathbf{B}_F^+$).*

Démonstration. — C'est un résultat assez classique, mais nous allons en rappeler la démonstration pour le confort du lecteur. Si $f(\pi)$ est un générateur de l'idéal I, alors l'ensemble $V(I)$ de ses zéros est un sous ensemble du disque unité ouvert, dont l'intersection $V_\rho(I)$ avec tout sous-disque fermé $\{z \in \mathbf{C},\ |z| \leq \rho\}$ est finie. Si I est stable par Γ_F, alors $V_\rho(I)$ est stable par la transformation $z \mapsto (1+z)^g - 1$ pour tout $g \in \mathbf{Z}_p^*$. Comme $V_\rho(I)$ est fini, si $z \in V_\rho(I)$, alors il existe $g \in \mathbf{Z}_p^* \setminus \{1\}$ tel que $z = (1+z)^g - 1$, et donc $(1+z)^{g-1} = 1$ ce qui fait que $z = 0$ ou bien qu'il existe $n \geq 1$ tel que $1+z \in \mu_{p^n} \setminus \mu_{p^{n-1}}$. Le polynôme minimal d'un tel z est π ou $\varphi^{n-1}(q)$, ce qui fait que l'on peut prendre pour générateur de l'idéal I le produit convergent $\pi^{j_0} \prod_{n=1}^{+\infty} (\varphi^{n-1}(q)/p)^{j_n}$ où j_n est la multiplicité de $\varepsilon^{(n)} - 1$ comme zéro de $f(\pi)$.

Les deux premiers points résultent immédiatement du fait que $\varphi(\pi) = \pi q$ et que $\varphi(\varphi^{n-1}(q)) = \varphi^n(q)$, et le troisième point est évident (un élément de $\mathbf{B}^+_{\mathrm{rig},F}$ étant dans $\mathbf{B}^+_F$ si et seulement s'il a un nombre fini de zéros). $\square$

Exemple I.3.3. — L'idéal de $\mathbf{B}^+_{\mathrm{rig},F}$ engendré par $t = \log(1+\pi)$ satisfait les deux points ci-dessus. Cela correspond à la décomposition bien connue (voir [**Laz62**, remarque 4.12] par exemple) :

$$t = \log(1+\pi) = \pi \prod_{n=1}^{+\infty} \frac{\varphi^{n-1}(q)}{p}.$$

I.4. Régularisation par le Frobenius. — L'objet de ce paragraphe assez technique est de montrer que si M est une matrice qui satisfait une équation $\varphi(M) = XMY$, alors M hérite des propriétés de régularité de X et Y.

Afin d'énoncer et de démontrer la proposition générale de régularisation par le Frobenius dont nous ferons usage, nous aurons besoin d'utiliser un certain nombre des anneaux introduits dans [**Ber02**, §1] (l'anneau $\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger_{\mathrm{rig}}$ et sa quantité de sous-anneaux). Nous ne rappelons pas leurs définitions, car ils ne seront pas utilisés par ailleurs. Les seuls résultats « utiles » de ce paragraphe sont les corollaires I.4.2 et I.4.3. Le lecteur est donc invité à ne lire ce paragraphe qu'en cas de besoin absolu.

Proposition I.4.1. — *Si $M \in \mathrm{M}(d, \widetilde{\mathbf{B}}^\dagger_{\mathrm{rig}})$ et $X, Y \in \mathrm{M}(d, \widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}})$ sont trois matrices telles que $\varphi(M) = XMY$, alors $M \in \mathrm{M}(d, \widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}})$.*

Démonstration. — On utilisera librement les notations de [**Ber02**]. La démonstration est d'ailleurs assez proche de celle de [**Ber02**, proposition 3.2]. Il existe $r > 0$ tel que $M \in \mathrm{M}(d, \widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig}})$, et il existe donc aussi $c \in \mathbf{N}$ tel que $M \in \mathrm{M}(d, p^{-c}\widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig}})$. Il existe aussi $k \in \mathbf{N}$ tel que $\varphi^{-1}(X)$ et $\varphi^{-1}(Y)$ appartiennent à $\mathrm{M}(d, p^{-k}\widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger,s}_{\mathrm{rig}})$ pour tout $s \leq r$ (par une application du principe du maximum, cf. [**Ber02**, corollaire 2.20]).

Rappelons que $\varphi^{-1}(\widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig}}) = \widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger,rp^{-1}}_{\mathrm{rig}}$. Cela permet de démontrer par récurrence sur $s \geq 1$, en utilisant l'équation $M = \varphi^{-1}(XMY)$, que $M \in \mathrm{M}(d, p^{-c-2ks}\widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger,rp^{-s}}_{\mathrm{rig}})$. La proposition suit alors de [**Ber02**, lemme 3.1] avec $h = 2k$, qui affirme que $\cap_{s=0}^{+\infty} p^{-hs}\widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger,rp^{-s}}_{\mathrm{rig}} \subset \widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}}$. $\square$

Nous utiliserons cette proposition à deux reprises, pour montrer les deux corollaires qui suivent. Rappelons que $\mathbf{B}^\dagger_{\mathrm{rig},F}$ est l'ensemble des séries de la forme $A(\pi) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \pi^k$, telles que $a_k \in F$ et pour lesquelles il existe $r < 1$ tel que la série $A(X)$ converge sur la couronne $\{z \in \mathbf{C},\ r < |z| < 1\}$.

Corollaire I.4.2. — *Si $M \in \mathrm{M}(d, \mathbf{B}^\dagger_{\mathrm{rig},F})$ est une matrice telle qu'il existe $X, Y \in \mathrm{M}(d, \mathbf{B}^+_{\mathrm{rig},F})$ tels que $\varphi(M) = XMY$, alors $M \in \mathrm{M}(d, \mathbf{B}^+_{\mathrm{rig},F})$.*

Démonstration. — Une application directe de la proposition I.4.1 montre que $M \in \mathrm{M}(d, \widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}})$. Il s'agit donc de voir que $\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}} \cap \mathbf{B}^\dagger_{\mathrm{rig},F} = \mathbf{B}^+_{\mathrm{rig},F}$. Si $x \in \mathbf{B}^\dagger_{\mathrm{rig},F}$, on peut l'écrire comme $x = x^+ + x^-$ avec $x^+ \in \mathbf{B}^+_{\mathrm{rig},F}$ et $x^- \in \mathbf{B}^\dagger_F$. On se ramène donc à montrer que $\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}} \cap \mathbf{B}^\dagger_F = \mathbf{B}^+_F$. Cela résulte du fait que $\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger \cap \widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}} = \widetilde{\mathbf{B}}^+$ (cf. [**Ber02**, §2.3]) et du fait que $\mathbf{B}^\dagger_F \cap \widetilde{\mathbf{B}}^+ = \mathbf{B}^+_F$. □

Corollaire I.4.3. — *Si $M \in \mathrm{M}(d, \mathbf{B}^\dagger)$ et $X, Y \in \mathrm{M}(d, \mathbf{B}^+)$ sont trois matrices telles que $\varphi(M) = XMY$, alors $M \in \mathrm{M}(d, \mathbf{B}^+)$.*

Démonstration. — Une application directe de la proposition I.4.1 montre que $M \in \mathrm{M}(d, \widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}})$. Il s'agit donc de voir que $\mathbf{B}^\dagger \cap \widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}} = \mathbf{B}^+$. Cela résulte du fait que $\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger \cap \widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}} = \widetilde{\mathbf{B}}^+$ (cf. [**Ber02**, §2.3]) et du fait que $\mathbf{B}^\dagger \cap \widetilde{\mathbf{B}}^+ = \mathbf{B}^+$. □

II. Le module de Wach d'une représentation cristalline

Ce chapitre est consacré à la construction de $\mathbf{N}(V)$, le module de Wach associé à une représentation cristalline positive V. Il s'agit de préciser les constructions faites par Wach dans [**Wa96**, §B.3], ce qui est l'objet du premier paragraphe. Ceci nous fournit une base du (φ, Γ)-module $\mathbf{D}(V)$ associé à V. Dans le deuxième paragraphe, on montre comment récupérer $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)$ à partir de $\mathbf{B}^+_{\mathrm{rig},F} \otimes_{\mathbf{B}^+_F} \mathbf{N}(V)$ ce qui précise (pour une représentation cristalline) les résultats de [**Ber02**, §3.2].

II.1. Construction de $\mathbf{N}(T)$ et $\mathbf{N}(V)$. — Dans ce paragraphe, V est une représentation cristalline de G_F, et T un $\mathbf{Z}_p$-réseau de V, c'est-à-dire que T est un $\mathbf{Z}_p$-module libre de rang d muni d'une action de G_F telle que $V = \mathbf{Q}_p \otimes_{\mathbf{Z}_p} T$. Le point de départ de nos constructions est le théorème de Colmez qui dit que T est de hauteur finie, ce qui fait que l'on a dans les notations du paragraphe I.2 : $\mathbf{D}(T) \simeq \mathbf{A}_F \otimes_{\mathbf{A}^+_F} \mathbf{D}^+(T)$. Le résultat principal de ce paragraphe est la proposition II.1.1 ci-dessous.

Proposition II.1.1. — *Si T est un réseau d'une représentation cristalline positive V, alors il existe un unique sous $\mathbf{A}^+_F$-module $\mathbf{N}(T)$ de $\mathbf{D}^+(T)$ qui satisfait les conditions suivantes :*

(1) *$\mathbf{N}(T)$ est un $\mathbf{A}^+_F$-module libre de rang $d = \dim_{\mathbf{Q}_p}(V)$;*

(2) *l'action de Γ_F préserve $\mathbf{N}(T)$ et est triviale sur $\mathbf{N}(T)/\pi\mathbf{N}(T)$;*

(3) *il existe un entier $r \geq 0$ tel que $\pi^r \mathbf{D}^+(T) \subset \mathbf{N}(T)$.*

De plus, $\mathbf{N}(T)$ est stable par φ. Enfin, si l'on pose $\mathbf{N}(V) = \mathbf{B}^+_F \otimes_{\mathbf{A}^+_F} \mathbf{N}(T)$, alors $\mathbf{N}(V)$ est l'unique sous $\mathbf{B}^+_F$-module de $\mathbf{D}^+(V)$ qui vérifie l'analogue des trois conditions ci-dessus.

La démonstration de cette proposition va se faire en plusieurs étapes. Tout d'abord, rappelons que Wach a démontré dans [**Wa96**, p. 380] que si V est une représentation de hauteur finie de G_F, alors V est cristalline positive si et seulement s'il existe un sous $\mathbf{B}_F^+$-module N libre de rang d de $\mathbf{D}^+(V)$ stable par Γ_F et tel que l'action de Γ_F soit triviale sur $N/\pi N$ (en général, remarquons que $N \neq \mathbf{D}^+(V)$).

Il va donc falloir montrer que l'on peut modifier N pour qu'en plus il existe $r \in \mathbf{N}$ tel que l'on ait $\pi^r \mathbf{D}^+(V) \subset N$:

Lemme II.1.2. — *Si N est un $\mathbf{B}_F^+$-module satisfaisant les deux premiers points de la proposition II.1.1, alors il existe un $\mathbf{B}_F^+$-module $\mathbf{N}(V)$ contenant N, stable sous l'action de Γ_F et tel que l'action de ce groupe soit triviale sur $\mathbf{N}(V)/\pi\mathbf{N}(V)$, et tel qu'il existe un entier r tel que $\pi^r \mathbf{D}^+(V) \subset \mathbf{N}(V) \subset \mathbf{D}^+(V)$.*

Démonstration. — L'idéal I_N de $\mathbf{B}_F^+$ constitué de l'ensemble des $\lambda \in \mathbf{B}_F^+$ tels que $\lambda \mathbf{D}^+(V) \subset N$ est non nul et stable par Γ_F, et par le lemme I.3.2 il est engendré par un élément de la forme $\pi^{\alpha_0} q^{\alpha_1} \cdots (\varphi^{s-1}(q))^{\alpha_s}$. Si l'on pose $\mathbf{N}(V) = \mathbf{D}^+(V) \cap N[\varphi^{n-1}(q^{-1})]_{n \geq 1}$, alors $\mathbf{N}(V)$ est un sous-module libre de rang d (libre car $\mathbf{B}_F^+$ est principal et de rang d car il contient N) de $\mathbf{D}^+(V)$, stable par Γ_F, et l'application naturelle $N/\pi N \to \mathbf{N}(V)/\pi\mathbf{N}(V)$ est un isomorphisme (c'est une application injective entre deux F-espaces vectoriels de dimension d) ce qui fait que Γ_F agit trivialement sur $\mathbf{N}(V)/\pi\mathbf{N}(V)$. Enfin, on voit que si $x \in \mathbf{D}^+(V)$ est tel que $\pi^{\beta_0} q^{\beta_1} \cdots (\varphi^{s-1}(q))^{\beta_s} x \in \mathbf{N}(V)$, alors $\pi^{\beta_0} x \in \mathbf{N}(V)$, ce qui fait que l'on a $\pi^r \mathbf{D}^+(V) \subset \mathbf{N}(V)$ avec $r = \alpha_0$. □

Ceci montre comment construire $\mathbf{N}(V)$. Le lemme suivant montre comment construire $\mathbf{N}(T)$:

Lemme II.1.3. — *Si l'on pose $\mathbf{N}(T) = \mathbf{N}(V) \cap \mathbf{D}(T)$, alors $\mathbf{N}(T)$ satisfait les trois conditions de la proposition II.1.1.*

Démonstration. — La seule chose qui n'est pas évidente est que $\mathbf{N}(T)$ est libre (puisque $\mathbf{A}_F^+$ n'est pas principal). C'est une conséquence de [**Fon91**, B.1.2.4], mais nous allons en donner une démonstration pour le confort du lecteur. Le noyau de l'application $\mathbf{N}(T) \to \mathbf{N}(V)/\pi\mathbf{N}(V)$ est $\pi\mathbf{N}(T)$ (puisque π est inversible dans $\mathbf{A}_F$), ce qui fait que $\mathbf{N}(T)/\pi\mathbf{N}(T)$ s'identifie à un $\mathcal{O}_F$-réseau de $\mathbf{N}(V)/\pi\mathbf{N}(V)$ qui est un F-espace vectoriel de dimension d. Il existe donc $m_1, \cdots, m_d \in \mathbf{N}(T)$ dont les images modulo π forment une base de $\mathbf{N}(T)/\pi\mathbf{N}(T)$. Les m_i forment alors une famille génératrice de $\mathbf{N}(T)$, car $\mathbf{A}_F^+$ est complet pour la topologie π-adique. Il est facile de voir que cette famille est libre, et c'est donc une base de $\mathbf{N}(T)$. □

Démonstration de la proposition II.1.1. — Pour terminer la démonstration de la proposition II.1.1, il reste donc à montrer que les modules $\mathbf{N}(T)$ et $\mathbf{N}(V)$ ainsi construits sont uniquement déterminés. Ceci montrera qu'ils sont stables par φ, car $\mathbf{N}(V)+\varphi^*\mathbf{N}(V)$ satisfait [(1)] les mêmes conditions, et est donc égal à $\mathbf{N}(V)$ ce qui fait que $\varphi(\mathbf{N}(V)) \subset \mathbf{N}(V)$. Comme $\mathbf{N}(T) = \mathbf{N}(V) \cap \mathbf{D}(T)$, et que $\varphi(\mathbf{D}(T)) \subset \mathbf{D}(T)$, ceci montre que $\varphi(\mathbf{N}(T)) \subset \mathbf{N}(T)$.

