REPRÉSENTATIONS DE DE RHAM ET NORMES UNIVERSELLES

par

Laurent Berger

Résumé. — On calcule le module des normes universelles pour une représentation p-adique de de Rham. Le calcul utilise la théorie des (φ, Γ)-modules (la formule de réciprocité de Cherbonnier-Colmez) et l'équation différentielle associée à une représentation de de Rham.

***Abstract* (De Rham representations and universal norms).** — We compute the module of universal norms for a de Rham p-adic representation. The computation uses the theory of (φ, Γ)-modules (Cherbonnier-Colmez's reciprocity formula) and the differential equation attached to a de Rham representation.

Table des matières

Introduction

Dans tout cet article, p est un nombre premier, k est un corps parfait de caractéristique p, et K est une extension finie du corps des fractions F de l'anneau des vecteurs de Witt

***Classification mathématique par sujets* (2000).** — 11F80, 11R23, 11S25, 12H25, 14F30.
Mots clefs. — Représentations p-adiques, normes universelles, théorie d'Iwasawa.

sur k. On se fixe une clôture algébrique $\overline{K}$ de K, et on pose $G_K = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$. Rappelons qu'en utilisant l'anneau de périodes p-adiques $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$, Fontaine a défini la notion de représentation de *de Rham* de G_K. Si V est une telle représentation et si L est une extension finie de K, on définit $H^1_g(L,V)$ comme étant l'ensemble des classes de cohomologie qui déterminent une extension $0 \to V \to E \to \mathbf{Q}_p \to 0$ de représentations de G_L telle que E est une représentation de de Rham de G_L.

On écrit $\mu_{p^n} \subset \overline{K}$ pour désigner l'ensemble des racines p^n-èmes de l'unité, et on définit $K_n = K(\mu_{p^n})$ ainsi que $K_\infty = \cup_{n=0}^{+\infty} K_n$. On pose $H_K = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K_\infty)$ et $\Gamma_K = \mathrm{Gal}(K_\infty/K)$. L'algèbre d'Iwasawa est l'algèbre de groupe complétée $\Lambda_K = \mathbf{Z}_p[[\Gamma_K]]$.

La cohomologie d'Iwasawa de V est définie par $H^1_{\mathrm{Iw}}(K,V) = \mathbf{Q}_p \otimes_{\mathbf{Z}_p} H^1_{\mathrm{Iw}}(K,T)$ où T est un réseau de V stable par G_K et $H^1_{\mathrm{Iw}}(K,T) = \varprojlim_n H^1(K_n,T)$ est la limite projective pour les applications « corestriction » ce qui fait de $H^1_{\mathrm{Iw}}(K,V)$ un $\mathbf{Q}_p \otimes_{\mathbf{Z}_p} \Lambda_K$-module. Par construction, on a des applications $\mathrm{pr}_{K_n,V} : H^1_{\mathrm{Iw}}(K,V) \to H^1(K_n,V)$ et l'objet de cet article est l'étude du module $H^1_{\mathrm{Iw}}(K,V)_g$ des « normes universelles », l'ensemble des $y \in H^1_{\mathrm{Iw}}(K,V)$ tels que pour tout $n \geqslant 0$ on ait $\mathrm{pr}_{K_n,V}(y) \in H^1_g(K_n,V)$.

Si $\mathrm{Fil}^1 V$ est la plus grande sous-représentation de V dont tous les poids de Hodge-Tate sont $\geqslant 1$, alors $\mathrm{Fil}^1 V$ est de de Rham et on peut montrer que $H^1_{\mathrm{Iw}}(K,\mathrm{Fil}^1 V)_g = H^1_{\mathrm{Iw}}(K,\mathrm{Fil}^1 V)$. Le résultat principal de cet article est le suivant :

Théorème A. — *Si V est une représentation de de Rham, alors*

(1) *si V n'a pas de sous-quotient fixé par H_K, alors on a $H^1_{\mathrm{Iw}}(K,V)_g = H^1_{\mathrm{Iw}}(K,\mathrm{Fil}^1 V)$;*

(2) *en général, $H^1_{\mathrm{Iw}}(K,\mathrm{Fil}^1 V) \subset H^1_{\mathrm{Iw}}(K,V)_g$ et le quotient est un $\mathbf{Q}_p \otimes_{\mathbf{Z}_p} \Lambda_K$-module de torsion (c'est en fait un $\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel de dimension finie).*

La démonstration est très similaire à celle qu'en a donnée Perrin-Riou dans [**Per00**] pour les représentations cristallines, et dans [**Per01**] pour les représentations semi-stables, du groupe de Galois d'un corps non-ramifié mais au lieu d'utiliser son « Exponentielle élargie », on utilise les constructions de [**Ber02**] (qui redonnent l'exponentielle élargie d'ailleurs, comme on le montre dans [**Ber03**]) et au lieu d'utiliser des considérations de « cran de la filtration » et d'ordre, on utilise la théorie des (φ,Γ)-modules qui encodent toutes ces informations. Cela simplifie la démonstration de Perrin-Riou et nous permet de plus de l'étendre au cas des représentations de de Rham du groupe de Galois d'un corps éventuellement ramifié. Remarquons que l'on n'utilise pas le fait que les représentations de de Rham sont potentiellement semi-stables.

Indiquons brièvement d'où provient cette conjecture. On renvoie à l'article [**Per00**] de Perrin-Riou pour plus d'informations. Si E est une courbe elliptique définie sur K, on s'intéresse au module des « normes universelles » $\mathcal{N}_{K_\infty/K}(E) = \varprojlim E(K_n)$, limite projective pour les applications $\mathrm{Tr}_{K_n/K_{n-1}}$. Le calcul de ce module a été fait (pour une courbe elliptique, une variété abélienne ou même un groupe formel, et pour une $\mathbf{Z}_p$-extension quelconque) dans certains cas par Mazur [**Maz72**], puis par Hazewinkel [**Haz74, Haz77**], Schneider [**Sch87**] et Perrin-Riou [**Per92**] entre autres. Dans [**CG96**], Coates et Greenberg ont formulé une conjecture assez générale décrivant le module des normes universelles. La formulation du résultat que nous démontrons est due à Nekovář et concerne les normes universelles dans l'extension cyclotomique pour une représentation p-adique de de Rham. Si on l'applique au module de Tate d'une courbe elliptique E, définie sur une extension finie K de $\mathbf{Q}_p$, on retrouve, via la théorie de Kummer, certains résultats des auteurs cités précédemment : si E est ordinaire, alors $\mathcal{N}_{K_\infty/K}(E)$ est un Λ_K-module de rang $[K : \mathbf{Q}_p]$ et si E est supersingulière, alors il est nul.

Remerciements : Je remercie Pierre Colmez pour ses nombreuses suggestions, de la démonstration du théorème principal à la rédaction finale de cet article. Je remercie aussi Jan Nekovář pour ses encouragements et ses commentaires, ainsi que le referee pour ses remarques pertinentes qui ont permis d'améliorer la clarté de cet article.