Supposons donc que l'on ait N_1 et N_2 deux modules satisfaisant les conditions de la proposition II.1.1 (pour T ou V, la démonstration est la même). Nous allons montrer que $N_1 \subset N_2$. Par symétrie cela implique que $N_1 = N_2$. Si $x \in N_1$, alors il existe $s \leq r$ tel que $\pi^s x \in N_2$ mais $\pi^s x \notin \pi N_2$. Choisissons $x \notin \pi N_1$ tel qu'en plus un tel s est maximal, ce qui fait que $\pi^s N_1 \subset N_2$. Comme $\pi^s x \in N_2$ et que Γ_F agit trivialement sur $N_2/\pi N_2$, on voit que $(\gamma - 1)(\pi^s x) \in \pi N_2$ et on peut écrire

$$(\gamma - 1)(\pi^s x) = \gamma(\pi^s)(\gamma(x) - x) + (\gamma(\pi^s) - \pi^s)x.$$

Comme Γ_F agit trivialement sur $N_1/\pi N_1$, et que $\pi^s N_1 \subset N_2$, on voit que $\gamma(\pi^s)(\gamma(x)-x) \in \pi N_2$ et donc que $(\gamma(\pi^s) - \pi^s)x \in \pi N_2$ ce qui est une contradiction si $s \geq 1$, parce qu'alors $\gamma(\pi^s) - \pi^s = (\chi(\gamma)^s - 1)\pi^s + \cdots$. On a donc $N_1 \subset N_2$. □

Pour référence, rappelons explicitement le résultat de Wach :

Proposition II.1.4. — *Si V est une représentation de hauteur finie de G_F, alors V est cristalline si et seulement s'il existe un sous $\mathbf{B}_F^+$-module N libre de rang d de $\mathbf{D}^+(V)$ stable par Γ_F et $h \in \mathbf{Z}$ tel que l'action de Γ_F soit triviale sur $(N/\pi N)(-h)$.*

II.2. Construction de $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)$. — Soit $\mathbf{B}^\dagger_{\mathrm{rig},F}$ l'ensemble des séries de la forme $A(\pi) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \pi^k$, telles que $a_k \in F$ et pour lesquelles il existe $r < 1$ tel que la série $A(X)$ converge sur la couronne $\{z \in \mathbf{C},\ r < |z| < 1\}$. Pour démontrer le résultat qui suit, nous avons besoin du $\mathbf{B}^\dagger_{\mathrm{rig},F}$-module $\mathbf{D}^\dagger_{\mathrm{rig}}(V)$ associé à V dans [**Ber02**, §3.2] mais en utilisant les résultats de [**Ber02**, §3.2,3.3] on peut montrer que $\mathbf{D}^\dagger_{\mathrm{rig}}(V) = \mathbf{B}^\dagger_{\mathrm{rig},F} \otimes_{\mathbf{B}_F^+} \mathbf{D}^+(V)$ et le lecteur peut prendre l'égalité ci-dessus comme définition. Rappelons que [**Ber02**, théorème 3.6] affirme que si V est une représentation cristalline positive de G_F (et donc de hauteur finie), alors $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V) = \mathbf{D}^\dagger_{\mathrm{rig}}(V)^{\Gamma_F}$ et donc

$$\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V) = \mathbf{D}^\dagger_{\mathrm{rig}}(V)^{\Gamma_F} = (\mathbf{B}^\dagger_{\mathrm{rig},F} \otimes_{\mathbf{B}_F^+} \mathbf{D}^+(V))^{\Gamma_F}.$$

L'objet de ce paragraphe est de préciser ce résultat en utilisant le module de Wach $\mathbf{N}(V)$ construit au paragraphe précédent. Ce paragraphe est donc consacré à la démonstration de la proposition suivante, qui donne une première manière de construire $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)$ (pour le théorème 3 de l'introduction, voir le paragraphe III.4) :

[(1)] si M est un R-module muni d'un Frobenius φ, alors $\varphi^* M$ dénote le R-module engendré par $\varphi(M)$

Proposition II.2.1. — *Si V est une représentation cristalline positive de G_F, alors on a $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V) \subset \mathbf{B}^+_{\mathrm{rig},F} \otimes_{\mathbf{B}^+_F} \mathbf{N}(V)$. En particulier : $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V) = (\mathbf{B}^+_{\mathrm{rig},F} \otimes_{\mathbf{B}^+_F} \mathbf{N}(V))^{\Gamma_F}$.*

Démonstration. — Choisissons une base de $\mathbf{N}(V)$, et soient P et $G = G(\gamma)$ les matrices dans cette base de φ et d'un élément $\gamma \in \Gamma_F$ qui n'est pas de torsion. Rappelons que par [**Ber02**, théorème 3.6], $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V) \subset \mathbf{D}^\dagger_{\mathrm{rig}}(V)$, ce qui fait que si l'on choisit une base de $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)$, alors la matrice M de passage de cette base à celle de $\mathbf{N}(V)$ vérifie $M \in \mathrm{M}(d, \mathbf{B}^\dagger_{\mathrm{rig},F})$. Si $D \in \mathrm{M}(d,F)$ est la matrice de φ dans la base de $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)$, alors on a

$$G\gamma(M) = M \text{ et } P\varphi(M) = MD.$$

Montrons qu'il existe des entiers $\alpha_j \in \mathbf{N}$ et $u \in (\mathbf{B}^+_F)^*$ tels que

$$\delta = \det(P) = q^{\alpha_1} \cdots (\varphi^{s-1}(q))^{\alpha_s} u.$$

Comme les actions de φ et Γ_F commutent, on a $g\gamma(\delta) = \delta\varphi(g)$, ce qui fait que δ et $\gamma(\delta)$ engendrent le même idéal de $\mathbf{B}^+_F$ (puisque g est une unité de $\mathbf{B}^+_F$). Par le lemme I.3.2, c'est donc qu'il existe des entiers $\alpha_j \in \mathbf{N}$ et $u \in (\mathbf{B}^+_F)^*$ tels que $\delta = \pi^{\alpha_0} q^{\alpha_1} \cdots (\varphi^{s-1}(q))^{\alpha_s} u$.

De plus, on a $\gamma(\delta)/\delta = \chi(\gamma)^{\alpha_0} \mod \pi$ et si g est le déterminant de G, alors $g = 1 \mod \pi$ ce qui fait que $\varphi(g)/g = 1 \mod \pi$ et donc que si l'on regarde l'équation $\gamma(\delta)/\delta = \varphi(g)/g$ modulo π, alors on voit que $\alpha_0 = 0$ (puisqu'on a choisi γ qui n'est pas de torsion).

Posons $\nu = \pi^{\alpha_1} \cdots \varphi^{s-1}(\pi)^{\alpha_s}$, ce qui fait que l'on a $\delta = \varphi(\nu)\nu^{-1}u$. Soient $N = M\nu$ et $Q = \delta P^{-1}$, ce qui fait que Q est aussi la transposée de la matrice des cofacteurs de P, et donc $Q \in \mathrm{M}(d, \mathbf{B}^+_F)$. On a

$$\varphi(N) = \varphi(M)\varphi(\nu) = P^{-1}MD\varphi(\nu) = \delta^{-1}QM(\nu\delta u^{-1})D = u^{-1}QND$$

et le corollaire I.4.2 (le résultat de régularisation par le Frobenius) montre que $N \in \mathrm{M}(d, \mathbf{B}^+_{\mathrm{rig},F})$.

Il existe donc $\lambda \in \mathbf{B}^+_F \setminus \{0\}$ (il suffit de prendre $\lambda = \nu$) tel que $\lambda \cdot \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V) \subset \mathbf{B}^+_{\mathrm{rig},F} \otimes_{\mathbf{B}^+_F} \mathbf{N}(V)$. Si I est l'idéal de $\mathbf{B}^+_F$ ainsi défini :

$$I = \{\lambda \in \mathbf{B}^+_F, \quad \lambda \cdot \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V) \subset \mathbf{B}^+_{\mathrm{rig},F} \otimes_{\mathbf{B}^+_F} \mathbf{N}(V)\},$$

alors I est un idéal de $\mathbf{B}^+_F$ qui est stable par Γ_F et par φ (car $\varphi^*\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V) = \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)$), et par le lemme I.3.2 il est engendré par un élément de la forme $\lambda = \pi^{\beta_0} \cdots (\varphi^{s-1}(q))^{\beta_s}$, avec $\beta_0 \geq \cdots \geq \beta_s \geq 0$.

Reste à montrer que $\lambda = 1$, ce qui revient à montrer que $\beta_0 = 0$ puisque $\beta_j \leq \beta_0$. Rappelons que le groupe Γ_F agit trivialement sur $\mathbf{N}(V)/\pi\mathbf{N}(V)$, et donc sur $(\mathbf{B}^+_{\mathrm{rig},F} \otimes_{\mathbf{B}^+_F} \mathbf{N}(V))/\pi$.

Il existe $y \in \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)$ tel que $\lambda y \in \mathbf{B}^+_{\mathrm{rig},F} \otimes_{\mathbf{B}^+_F} \mathbf{N}(V)$ mais $\lambda y \notin \pi\mathbf{B}^+_{\mathrm{rig},F} \otimes_{\mathbf{B}^+_F} \mathbf{N}(V)$ (sinon, on pourrait diviser λ par π). L'image de λy dans $(\mathbf{B}^+_{\mathrm{rig},F} \otimes_{\mathbf{B}^+_F} \mathbf{N}(V))/\pi$ est non nulle et $\gamma \in \Gamma_F$ agit dessus par $\chi(\gamma)^{\beta_0}$ d'une part, et trivialement d'autre part, ce qui fait que $\beta_0 = 0$. □

Pour référence, donnons immédiatement le corollaire suivant de ces calculs, qui est utilisé sous cette forme dans [**Ber03**, §II.2] :

Corollaire II.2.2. — *Si V est une représentation cristalline de G_F, si $y \in \mathbf{B}^+_{\mathrm{rig},F} \otimes_F \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)$, et si $h \geq 1$ est tel que* $\mathrm{Fil}^{-h} \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V) = \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)$, *alors $t^h y \in \mathbf{B}^+_{\mathrm{rig},F} \otimes_{\mathbf{B}^+_F} \mathbf{D}^+(V)$.*

Démonstration. — Par définition des poids de Hodge-Tate, on voit que $V(-h)$ est une représentation positive et donc que $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V(-h)) \subset \mathbf{B}^+_{\mathrm{rig},F} \otimes_{\mathbf{B}^+_F} \mathbf{N}(V(-h))$ ce qui fait que par torsion on trouve que $t^h \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V) \subset \mathbf{B}^+_{\mathrm{rig},F} \otimes_{\mathbf{B}^+_F} \mathbf{D}^+(V)$. □

II.3. Comparaison entre $\mathbf{N}(V)$ et $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)$. — Maintenant que l'on a défini $\mathbf{N}(V)$ et montré qu'il est possible de retrouver $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)$ à partir de $\mathbf{B}^+_{\mathrm{rig},F} \otimes_{\mathbf{B}^+_F} \mathbf{N}(V)$, on va s'intéresser à l'inclusion que l'on en déduit

$$\mathbf{B}^+_{\mathrm{rig},F} \otimes_F \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V) \subset \mathbf{B}^+_{\mathrm{rig},F} \otimes_{\mathbf{B}^+_F} \mathbf{N}(V).$$

L'anneau $\mathbf{B}^+_{\mathrm{rig},F}$ admet la théorie des diviseurs élémentaires, et on va calculer ces diviseurs pour l'inclusion ci-dessus. Soient $(\lambda_1), \cdots, (\lambda_d)$ les idéaux de $\mathbf{B}^+_{\mathrm{rig},F}$ définis par

$$[\mathbf{B}^+_{\mathrm{rig},F} \otimes_{\mathbf{B}^+_F} \mathbf{N}(V) : \mathbf{B}^+_{\mathrm{rig},F} \otimes_F \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)] = [\lambda_1; \cdots; \lambda_d].$$

Proposition II.3.1. — *Il existe des entiers $\beta_{n,i}$ tels que les idéaux (λ_i) sont engendrés par $\lambda_i = \pi^{\beta_{0,i}} \prod_{n=1}^{\infty} (\varphi^{n-1}(q)/p)^{\beta_{n,i}}$.*

Démonstration. — Dans l'inclusion $\mathbf{B}^+_{\mathrm{rig},F} \otimes_F \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V) \subset \mathbf{B}^+_{\mathrm{rig},F} \otimes_{\mathbf{B}^+_F} \mathbf{N}(V)$, les deux modules en question sont munis d'une action de Γ_F, telle que $\gamma \in \Gamma_F$ agit par un isomorphisme. Ceci montre (par unicité des diviseurs élémentaires) que les idéaux (λ_i) et $\gamma(\lambda_i)$ sont égaux, et le lemme I.3.2 montre qu'il existe une suite d'entiers $\{\beta_{n,i}\}_n$ telle que l'on puisse prendre : $\lambda_i = \pi^{\beta_{0,i}} \prod_{n=1}^{\infty} (\varphi^{n-1}(q)/p)^{\beta_{n,i}}$. □

III. Propriétés du module de Wach

L'un des résultats clefs de cet article est le calcul des entiers $\beta_{n,j}$ définis dans la proposition II.3.1 ci-dessus. On va voir que $\beta_{0,j} = 0$ et que si $n \geq 1$, alors $\beta_{n,j}$ est l'opposé du j-ème poids de Hodge-Tate de V. C'est l'objet du paragraphe III.2 ci-dessous. Une fois ce calcul effectué, on peut borner précisément l'annulateur du conoyau de l'inclusion $\mathbf{B}^+ \otimes_{\mathbf{B}^+_F} \mathbf{N}(V) \subset \mathbf{B}^+ \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$, ce qui sera crucial dans la suite.