I. Algèbre différentielle des (φ, Γ)-modules

L'objet de ce premier chapitre est de rappeler et compléter certains points de la théorie des (φ, Γ)-modules. Ensuite, on résout un problème d'algèbre différentielle. Dans le deuxième chapitre, on verra comment cela s'applique aux représentations p-adiques.

I.1. Les (φ, Γ)-modules. — Dans tout cet article, k désigne un corps parfait de caractéristique p, et K est une extension finie de F, le corps des fractions de l'anneau des vecteurs de Witt sur k. On écrit $\mu_{p^n} \subset \overline{K}$ pour désigner l'ensemble des racines p^n-èmes de l'unité, et on définit $K_n = K(\mu_{p^n})$ ainsi que $K_\infty = \cup_{n=0}^{+\infty} K_n$. Soient $G_K = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ et $H_K = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K_\infty)$ le noyau du caractère cyclotomique $\chi : G_K \to \mathbf{Z}_p^*$ et $\Gamma_K = G_K/H_K$ le groupe de Galois de K_∞/K, qui s'identifie via le caractère cyclotomique à un sous-groupe ouvert de $\mathbf{Z}_p^*$. Enfin, soit F' l'extension maximale non-ramifiée de F contenue dans K_∞ et k' le corps résiduel de F'. On note σ le Frobenius absolu (qui relève $x \mapsto x^p$ sur k').

Définissons ici quelques anneaux de séries formelles (ces constructions sont faites en détail dans [**Col03**]) : si r est un réel positif, soit $\mathbf{B}_F^{\dagger,r}$ l'anneau des séries formelles $f(X) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} a_k X^k$ où $\{a_k \in F\}_{k\in\mathbf{Z}}$ est une suite bornée telle que $f(X)$ converge sur la couronne $0 < v_p(X) \leqslant 1/r$. Cet anneau est muni d'une action de Γ_F, qui est triviale sur les coefficients et donnée par $\gamma(X) = (1+X)^{\chi(\gamma)} - 1$ et on peut définir un Frobenius

$\varphi : \mathbf{B}_F^{\dagger,r} \to \mathbf{B}_F^{\dagger,pr}$ qui est σ-semi-linéaire sur les coefficients et tel que $\varphi(X) = (1+X)^p - 1$. Le « théorème de préparation de Weierstrass » montre que $\mathbf{B}_F^{\dagger} = \cup_{r\geqslant 0}\mathbf{B}_F^{\dagger,r}$ est un corps. Ce corps n'est pas complet pour la norme de Gauss et on appelle $\mathbf{B}_F$ son complété qui est un corps local de dimension 2 dont le corps résiduel s'identifie à $k((\overline{X}))$.

L'extension K_∞/F_∞ est une extension finie de degré de ramification $e_K \leqslant [K_\infty : F_\infty]$ et par la théorie du corps de normes de [**FW79, Win83**] il lui correspond une extension séparable $k'((\overline{Y}))/k((\overline{X}))$ de degré $[K_\infty : F_\infty]$ qui nous permet de définir des extensions non-ramifiées $\mathbf{B}_K/\mathbf{B}_F$ et $\mathbf{B}_K^{\dagger}/\mathbf{B}_F^{\dagger}$ de degré $[K_\infty : F_\infty]$. On peut montrer que $\mathbf{B}_K^{\dagger} = \cup_{r\geqslant 0}\mathbf{B}_K^{\dagger,r}$ où $\mathbf{B}_K^{\dagger,r}$ est un $\mathbf{B}_F^{\dagger,r}$-module libre de rang $[K_\infty : F_\infty]$ qui s'identifie à un anneau de séries formelles $f(Y) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} a_k Y^k$ où $\{a_k \in F'\}_{k\in\mathbf{Z}}$ est une suite bornée telle que $f(Y)$ converge sur la couronne $0 < v_p(Y) \leqslant 1/e_K r$. L'élément $\overline{Y}$ vérifie une équation d'Eisenstein sur $k'((\overline{X}))$ qu'on peut relever en une équation sur $\mathbf{B}_{F'}^{\dagger,r}$; l'action de Γ_K s'étend naturellement à $\mathbf{B}_K^{\dagger,r}$ de même que le Frobenius $\varphi : \mathbf{B}_K^{\dagger,r} \to \mathbf{B}_K^{\dagger,pr}$.

Un (φ,Γ)-module est un $\mathbf{B}_K^{\dagger}$-espace vectoriel $D^\dagger$ de dimension finie, muni d'un Frobenius $\varphi : D^\dagger \to D^\dagger$ et d'une action de Γ_K qui sont semi-linéaires par rapport à ceux de $\mathbf{B}_K^{\dagger}$. On dit que $D^\dagger$ est *étale* si $D = \mathbf{B}_K \otimes_{\mathbf{B}_K^{\dagger}} D^\dagger$ possède un réseau D_0 stable par φ sur l'anneau des entiers $\mathbf{A}_K$ de $\mathbf{B}_K$, tel que $\varphi(D_0)$ engendre D_0 sur $\mathbf{A}_K$.

Définissons l'opérateur $\psi : D^\dagger \to D^\dagger$ qui nous servira dans la suite. On peut montrer que tout élément $x \in D^\dagger$ s'écrit de manière unique sous la forme $x = \sum_{i=0}^{p-1}(1+X)^i\varphi(x_i)$.

Définition I.1.1. — Si $x = \sum_{i=0}^{p-1}(1+X)^i\varphi(x_i)$, alors on pose $\psi(x) = x_0$.

Ceci fait de ψ un inverse à gauche de φ qui commute à l'action de Γ_K et qui vérifie $\psi(\varphi(x)y) = x\psi(y)$ si $x \in \mathbf{B}_K^{\dagger}$ et $y \in D^\dagger$.

Il existe $r(K)$ tel que si $p^{n-1}(p-1) \geqslant r \geqslant r(K)$, alors on a une application injective $\iota_n : \mathbf{B}_K^{\dagger,r} \to K_n[[t]]$ (c'est l'application φ^{-n} de [**CC99**, §III.2]). Par exemple si $K = F$, alors $\iota_n(X) = \varepsilon^{(n)}\exp(t/p^n) - 1$ où $\varepsilon^{(n)}$ est une racine primitive p^n-ème de 1 et ι_n agit par σ^{-n} sur les coefficients.

On peut montrer (voir pour cela [**Che96**]) que l'ensemble des sous $\mathbf{B}_K^{\dagger,r}$-modules de type fini M de $D^\dagger$ tels que $\varphi(M) \subset \mathbf{B}_K^{\dagger,pr} \otimes_{\mathbf{B}_K^{\dagger,r}} M$ admet un plus grand élément $D^{\dagger,r}$ et qu'il existe $r(D)$ que l'on peut supposer $\geqslant r(K)$ tel que si $r \geqslant r(D)$, alors $D^\dagger = \mathbf{B}_K^{\dagger} \otimes_{\mathbf{B}_K^{\dagger,r}} D^{\dagger,r}$. On utilise alors l'application ι_n pour définir $K_n[[t]] \otimes_{\mathbf{B}_K^{\dagger,r}}^{\iota_n} D^{\dagger,r}$ et $K_n((t)) \otimes_{\mathbf{B}_K^{\dagger,r}}^{\iota_n} D^{\dagger,r}$.

Le lemme suivant sera utile par la suite :

Lemme I.1.2. — *Si $y \in (D^\dagger)^{\psi=1}$, alors il existe $P(\gamma) \in F'[\Gamma_K]$ tel que $P(\gamma)y = 0$ si et seulement si $y \in (D^\dagger)^{\varphi=1}$.*

Démonstration. — Un petit calcul montre que $(D^\dagger)^{\varphi=1}$ est un $\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel de dimension $\leqslant \dim(D^\dagger)$ (il suffit de remarquer que des éléments de $(D^\dagger)^{\varphi=1}$ qui sont liés sur $\mathbf{B}_K^\dagger$ le sont sur $\mathbf{Q}_p = (\mathbf{B}_K^\dagger)^{\varphi=1}$) qui est stable par Γ_K (puisque φ commute à l'action de Γ_K) et donc qu'il existe $P(\gamma) \in \mathbf{Q}_p[\Gamma_K]$ en fait tel que $P(\gamma)$ annule $(D^\dagger)^{\varphi=1}$. Montrons donc la réciproque.

Supposons que $(\sum a_i \gamma^i) y = 0$ est une relation de longueur minimale avec $a_i \in F'$. On peut supposer que l'un des a_i est égal à 1. En appliquant ψ et en utilisant le fait que d'une part $\psi(y) = y$ et que d'autre part ψ commute à l'action de Γ_K et agit par σ^{-1} sur F', on voit que $a_i \in \mathbf{Q}_p$ pour tout i et on suppose donc à partir de maintenant que $P(\gamma) \in \mathbf{Q}_p[\Gamma_K]$.

Nous utiliserons ci-dessous le résultat suivant : si $P(\gamma) \in \mathbf{Q}_p[\Gamma_K]$, alors il existe une constante $C(P,d)$ telle que pour tout M qui est un $K_\infty[[t]]$-module libre de rang d, muni d'une action semi-linéaire de Γ_K par automorphismes, le F-espace vectoriel $M^{P(\gamma)=0}$ est de dimension $\leqslant C(P,d)$.

Fixons $r \geqslant r(D)$ et considérons, pour n tel que $p^{n-1}(p-1) \geqslant r$, le $K_n[[t]]$-module libre de rang d défini ci-dessus : $K_n[[t]] \otimes^{\iota_n}_{\mathbf{B}_K^{\dagger,r}} D^{\dagger,r}$. On voit que l'on a une injection :

$$(D^{\dagger,r})^{P(\gamma)=0} \hookrightarrow \left(K_\infty[[t]] \otimes_{K_n[[t]]} K_n[[t]] \otimes^{\iota_n}_{\mathbf{B}_K^{\dagger,r}} D^{\dagger,r}\right)^{P(\gamma)=0},$$

ce qui fait que $(D^{\dagger,r})^{P(\gamma)=0}$ est un F-espace vectoriel de dimension $\leqslant C(P,d)$ et donc que $(D^\dagger)^{P(\gamma)=0} = \cup_{r \geqslant r(D)} (D^{\dagger,r})^{P(\gamma)=0}$ est un F-espace vectoriel de dimension $\leqslant C(P,d)$. Comme φ commute à $P(\gamma)$, $(D^\dagger)^{P(\gamma)=0}$ est un F-espace vectoriel de dimension finie et stable par φ ce qui fait que $\varphi : (D^\dagger)^{P(\gamma)=0} \to (D^\dagger)^{P(\gamma)=0}$ est bijectif.

Si $z \in (D^\dagger)^{\psi=0, P(\gamma)=0}$, alors on en déduit que $z = \varphi(w)$ pour un $w \in (D^\dagger)^{P(\gamma)=0}$ et donc $0 = \psi(z) = w$ ce qui fait que $z = 0$ et donc que $(D^\dagger)^{\psi=0,P(\gamma)=0} = 0$ (ceci généralise un résultat de [**CC98**]). Pour conclure, il suffit de remarquer que si $\psi(y) = y$ et $P(\gamma)(y) = 0$, alors $\psi(1-\varphi)y = 0$ et donc $y = \varphi(y)$. □

I.2. (φ,Γ)**-modules de de Rham.** — Dans ce paragraphe, on définit les (φ,Γ)-modules de de Rham et on rappelle certains des résultats de [**Ber02**, §5] à leur sujet.

Définition I.2.1. — On dit qu'un (φ,Γ)-module $D^\dagger$ est de *de Rham*, si et seulement s'il existe $r \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$ avec $p^{n-1}(p-1) \geqslant r \geqslant r(D)$, tels que le K-espace vectoriel

$$\left(K_n((t)) \otimes^{\iota_n}_{\mathbf{B}_K^{\dagger,r}} D^{\dagger,r}\right)^{\Gamma_K}$$

est de dimension $d = \dim(D^\dagger)$.

Si c'est le cas, alors $(K_n((t)) \otimes^{\iota_n}_{\mathbf{B}_K^{\dagger,r}} D^{\dagger,r})^{\Gamma_K}$ est de dimension $d = \dim(D^\dagger)$ pour tous les $r \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$ tels que $p^{n-1}(p-1) \geqslant r \geqslant r(D)$.

Nous allons rappeler les résultats de [**Ber02**, §4 et 5] qui permettent de donner une autre caractérisation des (φ, Γ)-modules de de Rham. Ces résultats sont aussi expliqués dans le « séminaire Bourbaki » [**Col01**].

L'anneau $\mathbf{B}_K^{\dagger,r}$ s'identifiant à un anneau de séries formelles convergeant sur une couronne, il est naturellement muni d'une topologie de Fréchet, la topologie de la « convergence compacte », et son complété $\mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}^{\dagger,r}$ pour cette topologie s'identifie à l'anneau de séries formelles $f(Y) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} a_k Y^k$ où $\{a_k \in F'\}_{k\in\mathbf{Z}}$ est une suite non nécessairement bornée telle que $f(Y)$ converge sur la couronne $0 < v_p(Y) \leqslant 1/e_K r$. Par exemple, si on pose $t = \log(1+X)$, alors $t \in \mathbf{B}_{\mathrm{rig},F}^{\dagger,r} \subset \mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}^{\dagger,r}$ pour tout $r \geqslant 0$. L'anneau $\mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}^{\dagger} = \cup_{r\geqslant 0}\mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}^{\dagger,r}$ est « l'anneau de Robba ». Certaines propriétés de ces anneaux ont été étudiées dans [**Ber02**, §4] et nous allons rappeler quelques-uns des résultats qui nous seront utiles dans la suite.