III.1. Le module de Sen d'une représentation de Hodge-Tate. — Avant de calculer les entiers $\beta_{n,j}$, nous aurons besoin de comprendre assez précisément le module de Sen associé à V. C'est l'objet des rappels et compléments qui se trouvent dans ce paragraphe, dont le résultat principal est la proposition III.1.2.

Si V est une représentation p-adique, on dit que V est de Hodge-Tate, à poids de Hodge-Tate $h_1, \cdots, h_d$, si l'on a une décomposition de $\mathbf{C}[G_F]$-modules $\mathbf{C} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V \simeq \oplus_{j=1}^{d} \mathbf{C}(h_j)$. On a un isomorphisme $\mathrm{Gr}\,\mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \simeq \oplus_{j \in \mathbf{Z}} \mathbf{C}(j)$, ce qui fait que les représentations de de Rham sont de Hodge-Tate et que les poids de Hodge-Tate sont les opposés des sauts de la filtration. On dira qu'une représentation p-adique V est positive si ses poids de Hodge-Tate sont ≤ 0 (la définition du signe des poids de Hodge-Tate est malheureuse).

Quand V est une représentation de Hodge-Tate de G_F, on voit que l'on a une décomposition $(\mathbf{C} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{H_F} \simeq \oplus_{j=1}^{d} \widehat{F}_\infty(h_j)$ et on peut montrer (cf. [**Sen80**, theorem 3] par exemple) que la réunion $\mathbf{D}_{\mathrm{Sen}}(V) = (\mathbf{C} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{H_F}_{\mathrm{fini}}$ des sous F_∞-espaces vectoriels de dimension finie stables par Γ_F de $(\mathbf{C} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{H_F}$ est égale à $\oplus_{j=1}^{d} F_\infty(h_j)$. Le F_∞-espace vectoriel $\mathbf{D}_{\mathrm{Sen}}(V)$ est muni d'une action résiduelle de Γ_F, et si $\gamma \in \Gamma_F$ est un élément suffisamment proche de 1, alors la série d'opérateurs $\log(\gamma)/\log_p(\chi(\gamma))$ converge vers un opérateur F_∞-linéaire $\nabla_V : \mathbf{D}_{\mathrm{Sen}}(V) \to \mathbf{D}_{\mathrm{Sen}}(V)$ qui ne dépend pas du choix de γ, et qui est diagonalisable à valeurs propres $h_1, \cdots, h_d$.

Nous aurons besoin dans la suite de comprendre « à un niveau fini » l'action de Γ_F sur $\mathbf{D}_{\mathrm{Sen}}(V)$. Dans la suite de ce paragraphe, W dénote un F_∞-espace vectoriel de dimension finie, muni d'une action semi-linéaire de Γ_F, telle qu'un sous-groupe ouvert de Γ_F agit sur une base de W par des puissances entières du caractère cyclotomique (W sera destiné à être $\mathbf{D}_{\mathrm{Sen}}(V)$).

Lemme III.1.1. — *Il existe une base de W sur laquelle Γ_F agit par des puissances entières du caractère cyclotomique.*

Démonstration. — En regardant les espaces sur lesquels le sous-groupe ouvert de Γ_F agit par une puissance donnée de χ, et en tordant, on voit qu'il suffit de montrer que si l'on a un F_∞-espace vectoriel X muni d'une action finie de Γ_F, alors $X \simeq F_\infty^{\dim(X)}$ en tant que représentations de Γ_F, ce qui suit directement de « Hilbert 90 ». □

Posons $\Gamma_n = \mathrm{Gal}(F_\infty/F_n)$.

Proposition III.1.2. — *Si l'on note $\mathcal{W}_n$ l'ensemble des sous-F_n-espaces vectoriels de dimension finie de W, stables par Γ_F et qui ont une base formée d'éléments sur lesquels Γ_n agit par des puissances entières du caractère cyclotomique, alors $\mathcal{W}_n$ a un plus grand élément (pour l'inclusion) W_n qui est un F_n-espace vectoriel de dimension d et l'application naturelle $F_\infty \otimes_{F_n} W_n \to W$ est un isomorphisme.*

Démonstration. — Commençons par montrer qu'un élément X de $\mathcal{W}_n$ est de dimension $\leq d$. Si cela n'était pas le cas, il existerait $e \geq d+1$ éléments x_i de W et des entiers j_i tels que $\gamma(x_i) = \chi(\gamma)^{j_i} x_i$ et tels que $X = \oplus_{i=1}^e F_n x_i$. Comme W est un F_∞-espace vectoriel de dimension d, il existe des $\lambda_i \in F_\infty$ tels que $\sum_{i=1}^e \lambda_i x_i = 0$. On peut supposer que la relation est minimale et (quitte à réordonner les x_i) que $\lambda_1 \neq 0$. En faisant agir Γ_n, on a $\sum_{i=1}^e \gamma(\lambda_i)\chi(\gamma)^{j_i} x_i = 0$ et la minimalité de la relation de départ implique que $\gamma(\lambda_i \lambda_1^{-1}) = \lambda_i \lambda_1^{-1} \chi(\gamma)^{j_1 - j_i}$. Quand $j_i \neq j_1$, cela implique que $\lambda_i = 0$ et quand $j_i = j_1$, cela implique que $\lambda_i / \lambda_1 \in F_n$. Ceci montre que les x_i sont liés sur F_n et donc dans X. On a donc bien $\dim_{F_n} X \leq d$. On vient d'ailleurs de montrer que si x_i est une base de $X \in \mathcal{W}_n$ sur laquelle Γ_n agit par des puissances entières du caractère cyclotomique, alors les x_i sont encore libres dans W.

Si X et Y sont deux éléments de $\mathcal{W}_n$, on peut fixer deux bases x_i et y_j de X et Y sur lesquelles Γ_n agit par des puissances entières du caractère cyclotomique. Le F_n espace vectoriel $X+Y$ a une base extraite de $\{x_i\} \cup \{y_j\}$, ce qui fait que $X + Y \in \mathcal{W}_n$.

Les arguments précédents montrent que $\mathcal{W}_n$ est stable par somme et qu'un plus grand élément est nécessairement de dimension $\leq d$. Dans le lemme III.1.1, on en a construit un élément de dimension d ce qui fait que $\mathcal{W}_n$ a un plus grand élément W_n qui est de dimension d. Enfin, on a vu plus haut que si x_i est une base de $X \in \mathcal{W}_n$ sur F_n, sur laquelle Γ_n agit par des puissances entières du caractère cyclotomique, alors les x_i sont libres sur F_∞ dans W. Cela revient à dire que l'application $F_\infty \otimes_{F_n} W_n \to W$ est injective. Pour des raisons de dimension, c'est un isomorphisme. □

Définition III.1.3. — Si V est une représentation de Hodge-Tate, alors on note $\mathbf{D}_{\mathrm{Sen}}^n(V)$ le sous-F_n-espace vectoriel de $\mathbf{D}_{\mathrm{Sen}}(V)$ fourni par la proposition III.1.2.

III.2. Le module de Wach « évalué » en $\varepsilon^{(n)} - 1$. — L'objet de ce paragraphe est de calculer les entiers $\beta_{n,j}$ définis dans la proposition II.3.1, en utilisant les résultats du paragraphe précédent. Soient V une représentation cristalline positive et $0 \leq r_1 \leq \cdots \leq r_d$ les opposés des poids de Hodge-Tate de V. Le résultat principal de ce paragraphe est la proposition suivante :

Proposition III.2.1. — *Dans les notations de II.3.1, on a $\beta_{0,j} = 0$ et $\beta_{n,j} = r_j$ pour tout $n \geq 1$.*

Pour $n = 0$, c'est une conséquence du fait que Γ_F agit trivialement sur $\mathbf{N}(V)/\pi\mathbf{N}(V)$. Pour $n \geq 1$, il va falloir comprendre l'action de $\Gamma_n = \mathrm{Gal}(F_\infty/F_n)$ sur $\mathbf{N}(V)/\varphi^{n-1}(q)\mathbf{N}(V)$, ce qui est l'objet de la proposition III.2.2 ci-dessous. Nous verrons que l'application $\theta : \mathbf{B}^+ \to \mathbf{C}$ identifie $(\theta \circ \varphi^{-n})\mathbf{N}(V)$ au F_n-espace vectoriel $\mathbf{N}(V)/\varphi^{n-1}(q)\mathbf{N}(V)$ et le point clef de ce paragraphe est que

$$(\theta \circ \varphi^{-n})\mathbf{N}(V) \simeq \mathbf{N}(V)/\varphi^{n-1}(q)\mathbf{N}(V) \simeq \mathbf{D}^n_{\mathrm{Sen}}(V),$$

ce que nous montrerons plus tard.

Dans toute la suite, on écrit $\mathrm{Diag}(a_1, \cdots, a_d)$ pour désigner la matrice $d \times d$:

$$\begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_d \end{pmatrix}$$

Le point de départ est la proposition suivante :

Proposition III.2.2. — *L'action de Γ_n sur $\mathbf{N}(V)/\varphi^{n-1}(q)\mathbf{N}(V)$ est diagonale dans une base convenable de ce F_n-espace vectoriel et un élément $\gamma \in \Gamma_n$ agit dans cette base par la matrice*

$$\mathrm{Diag}(\chi(\gamma)^{-\beta_{n,1}}, \cdots, \chi(\gamma)^{-\beta_{n,d}}).$$

Démonstration. — Comme Γ_n est abélien, il suffit de montrer la proposition pour un élément γ_n de Γ_n, car une famille commutative d'endomorphismes diagonalisables est codiagonalisable.

Si $\Lambda = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_d)$, alors par la théorie des diviseurs élémentaires, il existe une base de $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)$ et une base de $\mathbf{B}^+_{\mathrm{rig},F} \otimes_{\mathbf{B}^+_F} \mathbf{N}(V)$ telles que la matrice de passage de l'une à l'autre soit ΛM avec $M \in \mathrm{GL}(d, \mathbf{B}^+_{\mathrm{rig},F})$.

Si G_n est la matrice de γ_n dans la base de $\mathbf{B}^+_{\mathrm{rig},F} \otimes_{\mathbf{B}^+_F} \mathbf{N}(V)$, alors $G_n\gamma_n(\Lambda M) = \Lambda M$ ou encore

$$G_n = \Lambda M \gamma_n(M^{-1}\Lambda^{-1}) = \Lambda M \gamma_n(M^{-1}) D_n \Lambda^{-1}$$

et donc $\Lambda^{-1}G_n\Lambda = M\gamma_n(M^{-1})D_n$ où l'on a posé $D_n = \gamma_n(\Lambda^{-1})\Lambda$.

Remarquons que, comme $M \in \mathrm{GL}(d, \mathbf{B}^+_{\mathrm{rig},F})$, on a la congruence $M\gamma_n(M^{-1}) = \mathrm{Id} \mod \varphi^{n-1}(q)$ (voir par exemple la remarque I.3.1). De plus, D_n est une matrice diagonale et comme

$$\lambda_j = \pi^{\beta_{0,j}}(q/p)^{\beta_{1,j}} \cdots = (\varphi^{n-1}(q))^{\beta_{n,j}} r_{n,j},$$

où $r_{n,j}$ est inversible modulo $\varphi^{n-1}(q)$, on voit que $\lambda_j/\gamma_n(\lambda_j) = \chi(\gamma_n)^{-\beta_{n,j}} \mod \varphi^{n-1}(q)$.

Les coefficients du polynôme caractéristique de G_n sont ceux de $\Lambda^{-1}G_n\Lambda$ et sont donc égaux modulo $\varphi^{n-1}(q)$ à ceux de D_n. Pour montrer que Γ_n agit par $(D_n \mod \varphi^{n-1}(q))$ sur une base convenable de

$$\mathbf{N}(V)/\varphi^{n-1}(q)\mathbf{N}(V) = (\mathbf{B}^+_{\mathrm{rig},F} \otimes_{\mathbf{B}^+_F} \mathbf{N}(V))/\varphi^{n-1}(q),$$

il suffit donc de montrer que l'action de Γ_n est semi-simple, puisque les valeurs propres (avec multiplicités) de G_n seront alors celles de la matrice $(D_n \mod \varphi^{n-1}(q))$.

L'application $\theta \circ \varphi^{-n}$ réalise une injection de $V_n = \mathbf{N}(V)/\varphi^{n-1}(q)\mathbf{N}(V)$ dans $(\mathbf{C} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{H_F} \simeq \oplus_{j=1}^d \widehat{F}_\infty(-r_j)$ ($\theta \circ \varphi^{-n}$ est injective car un élément de $\mathbf{N}(V)$ divisible par $\varphi^{n-1}(q)$ dans $\mathbf{B}^+ \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$ est divisible par $\varphi^{n-1}(q)$ dans $\mathbf{D}^+(V)$ et donc dans $\mathbf{N}(V)$). Notamment, l'opérateur $\nabla_V(\nabla_V + 1)\cdots(\nabla_V + r)$ est nul sur V_n, et ce dernier espace est donc somme directe des $V_n^{\nabla_V = -j}$, qui sont stables par Γ_n, et sur lesquels Γ_n agit via le produit de χ^{-j} par une représentation de Γ_n qui est triviale sur un sous-groupe ouvert. L'action de Γ_n est donc semi-simple (l'action d'un groupe abélien fini l'étant toujours). Les valeurs propres de $(D_n \mod \varphi^{n-1}(q))$ étant dans le corps de base, l'action de Γ_n est donc diagonalisable. □

Démonstration de la proposition III.2.1. — La proposition précédente montre que l'application $\theta \circ \varphi^{-n}$ identifie $\mathbf{N}(V)/\varphi^{n-1}(q)\mathbf{N}(V)$ à un sous F_n-espace vectoriel de $\mathbf{D}_{\mathrm{Sen}}(V)$, stable sous l'action de Γ_F et tel que l'action de Γ_n sur $\mathbf{N}(V)/\varphi^{n-1}(q)\mathbf{N}(V)$ est diagonale. Par la proposition III.1.2, c'est donc que $\mathbf{N}(V)/\varphi^{n-1}(q)\mathbf{N}(V) \subset \mathbf{D}^n_{\mathrm{Sen}}(V)$ et un argument de dimension montre que l'inclusion ci-dessus est une égalité, ce qui fait que $\beta_{n,j} = r_j$ pour $n \geq 1$ (n'oublions pas que $r_1 \leq \cdots \leq r_d$ et que $\beta_{n,1} \leq \cdots \leq \beta_{n,d}$ car les diviseurs élémentaires sont ordonnés par divisibilité). □

III.3. Comparaison entre $\mathbf{N}(V)$ et V. — En utilisant la proposition III.2.1 démontrée ci-dessus, on va pouvoir démontrer l'un des principaux résultats techniques de cet article, le théorème III.3.1 ci-dessous :

Théorème III.3.1. — *Si T est un réseau d'une représentation cristalline positive V, dont les opposés des poids de Hodge-Tate sont $0 \leq r_1 \leq \cdots \leq r_d = r$, alors $\pi^r \mathbf{A}^+ \otimes_{\mathbf{Z}_p} T \subset \mathbf{A}^+ \otimes_{\mathbf{A}_F^+} \mathbf{N}(T)$.*

De plus, l'idéal de $\mathbf{A}^+$ engendré par le déterminant de l'inclusion naturelle $\mathbf{A}^+ \otimes_{\mathbf{A}_F^+} \mathbf{N}(T) \subset \mathbf{A}^+ \otimes_{\mathbf{Z}_p} T$ est $(\pi^{r_1+\cdots+r_d})$.

Avant de montrer le théorème ci-dessus, montrons un lemme qui sera utile ici et par la suite.

Lemme III.3.2. — *Si $M \subset \mathbf{D}(T)$ est un $\mathbf{A}_F^+$-module libre de rang d, stable par les actions induites de φ et de Γ_F, tel que $\mathbf{D}(T) = \mathbf{A}_F \otimes_{\mathbf{A}_F^+} M$, alors*

$$(\mathbf{A}^+ \otimes_{\mathbf{A}_F^+} M) \cap p^n(\mathbf{A}^+ \otimes_{\mathbf{Z}_p} T) = p^n(\mathbf{A}^+ \otimes_{\mathbf{A}_F^+} M).$$

Démonstration. — Si $\{m_i\}_{1 \leq i \leq d}$ est une base de M sur $\mathbf{A}_F^+$, alors c'est aussi une base de $\mathbf{D}(T)$ sur $\mathbf{A}_F$, et donc de $\mathbf{A} \otimes_{\mathbf{A}_F} \mathbf{D}(T) = \mathbf{A} \otimes_{\mathbf{Z}_p} T$ sur $\mathbf{A}$.

Si l'on écrit $x \in (\mathbf{A}^+ \otimes_{\mathbf{A}_F^+} M) \cap p^n(\mathbf{A}^+ \otimes_{\mathbf{Z}_p} T)$ selon la base m_i comme $x = \sum_{i=0}^d x_i m_i$, alors on voit que $x_i \in p^n\mathbf{A}$. Le lemme résulte alors de ce que $p^n\mathbf{A} \cap \mathbf{A}^+ = p^n\mathbf{A}^+$. □

Pour une version un peu plus générale de ce lemme, voir la démonstration du corollaire IV.2.3 ci-dessous.

Démonstration du théorème III.3.1. — Étant donné que $\mathbf{B}^+ = \mathbf{A}^+[1/p]$, le lemme III.3.2 montre que

$$\pi^r \mathbf{A}^+ \otimes_{\mathbf{Z}_p} T \subset \mathbf{A}^+ \otimes_{\mathbf{A}_F^+} \mathbf{N}(T)$$

si et seulement si

$$\pi^r \mathbf{B}^+ \otimes_{\mathbf{Q}_p} V \subset \mathbf{B}^+ \otimes_{\mathbf{B}_F^+} \mathbf{N}(V).$$

Nous allons tout d'abord montrer que $\mathbf{N}(V)/\varphi^*\mathbf{N}(V)$ est tué par q^r. Rappelons que l'on a montré que

$$[\mathbf{B}^+_{\mathrm{rig},F} \otimes_{\mathbf{B}_F^+} \mathbf{N}(V) : \mathbf{B}^+_{\mathrm{rig},F} \otimes_F \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)] = \left[\left(\frac{t}{\pi}\right)^{r_1}; \cdots; \left(\frac{t}{\pi}\right)^{r_d}\right].$$

Il est clair que l'on a $\varphi^*(\mathbf{B}^+_{\mathrm{rig},F} \otimes_F \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)) = \mathbf{B}^+_{\mathrm{rig},F} \otimes_F \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)$, et comme une base de $\mathbf{N}(V)$ sur $\mathbf{B}_F^+$ est une base de $\mathbf{B}^+_{\mathrm{rig},F} \otimes_{\mathbf{B}_F^+} \mathbf{N}(V)$ sur $\mathbf{B}^+_{\mathrm{rig},F}$ on a donc $\det_{\mathbf{B}_F^+}(\varphi : \mathbf{N}(V) \to \mathbf{N}(V)) = q^{r_1 + \cdots r_d}$ à une unité près. D'autre part, si $x \in \mathbf{N}(V)$, alors

$$(t/\pi)^r x \in \mathbf{B}^+_{\mathrm{rig},F} \otimes_F \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V) \subset \varphi^*(\mathbf{B}^+_{\mathrm{rig},F} \otimes_{\mathbf{B}_F^+} \mathbf{N}(V))$$

ce qui fait que, comme $\mathrm{pgcd}(q^{r_1+\cdots+r_d}, (t/\pi)^r) = q^r$, on a $q^r x \in \varphi^*\mathbf{N}(V)$. Ceci montre donc que $\mathbf{N}(V)/\varphi^*\mathbf{N}(V)$ est tué par q^r.

Si $M \in \mathrm{M}(d, \mathbf{B}^+)$ est la matrice d'une base de $\mathbf{N}(V)$ dans une base de V, et si $P \in \mathrm{M}(d, \mathbf{B}_F^+)$ est la matrice de φ dans cette base de $\mathbf{N}(V)$, alors on a $\varphi(M) = MP$ et donc $\varphi(\pi^r M^{-1}) = (q^r P^{-1})(\pi^r M^{-1})$. Le fait que $\mathbf{N}(V)/\varphi^*\mathbf{N}(V)$ est tué par q^r revient à dire que $q^r P^{-1} \in \mathrm{M}(d, \mathbf{B}_F^+)$, et le corollaire I.4.3 (le résultat de régularisation par le Frobenius) ci-dessus montre qu'alors $\pi^r M^{-1} \in \mathrm{M}(d, \mathbf{B}^+)$, ce qui implique bien que

$$\pi^r \mathbf{B}^+ \otimes_{\mathbf{Q}_p} V \subset \mathbf{B}^+ \otimes_{\mathbf{B}_F^+} \mathbf{N}(V).$$

Enfin, on voit que $\varphi(\det M)/(\det M) = \det P = q^{r_1+\cdots+r_d} u$ où u est une unité de $\mathbf{A}_F^+$ ce qui fait que l'idéal de $\mathbf{A}^+$ engendré par $\det M$ est $(\pi^{r_1+\cdots+r_d})$. □

Corollaire III.3.3. — *Si T est un réseau d'une représentation cristalline V, dont les poids de Hodge-Tate sont dans $[a; b]$, alors $\pi^{b-a}\mathbf{A}^+ \otimes_{\mathbf{Z}_p} T \subset \mathbf{A}^+ \otimes_{\mathbf{A}_F^+} \mathbf{D}^+(T)$.*

Remarque III.3.4. — Le résultat précédent est proche d'être optimal. On peut par exemple montrer que $\mathbf{B}^+ \otimes_{\mathbf{Q}_p} V = \mathbf{B}^+ \otimes_{\mathbf{B}_F^+} \mathbf{D}^+(V)$ si et seulement si la restriction de V à H_F est non ramifiée.

Remarque III.3.5. — Le lien entre $\mathbf{N}(V)$ et $\mathbf{D}^+(V)$ n'est pas toujours évident. Si V est une représentation cristalline de dimension 2, de poids 0 et $r \leq 0$, alors $\mathbf{N}(V) = \mathbf{D}^+(V)$ à moins que l'on ait $V = V_1 \oplus V_2$ et $r < 0$.

III.4. Représentations cristallines et φ-modules filtrés. — Nous allons maintenant montrer que si l'on étend un peu la définition d'un module de Wach, le foncteur $T \mapsto \mathbf{N}(T)$ devient une équivalence de catégories, entre la catégorie des réseaux de représentations cristallines de G_F, et la catégorie des modules de Wach.

Définition III.4.1. — Si $b \geq a \in \mathbf{Z}$, alors un *module de Wach* à poids dans $[a;b]$ est un $\mathbf{A}_F^+$-module ou un $\mathbf{B}_F^+$-module N libre de rang d, muni d'une action de Γ_F telle que ce groupe agit trivialement sur $N/\pi N$, et muni d'un Frobenius $\varphi : N[1/\pi] \to N[1/\varphi(\pi)]$ commutant à l'action de Γ_F, tel que $\varphi(\pi^b N) \subset \pi^b N$ et tel que $\pi^b N/\varphi^*(\pi^b N)$ est tué par q^{b-a} (rappelons que $q = \varphi(\pi)/\pi$).

Si T est un réseau d'une représentation cristalline V à poids de Hodge-Tate dans $[a;b]$, alors $\mathbf{N}(T) = \pi^{-b}\mathbf{N}(T(-b))$ est un module de Wach à poids dans $[a;b]$.

Proposition III.4.2. — *Le foncteur $V \mapsto \mathbf{N}(V)$ est une équivalence de catégories entre la catégorie des représentations cristallines de G_F, et la catégorie des modules de Wach sur $\mathbf{B}_F^+$, compatible à toutes les opérations habituelles ($\otimes$, dualité et suites exactes).*

De plus, pour une représentation cristalline donnée V, l'application $T \mapsto \mathbf{N}(T)$ induit une bijection respectant l'inclusion entre les réseaux de V et les modules de Wach sur $\mathbf{A}_F^+$ contenus dans $\mathbf{N}(V)$ et qui en sont un $\mathbf{A}_F^+$-réseau.

Démonstration. — On vérifie facilement que si T et $T(-1)$ sont des réseaux de représentations cristallines positives, alors $\mathbf{N}(T) = \pi^{-1}\mathbf{N}(T(-1))$ ce qui fait que le foncteur $\mathbf{N}(\cdot)$ est bien défini (il ne dépend pas du choix de b tel que $\mathbf{N}(T) = \pi^{-b}\mathbf{N}(T(-b))$).

Si on se donne V, alors on peut récupérer V à partir de $\mathbf{N}(V)$ car $\mathbf{D}(V) \simeq \mathbf{B}_F \otimes_{\mathbf{B}_F^+} \mathbf{N}(V)$, ce qui fait que le foncteur $\mathbf{N}(\cdot)$ admet un quasi-inverse $N \mapsto (\mathbf{B} \otimes_{\mathbf{B}_F^+} N)^{\varphi=1}$. Toutes les affirmations de la proposition suivent alors de cela et des définitions. □

Remarque III.4.3. — Si $U \subset T$ sont deux réseaux d'une représentation cristalline V, tels que $T/U = \oplus \mathbf{Z}_p/p^{\alpha_i}$, je ne sais pas si $\mathbf{N}(T)/\mathbf{N}(U) = \oplus \mathbf{A}_F^+/p^{\alpha_i}$. C'est bien sûr « presque » vrai au sens des $\mathbf{A}_F^+$-modules. Si c'était vrai, cela simplifierait certains des calculs à venir.

La proposition II.2.1 ci-dessus montre comment on peut retrouver le φ-module $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)$ à partir de $\mathbf{N}(V)$. Nous allons maintenant donner une recette différente (le théorème III.4.4 ci-dessous, cf. [**Fon91**, §B.2.3]), qui permet de retrouver le φ-module filtré $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)$ à partir de $\mathbf{N}(V)$.

Théorème III.4.4. — *Si V est une représentation cristalline positive de G_F, et si on munit $\mathbf{N}(V)$ de la filtration*

$$\mathrm{Fil}^i\,\mathbf{N}(V) = \{x \in \mathbf{N}(V),\ \varphi(x) \in q^i\mathbf{N}(V)\},$$

alors l'application naturelle $\lambda : \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V) \to \mathbf{N}(V)/\pi\mathbf{N}(V)$ que l'on déduit de l'inclusion $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V) \subset \mathbf{B}^+_{\mathrm{rig},F} \otimes_{\mathbf{B}^+_F} \mathbf{N}(V)$ est un isomorphisme de φ-modules filtrés.

Démonstration. — Commençons par montrer que l'application λ est bijective. Pour des raisons de dimension, il suffit de montrer que λ est injective, et il suffit donc de montrer que $\pi\mathbf{B}^+_{\mathrm{rig},F} \otimes_{\mathbf{B}^+_F} \mathbf{N}(V) \cap \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V) = \{0\}$. On va montrer par récurrence que pour tout $j \geq 1$, on a $\pi\mathbf{B}^+_{\mathrm{rig},F} \otimes_{\mathbf{B}^+_F} \mathbf{N}(V) \cap \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V) \subset \pi^j\mathbf{B}^+_{\mathrm{rig},F} \otimes_{\mathbf{B}^+_F} \mathbf{N}(V)$, ce qui implique tout de suite que $\pi\mathbf{B}^+_{\mathrm{rig},F} \otimes_{\mathbf{B}^+_F} \mathbf{N}(V) \cap \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V) = \{0\}$. Si $j \geq 1$ et $x \in \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)$, alors $\gamma(x) = x$ tandis que si $x \in \pi^j\mathbf{B}^+_{\mathrm{rig},F} \otimes_{\mathbf{B}^+_F} \mathbf{N}(V)$, alors $\gamma(x) - \chi^{-j}(\gamma)x \in \pi^{j+1}\mathbf{B}^+_{\mathrm{rig},F} \otimes_{\mathbf{B}^+_F} \mathbf{N}(V)$, et donc si $x \in \pi^j\mathbf{B}^+_{\mathrm{rig},F} \otimes_{\mathbf{B}^+_F} \mathbf{N}(V) \cap \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)$, alors $x \in \pi^{j+1}\mathbf{B}^+_{\mathrm{rig},F} \otimes_{\mathbf{B}^+_F} \mathbf{N}(V)$.

Il est clair que l'application λ est un isomorphisme de φ-modules, et il reste donc à comparer les filtrations. Rappelons que $\mathrm{Fil}^i\,\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V) = \mathrm{Fil}^i\,\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V) \cap \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)$ et que comme on suppose que V est positive, on a en fait $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V) = (\mathbf{B}^+_{\max} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{G_F} = (\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{G_F}$ et que $\mathrm{Fil}^i\,\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V) = (\mathrm{Fil}^i\,\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{G_F}$. Enfin, $\mathrm{Fil}^i\,\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}} = \mathrm{Fil}^i\,\mathbf{B}^+_{\max} \cap \widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}} = (\pi/\pi_1)^i\mathbf{B}^+_{\max} \cap \widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}}$ et un élément de $\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}}$ est divisible par π/π_1 dans $\mathbf{B}^+_{\max}$ si et seulement s'il l'est dans $\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}}$, ce qui fait que $x \in \mathrm{Fil}^i(\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}})$ si et seulement si $\varphi(x) \in q^i\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}}$ (rappelons que $q = \varphi(\pi/\pi_1)$).