L'application ι_n se prolonge en une application injective $\iota_n : \mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}^{\dagger,r} \to K_n[[t]]$. L'action de Γ_K sur $\mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}^{\dagger,r}$ s'étend en une action de l'algèbre de Lie de Γ_K donnée par $\nabla(f) = \log(\gamma)(f)/\log_p(\chi(\gamma))$ pour $\gamma \in \Gamma_K$ assez proche de 1. Si $f = f(X) \in \mathbf{B}_{\mathrm{rig},F}^{\dagger,r}$ alors $\nabla(f(X)) = t(1+X)df/dX$. Si $f \in \mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}^{\dagger,r}$ alors on pose $\partial(f) = t^{-1}\nabla(f)$ ce qui fait que si $f = f(X) \in \mathbf{B}_{\mathrm{rig},F}^{\dagger,r}$ alors $\partial(f(X)) = (1+X)df/dX$ et que si $f \in \mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}^{\dagger}$ vérifie une équation algébrique $P(f) = 0$ sur $\mathbf{B}_{\mathrm{rig},F}^{\dagger}$ telle que $P'(f) \neq 0$, alors on peut aussi calculer $\partial(f)$ par la formule $\partial(f) = -(\partial P)(f)/P'(f)$. En particulier $\partial(f) = 0$ si et seulement si $f \in F'$.

Si $D^\dagger$ est un (φ, Γ)-module, on définit $D_{\mathrm{rig}}^{\dagger}$ par $D_{\mathrm{rig}}^{\dagger} = \mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}^{\dagger} \otimes_{\mathbf{B}_K^\dagger} D^\dagger$ et $D_{\mathrm{rig}}^{\dagger,r}$ par $D_{\mathrm{rig}}^{\dagger,r} = \mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}^{\dagger,r} \otimes_{\mathbf{B}_K^{\dagger,r}} D^{\dagger,r}$. L'application $\iota_n : \mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}^{\dagger,r} \to K_n[[t]]$ nous permet alors de définir $\iota_n : D_{\mathrm{rig}}^{\dagger,r} \to K_n[[t]] \otimes_{\mathbf{B}_K^{\dagger,r}}^{\iota_n} D^{\dagger,r}$.

Enfin, l'algèbre de Lie de Γ_K agit naturellement sur $D_{\mathrm{rig}}^{\dagger}$ par la formule $\nabla_D(x) = \log(\gamma)(x)/\log_p(\chi(\gamma))$ pour $\gamma \in \Gamma_K$ assez proche de 1 et on a donc aussi une application $\partial_D = t^{-1}\nabla_D : D_{\mathrm{rig}}^{\dagger} \to t^{-1}D_{\mathrm{rig}}^{\dagger}$. La proposition suivante se démontre exactement de la même manière que [**Ber02**, théorème 5.10].

Proposition I.2.2. — *Si $D^\dagger$ est de de Rham, si $r \geqslant r(D)$, et si N_r est l'ensemble des $x \in D_{\mathrm{rig}}^{\dagger,r}[1/t]$ tels que pour tout n tel que $p^{n-1}(p-1) \geqslant r$, on ait*

$$\iota_n(x) \in K_n[[t]] \otimes_K (K_n((t)) \otimes_{\mathbf{B}_K^{\dagger,r}}^{\iota_n} D^{\dagger,r})^{\Gamma_K},$$

et si on pose $N = \mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}^{\dagger} \otimes_{\mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}^{\dagger,r}} N_r$, alors N est un $\mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}^{\dagger}$-module libre de rang d stable par les actions induites de φ et de Γ_K, tel que $\partial_D(N) \subset N$ et tel que $N[1/t] = D_{\mathrm{rig}}^{\dagger}[1/t]$.

Nous établirons quelques propriétés de N dans le paragraphe II.1.

Remarque I.2.3. — Donnons nous une variable ℓ_Y sur laquelle on fait agir $\gamma \in \Gamma_K$ par $\gamma(\ell_Y) = \ell_Y + \log(\gamma(Y)/Y)$. Si $d = \dim(D^\dagger)$, alors on dit que le (φ, Γ)-module $D^\dagger$ est

(1) *cristallin*, si $(D^\dagger_{\mathrm{rig}}[1/t])^{\Gamma_K}$ est un F-espace vectoriel de dimension d ;

(2) *semi-stable*, si $(D^\dagger_{\mathrm{rig}}[\ell_Y][1/t])^{\Gamma_K}$ est un F-espace vectoriel de dimension d.

Il n'est pas difficile de voir que « cristallin » implique « semi-stable » et que « semi-stable » implique « de de Rham » ; on a d'ailleurs dans ce cas

$$N = \left(\mathbf{B}^\dagger_{\mathrm{rig},K}[\ell_Y] \otimes_F (D^\dagger_{\mathrm{rig}}[\ell_Y][1/t])^{\Gamma_K}\right)^{d/d\ell_Y=0}.$$

De plus, le théorème de monodromie p-adique pour les équations différentielles (démontré indépendamment dans [**And01, Ked00, Meb01**]) montre que $D^\dagger$ est de de Rham si et seulement s'il existe une extension finie L de K telle que $\mathbf{B}^\dagger_L \otimes_{\mathbf{B}^\dagger_K} D^\dagger$ est semi-stable. Nous n'utiliserons pas cela dans le reste de cet article.

I.3. Algèbre différentielle. — On aura besoin dans la suite d'un argument qui est une variante du « déterminant Wronskien » et qui est l'objet de ce chapitre. Soient H un corps différentiel, dont on notera ∂ la dérivation, et k, s et v trois entiers $\geqslant 1$. On étend naturellement ∂ à $\partial : H^v \to H^v$. On se donne $s+1$ vecteurs $x_1, \cdots, x_{s+1} \in H^v$ qui satisfont les deux conditions ci-dessous :

(1) d'une part, les s vecteurs $X_w^{k-1} = (x_w, \partial x_w, \cdots, \partial^{k-1} x_w)$ pour $1 \leqslant w \leqslant s$ sont linéairement indépendants sur H ;

(2) d'autre part, les $s+1$ vecteurs $X_w^k = (x_w, \partial x_w, \cdots, \partial^k x_w)$ pour $1 \leqslant w \leqslant s+1$ sont linéairement dépendants sur H.