On en déduit que si $x \in \mathrm{Fil}^i(\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{G_F}$, alors son image dans $\mathbf{B}^+_{\mathrm{rig},F} \otimes_{\mathbf{B}^+_F} \mathbf{N}(V)$ vérifie

$$\varphi(x) \in (q^i\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V) \cap (\mathbf{B}^+_{\mathrm{rig},F} \otimes_{\mathbf{B}^+_F} \mathbf{N}(V)) = q^i\mathbf{B}^+_{\mathrm{rig},F} \otimes_{\mathbf{B}^+_F} \mathbf{N}(V).$$

En effet, $\mathbf{B}^+[1/\pi] \otimes_{\mathbf{Q}_p} V = \mathbf{B}^+[1/\pi] \otimes_{\mathbf{B}^+_F} \mathbf{N}(V)$ par le théorème III.3.1 et donc $\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}}[1/\pi] \otimes_{\mathbf{Q}_p} V = \widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}}[1/\pi] \otimes_{\mathbf{B}^+_F} \mathbf{N}(V)$, ce qui fait que $q^i(\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V) \cap (\mathbf{B}^+_{\mathrm{rig},F} \otimes_{\mathbf{B}^+_F} \mathbf{N}(V)) = q^i\mathbf{B}^+_{\mathrm{rig},F} \otimes_{\mathbf{B}^+_F} \mathbf{N}(V)$.

Ceci montre que l'image de $\mathrm{Fil}^i\,\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)$ par λ est bien incluse dans $\mathrm{Fil}^i(\mathbf{N}(V)/\pi\mathbf{N}(V))$. Réciproquement, si $y \in \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V) \subset \mathbf{B}^+_{\mathrm{rig},F} \otimes_{\mathbf{B}^+_F} \mathbf{N}(V)$ a la propriété que $\varphi(y) \in q^i\mathbf{B}^+_{\mathrm{rig},F} \otimes_{\mathbf{B}^+_F} \mathbf{N}(V)$, alors $\varphi(y) \in q^i(\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)$ et donc $y \in \mathrm{Fil}^i\,\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)$. □

Corollaire III.4.5. — *Si V est une représentation cristalline de G_F, et si on munit $\mathbf{N}(V)$ de la filtration $\mathrm{Fil}^i\,\mathbf{N}(V) = \{x \in \mathbf{N}(V), \varphi(x) \in q^i\mathbf{N}(V)\}$, alors on a un isomorphisme de φ-modules filtrés $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V) \simeq \mathbf{N}(V)/\pi\mathbf{N}(V)$.*

Démonstration. — Si V n'est pas positive, il suffit d'appliquer le théorème III.4.4 à $V(-b)$ pour b assez grand. □

IV. Représentations de torsion

Dans ce chapitre, on va utiliser le théorème III.3.1 pour montrer le résultat central de cet article, le théorème IV.2.1 (sur les limites de représentations cristallines). Avant cela, nous allons montrer comment varie $\mathbf{N}(T)$ quand T varie : c'est l'objet du premier paragraphe.

IV.1. Continuité du module de Wach. — Dans ce paragraphe, nous allons donc montrer que si deux réseaux de deux représentations cristallines sont « proches », alors les modules de Wach associés sont « proches ». C'est l'objet du théorème IV.1.1 ci-dessous.

Si $r \geq 1$, on pose $\alpha(r) = \inf_{\gamma\in\Gamma_F} \sum_{j=1}^{r} v_p(\chi(\gamma)^j - 1)$. Par exemple, si $r \leq p-2$, alors $\alpha(r) = 0$ et plus généralement si $p \neq 2$, alors on a :

$$\alpha(r) = \left\lfloor \frac{r}{p-1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{r}{p(p-1)} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{r}{p^2(p-1)} \right\rfloor + \cdots \leq \left\lfloor r\frac{p}{(p-1)^2} \right\rfloor.$$

Théorème IV.1.1. — *Si T_1 et T_2 sont deux réseaux de deux représentations cristallines V_1 et V_2 à poids de Hodge-Tate dans $[-r;0]$, et si $n \geq \alpha(r)$ est tel que $T_1/p^n = T_2/p^n$, alors $\mathbf{N}(T_1)$ et $\mathbf{N}(T_2)$ ont même image dans $(\mathbf{A}^+/p^{n-\alpha(r)} \otimes_{\mathbf{Z}_p} T_i)^{H_F}$.*

Remarquons que comme $T_1/p^n = T_2/p^n$, le module $\mathbf{A}^+/p^{n-\alpha(r)} \otimes_{\mathbf{Z}_p} T_i$ ne dépend pas de $i = 1, 2$. Avant de démontrer le théorème, nous aurons besoin de borner, pour un réseau T d'une représentation cristalline, le conoyau de l'application

$$\mathbf{N}(T) \longrightarrow (\mathbf{A}^+/p^n \otimes_{\mathbf{Z}_p} T)^{H_F}.$$

On peut donner une formulation (et une démonstration) cohomologique du résultat ci-dessous, mais nous avons préféré garder la version naïve.

Lemme IV.1.2. — *Si T est une $\mathbf{Z}_p$-représentation cristalline positive de G_F, et $r \in \mathbf{N}$ est tel que $\pi^r \mathbf{A}^+ \otimes_{\mathbf{Z}_p} T \subset \mathbf{A}^+ \otimes_{\mathbf{A}_F^+} \mathbf{N}(T)$, alors l'image de $\mathbf{N}(T)$ dans $(\mathbf{A}^+/p^n \otimes_{\mathbf{Z}_p} T)^{H_F}$ contient $\pi^r(\mathbf{A}^+/p^n \otimes_{\mathbf{Z}_p} T)^{H_F}$.*

Remarquons qu'on peut montrer un résultat plus général (cf. corollaire IV.2.3).

Démonstration. — Soit $\beta \in (\mathbf{A}^+/p^n \otimes_{\mathbf{Z}_p} T)^{H_F}$, que l'on relève en $\widehat{\beta} \in \mathbf{A}^+ \otimes_{\mathbf{Z}_p} T$. Pour tout $h \in H_F$, on a $h(\widehat{\beta}) - \widehat{\beta} \in p^n(\mathbf{A}^+ \otimes_{\mathbf{Z}_p} T)$. On a aussi $\pi^r\widehat{\beta} \in \mathbf{A}^+ \otimes_{\mathbf{A}_F^+} \mathbf{N}(T)$, et donc

$$h(\pi^r\widehat{\beta}) - \pi^r\widehat{\beta} \in p^n(\mathbf{A}^+ \otimes_{\mathbf{Z}_p} T) \cap \mathbf{A}^+ \otimes_{\mathbf{A}_F^+} \mathbf{N}(T) \subset p^n\mathbf{A}^+ \otimes_{\mathbf{A}_F^+} \mathbf{N}(T),$$

par le lemme III.3.2 appliqué à $M = \mathbf{N}(T)$. Ceci implique que si l'on écrit $\pi^r\widehat{\beta}$ selon une base de $\mathbf{N}(T)$ comme ceci : $\pi^r\widehat{\beta} = \sum_{i=1}^{d} y_i \otimes d_i \in \mathbf{A}^+ \otimes_{\mathbf{A}_F^+} \mathbf{N}(T)$, alors $h(y_i) - y_i \in p^n\mathbf{A}^+$. Comme $\mathbf{A}_F^+ \to (\mathbf{A}^+/p^n)^{H_F}$ est surjective, c'est que $y_i \in \mathbf{A}_F^+ + p^n\mathbf{A}^+$, et donc que $\pi^r\widehat{\beta} \in \mathbf{N}(T) + p^n\mathbf{A}^+ \otimes_{\mathbf{A}_F^+} \mathbf{N}(T)$. Cela implique que $\pi^r\beta$ est dans l'image de $\mathbf{N}(T)$ pour tout $\beta \in (\mathbf{A}^+/p^n \otimes_{\mathbf{Z}_p} T)^{H_F}$. □

Étant donnés le lemme IV.1.2 et le théorème III.3.1, il est clair que le théorème IV.1.1 est une conséquence immédiate de la proposition suivante :

Proposition IV.1.3. — *Si T est un réseau d'une représentation cristalline V dont les poids de Hodge-Tate sont dans $[-r;0]$ et si on se donne deux sous-$\mathbf{A}_F^+/p^n$-modules N_1 et N_2 libres de rang d de $(\mathbf{A}^+/p^n \otimes_{\mathbf{Z}_p} T)^{H_F}$ qui sont stables sous l'action de Γ_F, tels que $\pi^r(\mathbf{A}^+/p^n \otimes_{\mathbf{Z}_p} T)^{H_F} \subset N_i$ et tels que l'action de Γ_F est triviale sur $N_i/\pi N_i$, alors $N_1 = N_2$* mod $p^{n-\alpha(r)}$.

Démonstration. — Par symétrie, il suffit de montrer que $N_1 \subset N_2 \mod p^{n-\alpha(r)}$. Si $\gamma \in \Gamma_F$, on va montrer par récurrence sur $i \leq r$ que

$$\pi^{r-i} \prod_{j=0}^{i-1} (\chi(\gamma)^{r-j} - 1) N_1 \subset N_2.$$

Quand $i = 0$, cela revient à $\pi^r N_1 \subset N_2$ ce qui est vrai par hypothèse. Supposons le résultat vrai pour i, et choisissons $x \in N_1$. Par hypothèse de récurrence, on a

$$z = \pi^{r-i} \prod_{j=0}^{i-1} (\chi(\gamma)^{r-j} - 1) x \in N_2.$$

D'une part, on a $(\gamma - 1)z \in \pi N_2$. D'autre part, on a :

$$\begin{aligned}(\gamma-1)z &= (\gamma-1)\left(\pi^{r-i}\prod_{j=0}^{i-1}(\chi(\gamma)^{r-j}-1)x\right)\\ &= \left(\gamma(\pi^{r-i}) - \pi^{r-i}\right)\prod_{j=0}^{i-1}(\chi(\gamma)^{r-j}-1)x + \gamma(\pi^{r-i})(\gamma-1)\left(\prod_{j=0}^{i-1}(\chi(\gamma)^{r-j}-1)x\right)\end{aligned}$$

Comme $(\gamma - 1)x \in \pi N_1$, l'hypothèse de récurrence montre que le deuxième terme de la somme ci-dessus est dans πN_2. Comme $(\gamma-1)z \in \pi N_2$, on en déduit que le premier terme de la somme ci-dessus est aussi dans πN_2. Le fait que $(\gamma-1)\pi^{r-i} = (\chi(\gamma)^{r-i}-1)\pi^{r-i}(1+\pi\cdots)$ implique alors que

$$\pi^{r-i} \prod_{j=0}^{i} (\chi(\gamma)^{r-j} - 1) x \in \pi N_2$$

et donc que $\pi^{r-i-1}\prod_{j=0}^{i}(\chi(\gamma)^{r-j}-1)x \in N_2$ (on travaille dans des anneaux sans π-torsion). Comme c'est vrai pour tout $x \in N_1$, on a bien $\pi^{r-i-1}\prod_{j=0}^{i}(\chi(\gamma)^{r-j}-1)N_1 \subset N_2$.

On peut maintenant appliquer ce résultat avec $i = r$, et γ tel que $\alpha(r) = \sum_{j=1}^{r} v_p(\chi(\gamma)^j - 1)$, et on trouve que $p^{\alpha(r)}N_1 \subset N_2$. Rappelons que par hypothèse, on a aussi $\pi^r N_1 \subset N_2$, ce qui fait que si l'on choisit $x \in N_1$ et qu'on l'écrit selon une base de N_2, $x = \sum_{j=1}^{d} x_j n_{2,j}$, alors on a $x_j \in \pi^{-r}\mathbf{A}_F^+/p^n$ et on peut donc écrire $x_j = x_{-r,j}\pi^{-r} + x_{-r+1,j}\pi^{-r+1} + \cdots$ avec $x_{h,j} \in \mathcal{O}_F/p^n$. Enfin, le fait que $p^{\alpha(r)}N_1 \subset N_2$ implique que $p^{\alpha(r)}x_{-h,j} = 0$ si $h \geq 1$, et donc que $x_{-h,j} \in p^{n-\alpha(r)}\mathcal{O}_F$ si $h \geq 1$. Cela implique que $N_1 \subset N_2 \mod p^{n-\alpha(r)}$. □

IV.2. Limites de représentations cristallines. — L'objet de ce paragraphe est la démonstration du théorème IV.2.1 ci-dessous, le résultat central de cet article : une limite de sous-quotients de représentations cristallines à poids de Hodge-Tate dans $[a;b]$ est elle-même cristalline à poids de Hodge-Tate dans $[a;b]$.

Théorème IV.2.1. — *Si T est un réseau d'une représentation p-adique V de G_F, et s'il existe $b \geq a \in \mathbf{Z}$ et deux suites $\{U_i\}_i$ et $\{T_i\}_i$ de réseaux de représentations V_i de G_F, cristallines à poids de Hodge-Tate dans $[a;b]$ et vérifiant $T/p^i \simeq T_i/U_i$, alors V est cristalline à poids de Hodge-Tate dans $[a;b]$.*

Avant de montrer ce théorème, nous aurons besoin d'établir quelques résultats techniques. La proposition ci-dessous et son corollaire généralisent les calculs effectués dans le lemme IV.1.2.

Proposition IV.2.2. — *Si V est une représentation cristalline positive de G_F, si $U \subset T$ sont deux réseaux de V, et si $x \in \mathbf{A}^+ \otimes_{\mathbf{A}_F^+} \mathbf{N}(T)$ est tel que pour tout $h \in H_F$ on ait $h(x) - x \in \mathbf{A}^+ \otimes_{\mathbf{A}_F^+} \mathbf{N}(U)$, alors $x \in \mathbf{N}(T) + \mathbf{A}^+ \otimes_{\mathbf{A}_F^+} \mathbf{N}(U)$.*

Démonstration. — Nous allons d'abord montrer que l'on peut se ramener au cas où T/U est tué par p. Pour cela, supposons que la proposition est vraie dans ce cas et posons $T_k = p^k T + U$. On voit que $T_0 = T$, que $T_k = U$ si $k \gg 0$, et que T_k/T_{k+1} est tué par p. Si $x_k \in \mathbf{A}^+ \otimes_{\mathbf{A}_F^+} \mathbf{N}(T_k)$ est tel que pour tout $h \in H_F$ on ait $h(x_k) - x_k \in \mathbf{A}^+ \otimes_{\mathbf{A}_F^+} \mathbf{N}(T_{k+1})$, alors la proposition implique que $x_k \in \mathbf{N}(T_k) + \mathbf{A}^+ \otimes_{\mathbf{A}_F^+} \mathbf{N}(T_{k+1})$. On peut donc écrire $x_k = y_k + x_{k+1}$ avec $y_k \in \mathbf{N}(T_k)$ et $x_{k+1} \in \mathbf{A}^+ \otimes_{\mathbf{A}_F^+} \mathbf{N}(T_{k+1})$. Si l'on commence avec $x_0 = x$ et que l'on applique le raisonnement précédent pour $k = 0, 1, \cdots$, on en déduit finalement que $x \in \mathbf{N}(T) + \mathbf{A}^+ \otimes_{\mathbf{A}_F^+} \mathbf{N}(U)$.