Proposition I.3.1. — *Sous les hypothèses ci-dessus, les $s+1$ vecteurs $\{X_w^k\}$ pour $1 \leqslant w \leqslant s+1$ sont linéairement dépendants sur $H^{\partial=0}$.*

Démonstration. — Comme on suppose que les X_w^k sont liés sur H, il existe des éléments $\lambda_1, \cdots, \lambda_{s+1} \in H$ tels que $\sum_{w=1}^{s+1} \lambda_w X_w^k = 0$, ce qui se traduit par le fait que pour tout $0 \leqslant i \leqslant k$, on a la relation :

$$(R_i) \qquad \sum_{w=1}^{s+1} \lambda_w \partial^i(x_w) = 0.$$

Comme on a supposé que les $\{X_w^{k-1}\}_{1 \leqslant w \leqslant s}$ sont libres, on voit que $\lambda_{s+1} \neq 0$ et on peut donc supposer que $\lambda_{s+1} = 1$ ce que l'on fait à partir de maintenant.

Si on dérive R_i, on trouve que

$$\sum_{w=1}^{s+1} \lambda_w \partial^{i+1}(x_w) + \sum_{w=1}^{s+1} \partial(\lambda_w) \partial^i(x_w) = 0.$$

Si $0 \leqslant i \leqslant k-1$, alors le premier terme de la relation ci-dessus est nul par R_{i+1} et on trouve que

$$\sum_{w=1}^{s+1} \partial(\lambda_w)\partial^i(x_w) = 0$$

pour $0 \leqslant i \leqslant k-1$ et donc que

$$\sum_{w=1}^{s} \partial(\lambda_w)\partial^i(x_w) = 0$$

pour $0 \leqslant i \leqslant k-1$ puisque $\lambda_{s+1} = 1$. Ceci nous donne une relation

$$\sum_{w=1}^{s} \partial(\lambda_w) X_w^{k-1} = 0$$

entre les $\{X_w^{k-1}\}_{1 \leqslant w \leqslant s}$ et comme on a supposé que ceux-ci sont libres, c'est que $\partial(\lambda_w) = 0$ pour tout $1 \leqslant w \leqslant s+1$.

On a donc montré que si les $\{X_w^k\}_{1 \leqslant w \leqslant s+1}$ sont liés sur H, alors ils sont liés sur $H^{\partial=0}$. $\square$

En considérant la première « composante » de X_w^k, on trouve :

Corollaire I.3.2. — *Sous les hypothèses ci-dessus, il existe des constantes $\lambda_w \in H^{\partial=0}$ pour $1 \leqslant w \leqslant s+1$, non toutes nulles, telles que*

$$\sum_{w=1}^{s+1} \lambda_w x_w = 0.$$

I.4. Normes universelles : (φ, Γ)-modules positifs. — Dans ce paragraphe, nous allons montrer la proposition suivante :

Proposition I.4.1. — *Soit $D^\dagger$ un (φ, Γ)-module de de Rham qui vérifie $D^\dagger \subset N$ et $D^\dagger \cap tN = 0$. Si $y \in D^\dagger$ et $k \geqslant 0$ sont tels que $\partial_D^k y \in tN$, alors il existe $P(\gamma) \in F'[\Gamma_K]$ tel que $P(\gamma)y = 0$.*

Démonstration. — Si $k = 0$, alors le fait que $D^\dagger \cap tN = 0$ implique immédiatement que $y = 0$. On suppose désormais que $k \geqslant 1$, et on se fixe $\gamma \in \Gamma_K$ d'ordre infini. Comme $D^\dagger$ est un $\mathbf{B}_K^\dagger$-espace vectoriel de dimension finie, il existe un entier $v \geqslant 1$ tel que $y, \gamma(y), \cdots, \gamma^{v-1}(y)$ sont libres sur $\mathbf{B}_K^\dagger$, mais $y, \gamma(y), \cdots, \gamma^v(y)$ sont liés sur $\mathbf{B}_K^\dagger$, ce qui fait que pour tout $w \geqslant v$, il existe des éléments $a_0^w, \cdots, a_{v-1}^w$ de $\mathbf{B}_K^\dagger$ tels que

$$\gamma^w(y) = \sum_{j=0}^{v-1} a_j^w \gamma^j(y) = a_0^w y + \cdots + a_{v-1}^w \gamma^{v-1}(y).$$

Si l'on dérive k fois la relation ci-dessus, on trouve que :

$$\partial_D^k(\gamma^w(y)) = \sum_{j=0}^{v-1} \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} \partial^i(a_j^w) \partial_D^{k-i}(\gamma^j(y)) + \sum_{j=0}^{v-1} \partial^k(a_j^w)\gamma^j(y).$$

Supposons que l'on se donne un entier $s \geqslant 1$ et des éléments $\mu_v, \cdots, \mu_{v+s}$ de $\mathbf{B}_K^\dagger$ tels que pour tout $0 \leqslant i \leqslant k-1$ et pour tout $0 \leqslant j \leqslant v-1$, on ait $\sum_{w=v}^{v+s} \mu_w \partial^i(a_j^w) = 0$. Bien sûr, de tels éléments (non tous nuls) existent si $s \gg 0$. On voit alors que

$$\sum_{w=v}^{v+s} \mu_w \partial_D^k(\gamma^w(y)) = \sum_{j=0}^{v-1} \left(\sum_{w=v}^{v+s} \mu_w \partial^k(a_j^w) \right) \gamma^j(y). \tag{1}$$

Montrons que cela implique que $\sum_{w=v}^{v+s} \mu_w \partial^i(a_j^w) = 0$ pour $i = k$ et pour $0 \leqslant j \leqslant v-1$, ce qui est équivalent au fait que les deux termes de l'équation (1) ci-dessus sont nuls.

On a $\partial_D^k(\gamma^w(y)) = \chi(\gamma)^{kw}\gamma^w(\partial_D^k(y)) \in tN$ et le terme de gauche de l'équation (1) est donc dans tN tandis que le terme de droite est dans $D^\dagger$ ce qui fait que les deux termes sont nuls puisqu'on a supposé que $D^\dagger \cap tN = 0$.

Pour $w \geqslant 1$, définissons $x_w = (a_0^{w+v-1}, \cdots, a_{v-1}^{w+v-1})$ ainsi que $X_w^{k-1} = (x_w, \cdots, \partial^{k-1} x_w)$ et $X_w^k = (x_w, \cdots, \partial^k x_w)$. Si $s \geqslant 1$ est le plus petit entier tel que les X_w^{k-1} pour $1 \leqslant w \leqslant s$ sont libres et les X_w^{k-1} pour $1 \leqslant w \leqslant s+1$ sont liés, alors les calculs précédents montrent *qu'en plus*, les X_w^k pour $1 \leqslant w \leqslant s+1$ sont *eux aussi* liés. On peut alors appliquer le corollaire I.3.2 pour en déduire l'existence de $\lambda_w \in (\mathbf{B}_K^\dagger)^{\partial=0} = F'$ pour $1 \leqslant w \leqslant s+1$ tels que

$$\sum_{w=1}^{s+1} \lambda_w x_w = 0.$$

Si l'on combine cela avec le fait que par définition, on a $\gamma^w(y) = a_0^w y + \cdots + a_{v-1}^w \gamma^{v-1}(y)$, on trouve que

$$\sum_{w=1}^{s+1} \lambda_w \gamma^{w+v-1}(y) = 0.$$

Ceci montre bien qu'il existe $P(\gamma) \in F'[\Gamma_K]$ tel que $P(\gamma)(y) = 0$. □

II. Représentations p-adiques et normes universelles

L'objet de ce chapitre est de montrer comment le résultat démontré au chapitre précédent (la proposition I.4.1) implique le théorème principal de cet article. Pour cela, on rappelle la correspondance entre représentations p-adiques et (φ, Γ)-modules, puis on utilise la formule de réciprocité de Cherbonnier-Colmez pour se ramener à la situation du chapitre précédent. On conclut par un argument de « dévissage ».