Il ne reste donc plus qu'à montrer la proposition sous l'hypothèse supplémentaire que T/U est tué par p, ce que l'on suppose à partir de maintenant. Nous allons d'abord établir que $\mathbf{N}(T)/\mathbf{N}(U)$ est sans π-torsion. Si ce n'était pas le cas, il existerait y dans $\mathbf{N}(T)$ et $n \geq 1$ tels que $\pi^n y \in \mathbf{N}(U)$, ce qui fait que $y \in \mathbf{D}(U)$ (puisque π est inversible dans $\mathbf{A}_F$). Comme $\mathbf{N}(U) = \mathbf{N}(T) \cap \mathbf{D}(U)$, on voit que $y \in \mathbf{N}(U)$ et donc que $\mathbf{N}(T)/\mathbf{N}(U)$ est bien sans π-torsion. Comme $\mathbf{N}(T)/\mathbf{N}(U)$ est tué par p et sans π-torsion, c'est un $\mathbf{E}_F^+ = k_F[[\pi]]$-module sans torsion et il est donc libre. Pour calculer son rang, il suffit de le tensoriser par $\mathbf{E}_F = k_F((\pi))$ et on trouve qu'il est de rang $s = \dim_{\mathbf{F}_p}(T/U)$.

Montrons qu'il existe une base $n_1, \cdots, n_d$ de $\mathbf{N}(T)$ (où $d = \dim_{\mathbf{Q}_p}(V)$) telle que $pn_1, \cdots, pn_s, n_{s+1}, \cdots, n_d$ est une base de $\mathbf{N}(U)$. Pour voir cela, on écrit la suite exacte

$$0 \to \mathbf{N}(U) \to \mathbf{N}(T) \to (\mathbf{E}_F^+)^s \to 0,$$

et on la multiplie par π. Le lemme du serpent nous donne une suite exacte

$$(\mathbf{E}_F^+)^s[\pi] = 0 \to \mathbf{N}(U)/\pi \to \mathbf{N}(T)/\pi \to (\mathbf{E}_F^+)^s/\pi \to 0.$$

Comme $\mathbf{A}_F^+/\pi = \mathcal{O}_F$ et que ce dernier anneau est principal, la théorie des diviseurs élémentaires montre qu'il existe une base $\overline{n}_1, \cdots, \overline{n}_d$ de $\mathbf{N}(T)/\pi$ telle que $p\overline{n}_1, \cdots, p\overline{n}_s$, $\overline{n}_{s+1}, \cdots, \overline{n}_d$ est une base de $\mathbf{N}(U)/\pi$ et on conclut par le lemme de Nakayama.

On peut maintenant terminer la démonstration. Si $x \in \mathbf{A}^+ \otimes_{\mathbf{A}_F^+} \mathbf{N}(T)$ est tel que pour tout $h \in H_F$ on ait $h(x) - x \in \mathbf{A}^+ \otimes_{\mathbf{A}_F^+} \mathbf{N}(U)$, alors on a $x = \sum_{i=1}^d x_i n_i$ et $h(x) - x = \sum_{i=1}^d (h(x_i) - x_i) n_i$ ce qui fait que p divise $h(x_i) - x_i$ pour $i = 1, \cdots, s$. Comme l'application naturelle $\mathbf{A}_F^+/p \to (\mathbf{A}^+/p)^{H_F}$ est un isomorphisme, on voit que $x_i \in \mathbf{A}_F^+ + p\mathbf{A}^+$ pour $i = 1, \cdots, s$ et donc que $x \in \mathbf{N}(T) + \mathbf{A}^+ \otimes_{\mathbf{A}_F^+} \mathbf{N}(U)$, ce qu'il fallait démontrer. □

Corollaire IV.2.3. — *Sous les hypothèses de la proposition IV.2.2 ci-dessus, si V a ses poids dans $[-r; 0]$, alors l'image de l'application naturelle $\mathbf{N}(T) \to (\mathbf{A}^+ \otimes_{\mathbf{Z}_p} T/U)^{H_F}$ contient $\pi^r (\mathbf{A}^+ \otimes_{\mathbf{Z}_p} T/U)^{H_F}$.*

Démonstration. — Si $\overline{y} \in \pi^r (\mathbf{A}^+ \otimes_{\mathbf{Z}_p} T/U)^{H_F}$, alors on peut le relever en $y \in \pi^r \mathbf{A}^+ \otimes_{\mathbf{Z}_p} T$ et par le théorème III.3.1, on voit que $y \in \mathbf{A}^+ \otimes_{\mathbf{A}_F^+} \mathbf{N}(T)$. D'autre part, pour tout $h \in H_F$ l'image de $h(y) - y$ dans $\mathbf{A}^+ \otimes_{\mathbf{Z}_p} T/U$ est nulle. Nous montrerons que cela implique que $h(y) - y \in \mathbf{A}^+ \otimes_{\mathbf{A}_F^+} \mathbf{N}(U)$. Si l'on suppose cela pour l'instant, alors la proposition IV.2.2 implique que $y \in \mathbf{N}(T) + \mathbf{A}^+ \otimes_{\mathbf{A}_F^+} \mathbf{N}(U)$ et donc que l'on peut écrire $y = y_0 + z$ avec $y_0 \in \mathbf{N}(T)$ et $z \in \mathbf{A}^+ \otimes_{\mathbf{A}_F^+} \mathbf{N}(U)$. Il est clair que l'image de y_0 dans $(\mathbf{A}^+ \otimes_{\mathbf{Z}_p} T/U)^{H_F}$ est $\overline{y}$.

Il reste donc à montrer que le noyau de l'application naturelle de $\mathbf{A}^+ \otimes_{\mathbf{A}_F^+} \mathbf{N}(T)$ dans $\mathbf{A}^+ \otimes_{\mathbf{Z}_p} T/U$ est $\mathbf{A}^+ \otimes_{\mathbf{A}_F^+} \mathbf{N}(U)$, c'est-à-dire que

$$(\mathbf{A}^+ \otimes_{\mathbf{A}_F^+} \mathbf{N}(T)) \cap (\mathbf{A}^+ \otimes_{\mathbf{Z}_p} U) = \mathbf{A}^+ \otimes_{\mathbf{A}_F^+} \mathbf{N}(U).$$

Par dévissage, on se ramène au cas où T/U est tué par p (plus précisément, si l'on sait faire le cas où T/U est tué par p, alors on l'applique successivement aux réseaux $T_k = p^k T + U$ comme dans la preuve de la proposition précédente) et on a vu dans la démonstration de la proposition IV.2.2 qu'il existe dans ce cas une base $n_1, \cdots, n_d$ de $\mathbf{N}(T)$ telle que $pn_1, \cdots, pn_r$, $n_{r+1}, \cdots, n_d$ est une base de $\mathbf{N}(U)$.

Pour $x \in \mathbf{A}^+ \otimes_{\mathbf{A}_F^+} \mathbf{N}(T)$, écrivons $x = \sum_{i=1}^d x_i n_i$. Si l'on suppose que $x \in \mathbf{A}^+ \otimes_{\mathbf{Z}_p} U$, alors $x \in \mathbf{A}^+[1/\pi] \otimes_{\mathbf{A}_F^+} \mathbf{N}(U)$ et donc p divise x_i dans $\mathbf{A}^+[1/\pi]$ et comme un élément de $\mathbf{A}^+$ divisible par p dans $\mathbf{A}^+[1/\pi]$ est divisible par p dans $\mathbf{A}^+$, on voit que $x \in \mathbf{A}^+ \otimes_{\mathbf{A}_F^+} \mathbf{N}(U)$. □

On peut maintenant montrer le théorème IV.2.1.

Démonstration du théorème IV.2.1. — Si l'on applique le corollaire IV.2.3 aux réseaux $U_{i+j} + p^i T_{i+j}$ et T_{i+j} (avec $i, j \geq 0$) de la représentation V_{i+j}, on trouve que l'image de l'application naturelle $\mathbf{N}(T_{i+j}) \to (\mathbf{A}^+ \otimes_{\mathbf{Z}_p} T/p^i)^{H_F}$ contient $\pi^r(\mathbf{A}^+ \otimes_{\mathbf{Z}_p} T/p^i)^{H_F}$. Si l'on pose

$$N_i = \cap_{j=0}^{+\infty} \mathrm{Im}\left(\mathbf{N}(T_{i+j}) \to (\mathbf{A}^+ \otimes_{\mathbf{Z}_p} T/p^i)^{H_F}\right),$$

on voit donc que N_i est un sous-$\mathbf{A}_F^+/p^i$-module de $(\mathbf{A}^+ \otimes_{\mathbf{Z}_p} T/p^i)^{H_F}$ qui contient un $\mathbf{A}_F^+/p^i$-module libre de rang $d = \mathrm{rg}_{\mathbf{Z}_p}(T)$. Par ailleurs, N_i est stable par φ et par Γ_F, et si $\gamma \in \Gamma_F$ et $x \in N_i$, alors $(\gamma - 1)x \in \pi N_i$. Il est de plus clair que l'application $N_{i+1} \to N_i$ est surjective, ce qui fait que $N = \varprojlim_i N_i$ s'identifie à un sous $\mathbf{A}_F^+$-module de $\mathbf{D}(T) = \varprojlim_i \mathbf{D}(T/p^i)$ qui est stable par φ et par Γ_F, et tel que si $\gamma \in \Gamma_F$ et $x \in N$, alors $(\gamma - 1)x \in \pi N$. On voit enfin que $\mathbf{B}_F^+ \otimes_{\mathbf{A}_F^+} N$ est de rang d, puisque N se surjecte sur N_1 qui est un $\mathbf{E}_F^+$-module libre de rang d, et qu'il a les mêmes propriétés que N vis à vis de φ et de Γ_F. Par la proposition II.1.4, c'est donc que V est cristalline. Enfin, $N_i/\varphi^* N_i$ est tué par q^r ce qui fait qu'il en est de même pour N. On en déduit d'une part que $N = \mathbf{N}(V)$ et d'autre part, puisque $\varphi(N) \subset N$ et que $q^r N \subset \varphi^* N$, que les poids de Hodge-Tate de V sont dans $[-r; 0]$. □

Remarque IV.2.4. — Le lecteur est en droit de se demander pourquoi on n'applique pas la même méthode que dans la démonstration du théorème IV.1.1. On voit que l'image de $\mathbf{N}(T_{i+j})$ dans $(\mathbf{A}^+ \otimes_{\mathbf{Z}_p} T/p^i)^{H_F}$ s'identifie à $\mathbf{N}(T_{i+j})/\mathbf{N}(U_{i+j} + p^i T_{i+j})$ et est suffisamment grosse ce qui devrait montrer qu'elle est indépendante de $j \geq 0$ par la proposition IV.1.3. Le problème est que je ne sais pas montrer que $\mathbf{N}(T_{i+j})/\mathbf{N}(U_{i+j} + p^i T_{i+j})$ est libre (voir à ce sujet la remarque III.4.3) et on ne peut donc pas appliquer les mêmes arguments, il faut se contenter d'un résultat un peu moins fort (la construction de N_i).

IV.3. Comparaison entre $\mathbf{D}^+(T/p^n)$ et $\mathbf{D}^+(T)/p^n$. — Pour terminer ce chapitre, nous donnons une démonstration du fait que si T est un réseau d'une représentation de hauteur finie, alors $\mathbf{D}^+(T) \simeq \varprojlim_n (\mathbf{A}^+/p^n \otimes_{\mathbf{Z}_p} T)^{H_F}$. Ce résultat (la proposition IV.3.1 ci-dessous) ne sera pas utilisé dans cet article.

Proposition IV.3.1. — *Si T est un réseau d'une représentation de hauteur finie de G_F, et s'il existe $\lambda \neq 0 \in \mathbf{A}_F^+$ tel que $\lambda \mathbf{A}^+ \otimes_{\mathbf{Z}_p} T \subset \mathbf{A}^+ \otimes_{\mathbf{A}_F^+} \mathbf{D}^+(T)$, alors*

(1) *l'image de $\mathbf{D}^+(T)$ dans $(\mathbf{A}^+/p^n \otimes_{\mathbf{Z}_p} T)^{H_F}$ contient $\lambda(\mathbf{A}^+/p^n \otimes_{\mathbf{Z}_p} T)^{H_F}$;*

(2) $\mathbf{D}^+(T) \simeq \varprojlim_n (\mathbf{A}^+/p^n \otimes_{\mathbf{Z}_p} T)^{H_F}$ *;*

Démonstration. — Commençons par montrer le (1). Soit $\beta \in (\mathbf{A}^+/p^n \otimes_{\mathbf{Z}_p} T)^{H_F}$, que l'on relève en $\widehat{\beta} \in \mathbf{A}^+ \otimes_{\mathbf{Z}_p} T$. Pour tout $h \in H_F$, on a $h(\widehat{\beta}) - \widehat{\beta} \in p^n(\mathbf{A}^+ \otimes_{\mathbf{Z}_p} T)$. On a aussi

$\lambda\widehat{\beta} \in \mathbf{A}^+ \otimes_{\mathbf{A}_F^+} \mathbf{D}^+(T)$, et donc

$$h(\lambda\widehat{\beta}) - \lambda\widehat{\beta} \in p^n(\mathbf{A}^+ \otimes_{\mathbf{Z}_p} T) \cap \mathbf{A}^+ \otimes_{\mathbf{A}_F^+} \mathbf{D}^+(T) \subset p^n \mathbf{A}^+ \otimes_{\mathbf{A}_F^+} \mathbf{D}^+(T),$$

par le lemme III.3.2 appliqué à $M = \mathbf{D}^+(T)$. Ceci implique que si l'on écrit $\lambda\widehat{\beta}$ selon une base de $\mathbf{D}^+(T)$ comme ceci : $\lambda\widehat{\beta} = \sum y_i \otimes d_i \in \mathbf{A}^+ \otimes_{\mathbf{A}_F^+} \mathbf{D}^+(T)$, alors $h(y_i) - y_i \in p^n\mathbf{A}^+$. Comme $\mathbf{A}_F^+ \to (\mathbf{A}^+/p^n)^{H_F}$ est surjective, c'est que $y_i \in \mathbf{A}_F^+ + p^n\mathbf{A}^+$, et donc que $\lambda\widehat{\beta} \in \mathbf{D}^+(T) + p^n\mathbf{A}^+ \otimes_{\mathbf{A}_F^+} \mathbf{D}^+(T)$. Cela montre le (1).

Montrons le (2) : soit $\{\beta_n\}$ une suite de $\varprojlim_n (\mathbf{A}^+/p^n \otimes_{\mathbf{Z}_p} T)^{H_F}$. Il existe une suite α_n de $\mathbf{D}^+(T)$ telle que l'image de α_n est $\lambda\beta_n$. Cela implique que la suite α_n converge pour la topologie p-adique vers $\alpha \in \mathbf{D}^+(T)$ tel que l'image de α est $\lambda\beta_n$. On peut écrire, dans $\mathbf{A}^+ \otimes_{\mathbf{Z}_p} T$, $\alpha = \lambda x_n + p^n y_n$ (où $x_n \in \mathbf{A}^+ \otimes_{\mathbf{Z}_p} T$ relève β_n), et la suite x_n converge vers un élément x de $\mathbf{A}^+ \otimes_{\mathbf{Z}_p} T$ tel que $\alpha = \lambda x$. Ceci fait que $\alpha \in \mathbf{D}^+(T)$ a ses coordonnées divisibles par λ et donc que α est divisible par λ dans $\mathbf{D}^+(T)$; $\alpha\lambda^{-1}$ s'envoie alors sur $\{\beta_n\}$, ce qui montre le (2). □

Remarque IV.3.2. — On a déjà vu que si T est un réseau d'une représentation cristalline V à poids de Hodge-Tate dans $[a;b]$, alors on peut prendre $\lambda = \pi^{b-a}$. Plus généralement, si T est un réseau d'une représentation de hauteur finie de G_F, et si k est un corps fini, alors il existe $\lambda \neq 0 \in \mathbf{A}_F^+$ tel que $\lambda\mathbf{A}^+ \otimes_{\mathbf{Z}_p} T \subset \mathbf{A}^+ \otimes_{\mathbf{A}_F^+} \mathbf{D}^+(T)$.

V. Les réseaux des représentations cristallines

Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser de nouveau à la construction $T \mapsto \mathbf{N}(T)$, et à l'interprétation de $\mathbf{N}(T)/\pi\mathbf{N}(T)$ en tant que réseau de $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)$.

V.1. Le réseau $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(T)$ de $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)$. — Si T est un réseau de V, alors l'image de $\mathbf{N}(T)$ dans $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)$ par l'isomorphisme $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V) = \mathbf{N}(V)/\pi\mathbf{N}(V)$ en est un réseau canoniquement défini, et nous montrons que le déterminant de l'isomorphisme de comparaison entre V et $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)$, calculé dans des bases de T et de ce réseau, est le produit d'une puissance de t par une unité.

Définition V.1.1. — Si T est un réseau de V, alors on appelle $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(T)$ l'image de $\mathbf{N}(T)$ dans $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)$ par l'isomorphisme $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V) = \mathbf{N}(V)/\pi\mathbf{N}(V)$.

Proposition V.1.2. — *Si T est un réseau d'une représentation cristalline V dont les opposés des poids de Hodge-Tate sont $r_1, \cdots, r_d$, alors $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(T)$ est un $\mathcal{O}_F$-réseau de $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)$ (stable par φ si les r_i sont ≥ 0) et le déterminant de l'isomorphisme de comparaison*

$$\mathbf{B}_{\max} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V \simeq \mathbf{B}_{\max} \otimes_F \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V),$$

calculé dans des bases de T et de $\mathbf{D}_{\text{cris}}(T)$, appartient à $t^{r_1+\cdots+r_d}W(\overline{k})^*$.

Démonstration. — En tordant, on se ramène au cas où V est positive (c'est-à-dire que $r_i \geq 0$). Tout d'abord, le théorème III.3.1 montre que l'idéal de $\mathbf{A}^+$ engendré par le déterminant de l'inclusion $\mathbf{A}^+ \otimes_{\mathbf{A}_F^+} \mathbf{N}(T) \subset \mathbf{A}^+ \otimes_{\mathbf{Z}_p} T$ est $(\pi^{r_1+\cdots+r_d})$, et donc que si l'on choisit des bases de T et de $\mathbf{N}(T)$, alors le déterminant de l'inclusion ci-dessus, calculé dans ces bases, appartient à $\pi^{r_1+\cdots+r_d}(\mathbf{A}^+)^*$.

Ensuite, rappelons que $\mathbf{D}_{\text{cris}}(V) = (\mathbf{B}^+_{\text{rig},F} \otimes_{\mathbf{A}_F^+} \mathbf{N}(T))^{\Gamma_F}$, et donc que $\mathbf{D}_{\text{cris}}(T) \subset \mathbf{D}_{\text{cris}}(V)$ s'identifie à l'ensemble des $x \in (\mathbf{B}^+_{\text{rig},F} \otimes_{\mathbf{A}_F^+} \mathbf{N}(T))^{\Gamma_F}$ tels que $x(0) \in \mathbf{N}(T)/\pi\mathbf{N}(T)$. Si l'on choisit une base de $\mathbf{N}(T)$ et une base de $\mathbf{D}_{\text{cris}}(T)$, alors le déterminant de l'inclusion

$$\mathbf{B}^+_{\text{rig},F} \otimes_{\mathcal{O}_F} \mathbf{D}_{\text{cris}}(T) \subset \mathbf{B}^+_{\text{rig},F} \otimes_{\mathbf{A}_F^+} \mathbf{N}(T)$$

calculé dans ces bases va être égal à $(t/\pi)^{r_1+\cdots+r_d} f_0(\pi)$ où $f_0(\pi) \in (\mathbf{B}_F^+)^*$ et $f_0(0) \in \mathcal{O}_F^*$. C'est donc que $f_0(\pi) \in (\mathbf{A}_F^+)^*$.

On voit donc que le déterminant de l'isomorphisme de comparaison

$$\mathbf{B}_{\max} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V \simeq \mathbf{B}_{\max} \otimes_F \mathbf{D}_{\text{cris}}(V),$$

calculé dans des bases de T et de $\mathbf{D}_{\text{cris}}(T)$, appartient à $t^{r_1+\cdots+r_d}(\mathbf{A}^+)^*$. Comme V est cristalline, il appartient aussi à $t^{r_1+\cdots+r_d}(W(\overline{k})[1/p])^*$. C'est donc qu'il appartient à $t^{r_1+\cdots+r_d}W(\overline{k})^*$. □

Pour une application de ce résultat aux nombres de Tamagawa des représentations cristallines, voir [**BB03**].

Remarque V.1.3. — Le théorème [**CF00**, théorème A] de Colmez et Fontaine montre que le foncteur $V \mapsto \mathbf{D}_{\text{cris}}(V)$ est une équivalence de catégories de la catégorie des représentations cristallines de G_F vers la catégorie des φ-modules filtrés admissibles sur F.

Si l'on se fixe une représentation cristalline V de G_F, alors le foncteur $T \mapsto \mathbf{D}_{\text{cris}}(T)$ associe à tout réseau galoisien de V un $\mathcal{O}_F$-réseau de $\mathbf{D}_{\text{cris}}(V)$ et ce foncteur respecte l'inclusion. On peut de plus montrer que $\mathbf{D}_{\text{cris}}(T_1) = \mathbf{D}_{\text{cris}}(T_2)$ si et seulement si $T_1 = T_2$. Dans le paragraphe suivant, nous verrons comment caractériser l'image de ce foncteur si la longueur de la filtration est $\leq p-1$ (il s'agit d'une reformulation de la théorie de Fontaine et Laffaille ; on obtient tous les réseaux fortement divisibles de $\mathbf{D}_{\text{cris}}(V)$). En général, je ne sais pas quels réseaux de $\mathbf{D}_{\text{cris}}(V)$ on obtient.

V.2. Lien avec la théorie de Fontaine-Laffaille. — L'objet de ce paragraphe est de donner une nouvelle démonstration de certains des résultats de « Fontaine-Laffaille », dans l'esprit de [**Wa97**, §3.2]. Il s'agit de la correspondance entre réseaux de représentations cristallines et réseaux fortement divisibles de $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)$, quand la longueur de la filtration sur $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)$ est $\leq p-1$.

Rappelons (cf. [**FL82**, §7.7] ou [**Laf80**, §3.1]) qu'un réseau M de $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)$ est dit fortement divisible si

$$\sum_{i\in\mathbf{Z}} p^{-i}\varphi(\mathrm{Fil}^i M) = M,$$

et (cf. [**FL82**, §7.8] ou [**Laf80**, théorème 3.2]) que comme la filtration sur $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)$ est « faiblement admissible », le réseau M est fortement divisible si et seulement si $\sum_{i\in\mathbf{Z}} p^{-i}\varphi(\mathrm{Fil}^i M) \subset M$.

Proposition V.2.1. — *Si T est un réseau d'une représentation cristalline positive V, dont les poids de Hodge-Tate sont dans $[a-(p-1);a]$ pour un entier $a \in \mathbf{Z}$, alors $M = \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(T)$ est un réseau fortement divisible de $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)$.*

Démonstration. — C'est un résultat de Wach (cf. [**Wa97**, théorème 3]). Donnons-en une démonstration rédigée un peu différemment. En tordant, on se ramène au cas où $a=0$.

Soient Fil^i_T et Fil^i_V les filtrations de M induites par celles de $\mathbf{N}(T)$ et $\mathbf{N}(V)$ (i.e. pour $U = T, V$ et $x \in M$, on a $x \in \mathrm{Fil}^i_U$ si et seulement si il existe $\widetilde{x} \in \mathrm{Fil}^i \mathbf{N}(U)$ dont l'image modulo π est x). Il est clair que $\mathrm{Fil}^i_T M \subset \mathrm{Fil}^i_V M$.

Comme $q = p \mod \pi$, on a $\varphi(\mathrm{Fil}^i_T M) \subset p^i M$ et donc on a $\sum_{i\in\mathbf{Z}} p^{-i}\varphi(\mathrm{Fil}^i_T M) \subset M$, et tout revient donc à voir que la filtration Fil^i_T coïncide sur M avec la filtration Fil^i_V. Remarquons que ce résultat est faux en général si la longueur de la filtration est $\geq p$.

Nous allons donc montrer que $\mathrm{Fil}^i_V M \subset \mathrm{Fil}^i_T M$ (l'autre inclusion est triviale), pour $1 \leq i \leq p-1$ (si $i \geq p$, alors $\mathrm{Fil}^i_V M = 0$).

Si γ est un élément de Γ_F tel que $\chi(\gamma)^i \neq 1 \mod p$ pour $1 \leq i \leq p-2$ (si $p=2$, cette condition est vide), posons $T_1(\gamma) = 1$ et

$$T_i(\gamma) = (1-\chi(\gamma)^{-1}\gamma)(1-\chi(\gamma)^{-2}\gamma)\cdots(1-\chi(\gamma)^{-(i-1)}\gamma).$$

Si $\overline{x} \in \mathbf{N}(T)/\pi\mathbf{N}(T)$ est dans $\mathrm{Fil}^i_V \mathbf{N}(T)/\pi\mathbf{N}(T)$, c'est donc qu'il est l'image modulo π d'un $x \in \mathbf{N}(V)$ tel que $\varphi(x) \in q^i\mathbf{N}(V)$, et tel que l'on puisse écrire $x = x_0 + \pi y_1$ avec $x_0 \in \mathbf{N}(T)$ et $y_1 \in \mathbf{N}(V)$. On a $T_i(\gamma)x = T_i(\gamma)x_0 + \pi^i y_i$ avec $y_i \in \mathbf{N}(V)$. Comme $T_i(\gamma)x \in \mathrm{Fil}^i \mathbf{N}(V)$, et comme on a aussi $\pi^i y_i \in \mathrm{Fil}^i \mathbf{N}(V)$, on a donc $T_i(\gamma)x_0 \in \mathrm{Fil}^i \mathbf{N}(V) \cap \mathbf{N}(T) = \mathrm{Fil}^i \mathbf{N}(T)$, ce qui fait que $T_i(\gamma)\overline{x} \in \mathrm{Fil}^i_T M$. Si $i \leq p-1$, alors $T_i(\gamma)$ agit par une unité p-adique sur M et donc on a bien $\overline{x} \in \mathrm{Fil}^i_T M$. □

Remarque V.2.2. — Si la longueur de la filtration est $\geq p$, je ne sais pas quels sont les réseaux de $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)$ qui sont de la forme $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(T)$.

Nous allons maintenant montrer comment reconstruire T à partir de M. Ce résultat se trouve dans [**FL82**, proposition 7.17] et [**Wa97**, §3.2], mais nous en donnons une démonstration différente, qui consiste à reconstruire $\mathbf{N}(T)$ à partir de $M = \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(T)$.

Si M est un réseau fortement divisible de $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)$, et si on en choisit une base adaptée à la filtration, alors la matrice de φ dans cette base peut s'écrire $A_0 P_0$ avec $P_0 = \mathrm{Diag}(p^{r_1}, \cdots, p^{r_d})$ et $A_0 \in \mathrm{GL}(d, \mathcal{O}_F)$, où les r_i sont les opposés des poids de Hodge-Tate de V. Pour construire un module de Wach $\mathbf{N}$, il suffit de construire un Frobenius φ et une action de Γ_F sur $(\mathbf{A}_F^+)^d$. Si la matrice de φ est de la forme $P = AQ$ avec $Q = \mathrm{Diag}(q^{r_1}, \cdots, q^{r_d})$ et $A \in \mathrm{GL}(d, \mathbf{A}_F^+)$ telle que $(A \mod \pi) = A_0$, alors un petit calcul montre que $\mathbf{N}/\pi\mathbf{N} = M$ en tant que φ-modules filtrés. Tout le problème est alors de construire une matrice $G = G(\gamma)$, donnant l'action de $\gamma \in \Gamma_F$, telle que $G\gamma(P) = P\varphi(G)$. En général ce n'est pas possible, mais dans certains cas on peut le faire, si l'on choisit judicieusement la matrice A qui relève A_0. Quand la longueur de la filtration est $\leq p-1$, on trouve le résultat suivant :

Proposition V.2.3. — *Si M est un réseau fortement divisible d'un φ-module filtré D (nécessairement faiblement admissible) à poids de Hodge-Tate dans $[a-(p-1); a]$, tel que soit D n'a pas de partie de pente $-a$, soit D n'a pas de partie de pente $-a+(p-1)$, alors il existe une représentation cristalline V de G_F et un réseau T de V tels que $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V) = D$ et $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(T) = M$.*

Démonstration. — Encore une fois, on se ramène au cas $a = 0$ en tordant, ce qui fait que si $r_1 \leq \cdots \leq r_d$ sont les opposés des poids de Hodge-Tate de V, alors $p-1 \geq r_i \geq 0$ et dans une base de M adaptée à la filtration, la matrice de φ est égale à $A_0 P_0$ où $P_0 = \mathrm{Diag}(p^{r_1}, \cdots, p^{r_d})$ et $A_0 \in \mathrm{GL}(d, \mathcal{O}_F)$. Comme on l'a dit plus haut, le problème est de relever convenablement cette matrice dans $\mathrm{M}(d, \mathbf{A}_F^+)$.