II.1. Représentations p-adiques et (φ, Γ)-modules. — Une représentation p-adique est un $\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel V de dimension finie $d = \dim_{\mathbf{Q}_p}(V)$, muni d'une action linéaire et continue de G_K. Afin d'étudier les représentations p-adiques, Fontaine a construit (voir [**Fo88a**] par exemple) un certains nombre d'anneaux de périodes

p-adiques, ce qui conduit à la définition des représentations *cristallines*, *semi-stables* ou de *de Rham*.

D'autre part, en combinant les constructions de Fontaine (voir [**Fon91**]) et un théorème de Cherbonnier-Colmez (voir [**CC98**]), on définit un foncteur $V \mapsto \mathbf{D}^\dagger(V)$ qui induit une équivalence de catégories entre la catégorie des représentations p-adiques et la catégorie des (φ,Γ)-modules étales. Si par exemple H_K agit trivialement sur V, alors $\mathbf{D}^\dagger(V) = \mathbf{B}_K^\dagger \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$ et on récupère V à partir de $\mathbf{D}^\dagger(V)$ par $V = \mathbf{D}^\dagger(V)^{\varphi=1}$. En général, la situation est plus compliquée mais on peut quand même montrer que $\mathbf{D}^\dagger(V)^{\varphi=1} = V^{H_K}$ ce dont nous aurons besoin par la suite. Comme au paragraphe I.2, on pose $\mathbf{D}^\dagger_{\mathrm{rig}}(V) = \mathbf{B}^\dagger_{\mathrm{rig},K} \otimes_{\mathbf{B}_K^\dagger} \mathbf{D}^\dagger(V)$.

Rappelons que pour un (φ,Γ)-module $D^\dagger$, on a défini au paragraphe I.1 un réel $r(D)$ tel que si $r \geqslant r(D)$, alors $D^\dagger = \mathbf{B}_K^\dagger \otimes_{\mathbf{B}_K^{\dagger,r}} D^{\dagger,r}$ et on posera dans la suite $r(V) = r(\mathbf{D}^\dagger(V))$. Dans [**CC99**], Cherbonnier et Colmez montrent que si V est une représentation p-adique, et si $p^{n-1}(p-1) \geqslant r \geqslant r(V)$, alors $\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V) = (K_n((t)) \otimes^{\iota_n}_{\mathbf{B}_K^{\dagger,r}} \mathbf{D}^{\dagger,r}(V))^{\Gamma_K}$ et donc que V est de de Rham si et seulement si $\mathbf{D}^\dagger(V)$ est de de Rham au sens de la définition I.2.1. On dispose alors de l'équation différentielle p-adique $\mathbf{N}_{\mathrm{dR}}(V)$ qui est le module N dont on a rappelé la construction dans la proposition I.2.2 et donc aussi des applications $\iota_n : \mathbf{D}^{\dagger,r}(V) \to K_n((t)) \otimes_K \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V)$.

Remarque II.1.1. — Dans [**Ber02**], on montre par ailleurs qu'une représentation V est cristalline (ou semi-stable) si et seulement si son (φ,Γ)-module $\mathbf{D}^\dagger(V)$ est cristallin (ou semi-stable). On retrouve alors les invariants associés à V par la théorie de Hodge p-adique de la manière suivante : $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V) = (\mathbf{D}^\dagger_{\mathrm{rig}}(V)[1/t])^{\Gamma_K}$ et $\mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V) = (\mathbf{D}^\dagger_{\mathrm{rig}}(V)[\ell_Y][1/t])^{\Gamma_K}$.

Nous allons avoir besoin de quelques résultats concernant $\mathbf{N}_{\mathrm{dR}}(V)$, et on suppose à partir de maintenant que V est de de Rham. Nous utiliserons ci-dessous le fait que les poids de Hodge-Tate de V sont positifs si et seulement si $\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V \subset \mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}} \otimes_K \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V)$.

Lemme II.1.2. — *Si V est une représentation de de Rham, dont les poids de Hodge-Tate sont $\geqslant 0$, alors $\mathbf{D}^\dagger(V) \subset \mathbf{N}_{\mathrm{dR}}(V)$ et si $\mathbf{D}^\dagger(V) \subset t^h\mathbf{N}_{\mathrm{dR}}(V)$ avec $h \geqslant 0$, alors les poids de Hodge-Tate de V sont $\geqslant h$.*

Démonstration. — Étant donnée la construction de $N = \mathbf{N}_{\mathrm{dR}}(V)$ que l'on a donnée dans la proposition I.2.2, on voit qu'il suffit pour montrer le premier point de montrer que si $r \geqslant r(V)$ et $y \in \mathbf{D}^{\dagger,r}(V)$ et si $p^{n-1}(p-1) \geqslant r$, alors $\iota_n(y) \in K_n[[t]] \otimes_K \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V)$. On sait par les constructions de [**Ber02**, §5] que $\iota_n(y) \in \mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$ et le résultat suit du fait que si les poids de Hodge-Tate de V sont $\geqslant 0$, alors $\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V \subset \mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}} \otimes_K \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V)$.