Commençons par remarquer que si $\mu = (p/(q-\pi^{p-1})) \in \mathbf{A}_F^+$, alors μ est inversible dans $\mathbf{A}_F^+$, et que pour tout $s \geq 0$, on a $\mu^s q^s = p^s \mod \pi^{p-1}$. On pose

$$P = A_0 \,\mathrm{Diag}(q^{r_1}\mu^{r_1}, \cdots, q^{r_d}\mu^{r_d}),$$

ce qui fait que P est une matrice à coefficients dans $\mathbf{A}_F^+$, égale modulo π^{p-1} à la matrice de φ sur M. Comme on l'a dit plus haut, si l'on appelle $\mathbf{N}$ le $\mathbf{A}_F^+$-module libre de rang d muni du Frobenius donné par la matrice P, alors $\mathbf{N}/\pi\mathbf{N} = M$ en tant que φ-modules filtrés et pour terminer la preuve, il suffit de trouver une action de Γ_F compatible à ce Frobenius. On pose alors $T = (\mathbf{A} \otimes_{\mathbf{A}_F^+} \mathbf{N})^{\varphi=1}$, et on vérifie que $V = \mathbf{Q}_p \otimes_{\mathbf{Z}_p} T$ est une représentation p-adique de G_F dont le (φ, Γ)-module contient $\mathbf{N}$ ce qui fait que V est cristalline et que $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V) = D$ puisque $\mathbf{N}(T)/\pi\mathbf{N}(T) = M$.

Pour terminer la preuve, il suffit donc de construire pour $\gamma \in \Gamma_F$ une matrice $H = H_\gamma \in \mathrm{M}(d, \mathbf{A}_F^+)$ telle que si l'on pose $G_\gamma = \mathrm{Id} + \pi^{p-1} H_\gamma$, alors $G_\gamma \gamma(P) = P\varphi(G_\gamma)$. Remarquons que si $\gamma \in \Gamma_F$, alors $P\gamma(P^{-1}) \in \mathrm{Id} + \pi^{p-1}\mathrm{M}(d, \mathbf{A}_F^+)$. On écrit $P\gamma(P^{-1}) = \mathrm{Id} + \pi^{p-1}Q$. L'équation $G_\gamma\gamma(P) = P\varphi(G_\gamma)$ est équivalente à :

$$H - P\varphi(H)q^{p-1}\gamma(P^{-1}) = \frac{P\gamma(P^{-1}) - \mathrm{Id}}{\pi^{p-1}} = Q.$$

Posons $\Omega(X) = P\varphi(X)q^{p-1}\gamma(P^{-1})$. Il suffit donc de montrer que l'application $X \mapsto X - \Omega(X)$ de $\mathrm{M}(d, \mathbf{A}_F^+)$ dans lui-même est surjective. Il est clair que si $Y \in \pi\,\mathrm{M}(d, \mathbf{A}_F^+)$, alors la série

$$Y + \Omega(Y) + (\Omega \circ \Omega)(Y) + \cdots$$

converge vers $X \in \pi\,\mathrm{M}(d, \mathbf{A}_F^+)$ tel que $X - P\varphi(X)q^{p-1}\gamma(P^{-1}) = Y$. Il suffit donc de montrer que l'application $X \mapsto X - A_0P_0\varphi(X)p^{p-1}(A_0P_0)^{-1}$ de $\mathrm{M}(d, \mathcal{O}_F)$ dans lui-même est surjective.

Si on suppose que $\varphi : D \to D$ n'a pas de partie de pente 0, alors $\prod_{i=0}^n \varphi^{n-i}(A_0P_0) \to 0$ quand $n \to \infty$ et donc si $Y \in \mathrm{M}(d, \mathcal{O}_F)$, et $\Omega_0(X) = A_0P_0\varphi(X)p^{p-1}(P_0A_0)^{-1}$, alors la série

$$Y + \Omega_0(Y) + (\Omega_0 \circ \Omega_0)(Y) + \cdots$$

converge vers $X \in \mathrm{M}(d, \mathcal{O}_F)$ tel que $X - A_0P_0\varphi(X)p^{p-1}(A_0P_0)^{-1} = Y$.

De même, si D n'a pas de partie de pente $p-1$, alors

$$\prod_{i=0}^{n} \varphi^i(p^{p-1}(A_0P_0)^{-1}) \to 0$$

quand $n \to \infty$ et on conclut de la même manière. □

Remarque V.2.4. — Si $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)$ a des sous-objets de pente minimale, alors V est réductible ce qui permet de décrire les réseaux $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(T)$ de $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)$ dans ces cas là aussi.

Appendice A

Quelques exemples

Pour terminer cet article, il ne nous paraît pas inutile de donner quelques exemples de modules de Wach $\mathbf{N}(T)$ associés à certaines représentations p-adiques.

(1) Le premier exemple est le caractère cyclotomique et ses puissances, c'est-à-dire $T = \mathbf{Z}_p(r)$, où $r \in \mathbf{Z}$. On a alors $\mathbf{N}(\mathbf{Z}_p(r)) \simeq \mathbf{A}_F^+ \cdot e_r$ où

$$\varphi(e_r) = q^{-r}e_r \quad \text{et} \quad \gamma(e_r) = \frac{\chi(\gamma)^r\pi^r}{\gamma(\pi^r)}e_r \quad \text{si } \gamma \in \Gamma_F.$$

(2) Ensuite, faisons le cas où η est un caractère non ramifié de G_F avec $F = \mathbf{Q}_p$. On a alors $\mathbf{N}(\mathbf{Z}_p(\eta)) \simeq \mathbf{A}_F^+ \cdot e_\eta$ où, si Frob_p dénote $(x \mapsto x^p) \in \mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$:

$$\varphi(e_\eta) = \eta(\mathrm{Frob}_p^{-1})e_\eta \quad \text{et} \quad \gamma(e_\eta) = e_\eta \quad \text{si } \gamma \in \Gamma_F.$$

(3) Faisons le cas d'une « courbe elliptique supersingulière » (avec $a_p = 0$). On se donne un φ-module filtré $D = \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)$ engendré par $\overline{e}_1$, $\overline{e}_2$ tels que $\mathrm{Fil}^0 D = D$, $\mathrm{Fil}^1 D = F\overline{e}_1$, $\mathrm{Fil}^2 D = 0$, avec $\varphi(\overline{e}_1) = -p\overline{e}_2$ et $\varphi(\overline{e}_2) = \overline{e}_1$.

Il s'agit donc de construire un module de Wach $\mathbf{N}(V)$ tel que l'on ait $\mathbf{N}(V)/\pi\mathbf{N}(V) \simeq D$ en tant que φ-modules filtrés. On va prendre pour $\mathbf{N}(V)$ le $\mathbf{B}_F^+$-module engendré par e_1 et e_2 avec $\varphi(e_1) = -qe_2$ et $\varphi(e_2) = e_1$.

L'action de $\gamma \in \Gamma_F$ est alors donnée par :

$$\gamma(e_1) = \frac{\log^+(1+\pi)}{\gamma(\log^+(1+\pi))}e_1 \quad \text{et} \quad \gamma(e_2) = \frac{\log^-(1+\pi)}{\gamma(\log^-(1+\pi))}e_2$$

où

$$\log^+(1+\pi) = \prod_{n\geq 0} \frac{\varphi^{2n+1}(q)}{p} \quad \text{et} \quad \log^-(1+\pi) = \prod_{n\geq 0} \frac{\varphi^{2n}(q)}{p}$$

de telle sorte que $t = \log(1+\pi) = \pi \log^-(1+\pi)\log^+(1+\pi)$. On voit alors que l'on retrouve $\overline{e}_1$, $\overline{e}_2$ soit comme les images modulo π de e_1 et e_2, soit comme $\widetilde{e}_1 = \log^+(1+\pi)e_1$ et $\widetilde{e}_2 = \log^-(1+\pi)e_2$ en tant qu'éléments de $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V) = (\mathbf{B}^+_{\mathrm{rig},F} \otimes_{\mathbf{B}_F^+} \mathbf{N}(V))^{\Gamma_F}$.

Remarquons que les fonctions $\log^+$ et $\log^-$ interviennent dans les travaux de R. Pollack (voir [**Pol03**, §5]) sur les fonctions L p-adiques de formes modulaires supersingulières.

(4) Pour la construction de familles de modules de Wach en dimension 2, voir [**BLZ03**].

Appendice B
Liste des notations

Voici une liste des principales notations de cet article, dans l'ordre où elles apparaissent (à partir du chapitre I).

I k, F, $\overline{F}$, $\mathbf{C}$, G_F, μ_{p^n}, F_n, F_∞, H_F, χ, Γ_F, $\varepsilon^{(n)}$, V, d.

I.1 $\widetilde{\mathbf{E}}$, $\widetilde{\mathbf{E}}^+$, $v_{\mathbf{E}}$, $\widetilde{\mathbf{A}}^+$, $\widetilde{\mathbf{B}}^+$, θ, ε, π, π_1, ω, q, φ, $\mathbf{E}_F$, $\mathbf{E}$, $\mathbf{E}^+$, $\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}$, t, $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$, $\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V)$, $\mathbf{B}^+_{\max}$, $\mathbf{B}_{\max}$, $\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}}$, $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)$.

I.2 $\widetilde{\mathbf{A}}$, $\widetilde{\mathbf{B}}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}^+$, $\mathbf{A}^+$, $\mathbf{B}_F$, $\mathbf{A}_F$, $\mathbf{A}_F^+$, $\mathbf{B}_F^+$, $\mathbf{D}(V)$, $\mathbf{D}(T)$, $\mathbf{D}^+(V)$, $\mathbf{D}^+(T)$.

I.3 $\mathbf{B}^+_{\mathrm{rig},F}$.

II.1 $\mathbf{N}(T)$, $\mathbf{N}(V)$.

II.2 $\mathbf{B}^\dagger_{\mathrm{rig},F}$, $\mathbf{D}^\dagger_{\mathrm{rig}}(V)$.

III.1 $\mathbf{D}_{\mathrm{Sen}}(V)$, Γ_n, $\mathbf{D}^n_{\mathrm{Sen}}(V)$.

V.1 $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(T)$.

V.2 Fil_T, Fil_V.

Références

[Ax70] Ax J. : *Zeros of polynomials over local fields—The Galois action.* J. Algebra 15 1970 417–428.

[BB03] Benois D., Berger L. : *Nombres de Tamagawa de certaines représentations cristallines.* En préparation.

[Ber02] Berger L. : *Représentations p-adiques et équations différentielles.* Invent. Math. 148 (2002), 219–284.

[Ber03] Berger L. : *Bloch and Kato's exponential map : three explicit formulas.* Documenta Mathematica Extra Volume : Kazuya Kato's Fiftieth Birthday (2003) 99–129.

[BLZ03] Berger L., Li H., Zhu H. J. : *Construction of some families of* 2*-dimensional crystalline representations.* Mathematische Annalen 329 (2004), no. 2, 365–377.

[BC03] Berger L., Colmez P. : *Familles de représentations p-adiques.* En préparation.

[Br99] Breuil C. : *Une remarque sur les représentations locales p-adiques et les congruences entre formes modulaires de Hilbert.* Bull. Soc. Math. France 127 (1999), no. 3, 459–472.

[Br00] Breuil C. : *Groupes p-divisibles, groupes finis et modules filtrés.* Ann. of Math. (2) 152 (2000), no. 2, 489–549.

[Col98] Colmez P. : *Théorie d'Iwasawa des représentations de de Rham d'un corps local.* Ann. of Math. 148 (1998), 485–571.

[Col99] Colmez P. : *Représentations cristallines et représentations de hauteur finie.* J. Reine Angew. Math. 514 (1999), 119–143.

[Col02] Colmez P. : *Espaces de Banach de dimension finie.* J. Inst. Math. Jussieu 1 (2002), no. 3, 331–439.

[CF00] Colmez P., Fontaine J-M. : *Constructions des représentations p-adiques semi-stables.* Invent. Math. 140 (2000) 1–43.

[Fon88a] Fontaine J-M. : *Le corps des périodes p-adiques.* Périodes p-adiques (Bures-sur-Yvette, 1988), Astérisque 223 (1994) 59–111.

[Fon88b] Fontaine J-M. : *Représentations p-adiques semi-stables.* Périodes p-adiques, (Bures-sur-Yvette, 1988), Astérisque 223 (1994) 113–184.

[Fon91] Fontaine J-M. : *Représentations p-adiques des corps locaux I.* The Grothendieck Festschrift, Vol. II, 249–309, Progr. Math. 87, Birkhäuser Boston, Boston, MA 1990.

[Fon96] Fontaine J-M. : *Deforming semistable Galois representations.* Elliptic curves and modular forms (Washington, DC, 1996). Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 94 (1997), no. 21, 11138–11141.

[FL82] Fontaine J-M., Laffaille G. : *Construction de représentations p-adiques.* Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 15 (1982), no. 4, 547–608 (1983).

[FW79] Fontaine J-M., Wintenberger J-P. : *Le « corps des normes » de certaines extensions algébriques de corps locaux.* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B 288 (1979), no. 6, A367–A370.

[Laf80] Laffaille G. : *Groupes p-divisibles et modules filtrés : le cas peu ramifié.* Bull. Soc. Math. France 108 (1980), no. 2, 187–206.

[Laz62] Lazard M. : *Les zéros des fonctions analytiques d'une variable sur un corps valué complet.* Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. 14 1962 47–75.

[Pol03] Pollack R. : *On the p-adic L-function of a modular form at a supersingular prime.* Duke Math. J. 118 (2003), no. 3, 523–558.

[Sen80] Sen S. : *Continuous cohomology and p-adic Galois representations.* Invent. Math. 62 (1980/81) 89–116.

[Wa96] Wach N. : *Représentations p-adiques potentiellement cristallines.* Bull. Soc. Math. France 124 (1996), 375–400.

[Wa97] Wach N. : *Représentations cristallines de torsion.* Compositio Math. 108 (1997) 185–240.

[Win83] Wintenberger J-P. : *Le corps des normes de certaines extensions infinies des corps locaux ; applications.* Ann. Sci. École Norm. Sup. 16 (1983), 59–89.

Novembre 2004

LAURENT BERGER