D'autre part, la démonstration de [**Ber02**, proposition 5.15] montre que le $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{+}$-module engendré par $\iota_n(N_r)$ est $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{+} \otimes_K \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V)$. De même, le $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{+}$-module engendré par $\iota_n(\mathbf{D}^{\dagger,r}(V))$ est $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{+} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$ et la deuxième assertion suit du fait que si $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{+} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V \subset t^h \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{+} \otimes_K \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V)$, alors les poids de Hodge-Tate de V sont $\geqslant h$. □

Lemme II.1.3. — *Si V est une représentation de de Rham dont les poids de Hodge-Tate sont $\geqslant 0$ et si W est une sous-représentation de V, alors $\mathbf{N}_{\mathrm{dR}}(W) = \mathbf{D}_{\mathrm{rig}}^{\dagger}(W) \cap \mathbf{N}_{\mathrm{dR}}(V)$.*

Démonstration. — On voit que le sous $\mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}^{\dagger}$-module $\mathbf{D}_{\mathrm{rig}}^{\dagger}(W) \cap \mathbf{N}_{\mathrm{dR}}(V)$ de $\mathbf{D}_{\mathrm{rig}}^{\dagger}(W)$ est libre de rang $\dim(W)$ (parce que $\mathbf{N}_{\mathrm{dR}}(V)[1/t] = \mathbf{D}_{\mathrm{rig}}^{\dagger}(V)[1/t]$) et est stable par $t^{-1}\nabla_W$ (qui coïncide avec l'opérateur induit par $t^{-1}\nabla_V$), ce qui fait que $\mathbf{N}_{\mathrm{dR}}(W) = \mathbf{D}_{\mathrm{rig}}^{\dagger}(W) \cap \mathbf{N}_{\mathrm{dR}}(V)$ par définition de $\mathbf{N}_{\mathrm{dR}}(W)$ (voir [**Ber02**, théorème 5.10]). □

Soit $\mathrm{Fil}^h V$ la plus grande sous-représentation de V dont les poids de Hodge-Tate sont $\geqslant h$.

Lemme II.1.4. — *Si V est une représentation de de Rham dont les poids de Hodge-Tate sont $\geqslant 0$ et $h \geqslant 0$, alors $\mathbf{D}^{\dagger}(V) \cap t^h \mathbf{N}_{\mathrm{dR}}(V) = \mathbf{D}^{\dagger}(\mathrm{Fil}^h V)$.*

Démonstration. — Le lemme II.1.2 appliqué à $(\mathrm{Fil}^h V)(-h)$ implique que l'on a $\mathbf{D}^{\dagger}(\mathrm{Fil}^h V) \subset \mathbf{D}^{\dagger}(V) \cap t^h \mathbf{N}_{\mathrm{dR}}(V)$. Montrons l'inclusion réciproque. Si $z \in \mathbf{D}^{\dagger}(V) \cap t^h \mathbf{N}_{\mathrm{dR}}(V)$, alors on voit que l'intersection $\mathbf{D}^{\dagger}(z)$ des sous $\mathbf{B}_K^{\dagger}$-espaces vectoriels de $\mathbf{D}^{\dagger}(V)$ stables par φ et Γ_K et contenant z vérifie $\mathbf{D}^{\dagger}(z) \subset t^h \mathbf{N}_{\mathrm{dR}}(V)$. La proposition [**Fon91**, 1.1.6] implique d'autre part que $\mathbf{D}^{\dagger}(z)$ est un sous (φ, Γ)-module étale de $\mathbf{D}^{\dagger}(V)$ et donc qu'il existe une représentation p-adique $V_z \subset V$ telle que $\mathbf{D}^{\dagger}(z) = \mathbf{D}^{\dagger}(V_z)$. On voit alors que $\mathbf{D}^{\dagger}(V_z) \subset t^h \mathbf{N}_{\mathrm{dR}}(V) \cap \mathbf{D}_{\mathrm{rig}}^{\dagger}(V_z) = t^h \mathbf{N}_{\mathrm{dR}}(V_z)$ par le lemme II.1.3 et donc que les poids de Hodge-Tate de V_z sont tous $\geqslant h$. Ceci montre bien que $\mathbf{D}^{\dagger}(V) \cap t^h \mathbf{N}_{\mathrm{dR}}(V) \subset \mathbf{D}^{\dagger}(\mathrm{Fil}^h V)$. □

Rappelons que l'on a une application $\iota_n : \mathbf{D}^{\dagger,r}(V) \to K_n((t)) \otimes_K \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V)$ et on en déduit une application

$$\delta_{V(-k)} \circ \iota_n : \mathbf{D}^{\dagger,r}(V) \to K_n \otimes_K \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V)$$

où $\delta_{V(-k)} : K_n((t)) \otimes_K \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V) \to K_n \otimes_K \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V)$ est l'application « coefficient de t^k ».

Lemme II.1.5. — *Si $z \in \mathbf{N}_{\mathrm{dR}}(V)$ est tel que pour tout $n \gg 0$, on ait $\iota_n(z) \in tK_n[[t]] \otimes_K \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V)$, alors $z \in t\mathbf{N}_{\mathrm{dR}}(V)$. En particulier, si $\delta_V \circ \iota_n(z) = 0$ pour tout $n \gg 0$, alors $z \in t\mathbf{N}_{\mathrm{dR}}(V)$.*

Démonstration. — Fixons $r \gg 0$ tel que $z \in N_r$. La démonstration de la proposition [**Ber02**, 5.15] montre [(1)] qu'il existe une base $f_1, \cdots, f_d$ de N_r dont les images par ι_n sont une base de $K_n[[t]] \otimes_K \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V)$ pour tout $n \gg 0$. Si l'on écrit que $z = \sum_{i=1}^d z_i f_i$, et si $\iota_n(z) \in tK_n[[t]] \otimes_K \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V)$, alors $z_i(\varepsilon^{(n)} - 1) = 0$ pour tout $n \gg 0$ et donc $t = \log(1+X)$ divise z_i dans $\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}$ ce qui fait que $z \in t\mathbf{N}_{\mathrm{dR}}(V)$. □

II.2. Cohomologie galoisienne et représentations de de Rham. — Rappelons que Herr a montré dans [**Her98**] comment construire les groupes de cohomologie galoisienne $H^i(K, V)$ à partir du (φ, Γ)-module associé à V. Nous utiliserons la version qu'en ont donnée Cherbonnier et Colmez dans [**CC99**] et que nous rappelons brièvement.

Rappelons que l'on a défini (voir définition I.1.1) un opérateur $\psi : \mathbf{D}^{\dagger}(V) \to \mathbf{D}^{\dagger}(V)$. Dans [**CC99**, §I.5], Cherbonnier et Colmez construisent pour tout $n \geqslant 0$ une application $h^1_{K_n,V} : \mathbf{D}^{\dagger}(V)^{\psi=1} \to H^1(K_n, V)$ qui est triviale sur $(1-\gamma_n)\mathbf{D}^{\dagger}(V)^{\psi=1}$. Ces applications $h^1_{K_n,V}$ donnent lieu (par un théorème non publié de Fontaine dont on trouvera une démonstration dans [**CC99**, §II.1]) à un isomorphisme entre $\mathbf{D}^{\dagger}(V)^{\psi=1}$ et la cohomologie d'Iwasawa $H^1_{\mathrm{Iw}}(K, V)$ par passage à la limite sur n. En particulier, si $W \subset V$, alors l'application naturelle $H^1_{\mathrm{Iw}}(K, W) \to H^1_{\mathrm{Iw}}(K, V)$ est injective.

On suppose à présent que V est de de Rham, et on va voir à quelle condition $h^1_{K_n,V}(y) \in H^1_g(K_n, V)$ si $y \in \mathbf{D}^{\dagger}(V)^{\psi=1}$. L'opérateur ∂_D que l'on a défini au paragraphe I.2 vérifie $\iota_n \circ \partial_D = p^{-n}\partial_V \circ \iota_n$ où

$$\partial_V = d/dt \otimes \mathrm{Id} : K_n((t)) \otimes_K \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V) \to K_n((t)) \otimes_K \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V).$$

Si l'on combine le théorème [**CC99**, IV.2.1] avec des propriétés bien connues de « l'exponentielle duale de Bloch-Kato » (le fait que le noyau de $\exp^*_{K_n,V^*(1)}$ est $H^1_g(K, V)$) et le fait que $\delta_{V(-k)} = k!^{-1}\delta_V \circ \partial_V^k$ pour $k \geqslant 0$, alors on trouve que :

Proposition II.2.1. — *Il existe $r_\psi(V)$ que l'on peut supposer $\geqslant r(V)$ tel que si $r \geqslant r_\psi(V)$, alors $\mathbf{D}^{\dagger}(V)^{\psi=1} \subset \mathbf{D}^{\dagger,r}(V)$ et si $y \in \mathbf{D}^{\dagger}(V)^{\psi=1}$, $p^{n-1}(p-1) \geqslant r \geqslant r_\psi(V)$ et $k \geqslant 0$, alors on a $h^1_{K_n,V(-k)}(y(-k)) \in H^1_g(K_n, V(-k))$ si et seulement si $\delta_V \circ \partial_V^k \circ \iota_n(y) = 0$.*

Enfin pour terminer, on calcule la $F'[\gamma_K]$-torsion de $\mathbf{D}^{\dagger}(V)^{\psi=1}$.

Lemme II.2.2. — *Si $y \in \mathbf{D}^{\dagger}(V)^{\psi=1}$, alors il existe $P(\gamma) \in F'[\Gamma_K]$ tel que $P(\gamma)y = 0$ si et seulement si $y \in V^{H_K}$.*

Démonstration. — Étant donné que $\mathbf{D}^{\dagger}(V)^{\varphi=1} = V^{H_K}$ comme on l'a rappelé au paragraphe II.1, c'est une conséquence immédiate du lemme I.1.2. □

(1) il est en fait incorrectement affirmé que ι_n est surjective - elle est surjective modulo t^w pour tout $w \geqslant 0$.

Remarque II.2.3. — Perrin-Riou a en fait déterminé (cf [**Per94**] par exemple) la structure du $\mathbf{Q}_p \otimes_{\mathbf{Z}_p} \Lambda_K$-module $H^1_{\mathrm{Iw}}(K,V)$. Son sous-module de torsion s'identifie à V^{H_K} et $H^1_{\mathrm{Iw}}(K,V)/V^{H_K}$ est (au moins si $K/\mathbf{Q}_p$ est finie) un $\mathbf{Q}_p \otimes_{\mathbf{Z}_p} \Lambda_K$-module libre de rang $[K:\mathbf{Q}_p]\dim(V)$.

II.3. Normes universelles. — Dans ce paragraphe, on montre le théorème A. On commence par un résultat un peu plus faible (la proposition II.3.1 ci-dessous) puis on montre comment en déduire le cas général par un argument de dévissage.

Si W est une représentation p-adique, soit $\mathbf{D}^\dagger(W)^{\psi=1}_g$ l'ensemble des $z \in \mathbf{D}^\dagger(W)^{\psi=1}$ tels que pour tout $n \geqslant 0$, on ait $h^1_{K_n,W}(z) \in H^1_g(K_n,W)$.

Proposition II.3.1. — *Si $k \geqslant 0$ et si V est une représentation de de Rham dont les poids de Hodge-Tate sont $\geqslant -k$ et qui n'admet pas de sous-représentation dont les poids de Hodge-Tate sont $\geqslant 1-k$, alors on a $\mathbf{D}^\dagger(V)^{\psi=1}_g \subset V^{H_K}$.*

Plus précisément, on a $\mathbf{D}^\dagger(V)^{\psi=1}_g = 0$ si $k=0$ et $\mathbf{D}^\dagger(V)^{\psi=1}_g = V^{H_K}$ si $k \geqslant 1$.

Démonstration. — Posons $D^\dagger = \mathbf{D}^\dagger(V(k))$ et $N = \mathbf{N}_{\mathrm{dR}}(V(k))$. Comme les poids de Hodge-Tate de $V(k)$ sont $\geqslant 0$, le lemme II.1.2 montre que $D^\dagger_{\mathrm{rig}} \subset N$. D'autre part, le fait que V n'admet pas de sous-représentation dont les poids de Hodge-Tate sont $\geqslant 1-k$ et le lemme II.1.4 (appliqué à $V(k)$) montrent que $D^\dagger \cap tN = 0$. Enfin, la proposition II.2.1 montre que si $y \in \mathbf{D}^\dagger(V)^{\psi=1}$ est tel que $h^1_{K_n,V}(y) \in H^1_g(K_n,V)$ pour tout $n \geqslant 0$, alors $\delta_{V(k)} \circ \partial^k_{V(k)} \circ \iota_n(y) = 0$ pour tout $n \gg 0$ et donc que $\delta_{V(k)} \circ \iota_n \circ \partial^k_D(y) = 0$ pour tout $n \gg 0$ et le lemme II.1.5 (appliqué à $V(k)$) montre que $\partial^k_D(y) \in tN$.

On est donc en mesure d'appliquer la proposition I.4.1, qui montre qu'il existe $P(\gamma) \in F'[\Gamma_K]$ tel que $P(\gamma)y = 0$. Le lemme II.2.2 montre enfin que $y \in V^{H_K}$, ce qui démontre le premier point.

Ensuite, si $k=0$ et $y \in \mathbf{D}^\dagger(V)^{\psi=1}_g$, alors $y \in D^\dagger \cap tN = 0$ et donc $\mathbf{D}^\dagger(V)^{\psi=1}_g = 0$. Enfin si $k \geqslant 1$ alors $1-\gamma_n$ est surjectif sur V^{H_K} et donc si $y \in V^{H_K}$, alors on peut écrire $y = (1-\gamma_n)y_n$ avec $y_n \in V^{H_K}$, ce qui fait que $h^1_{K_n,V}(y) = h^1_{K_n,V}((1-\gamma_n)y_n) = 0$ pour tout $n \geqslant 0$ puisque $h^1_{K_n,V}$ est triviale sur $(1-\gamma_n)\mathbf{D}^\dagger(V)^{\psi=1}$. Une extension triviale de représentations de de Rham étant forcément de de Rham, on a donc dans ce cas $\mathbf{D}^\dagger(V)^{\psi=1}_g = V^{H_K}$. □

Pour terminer, on donne les arguments de dévissage permettant de déduire le théorème principal de la proposition II.3.1.

Lemme II.3.2. — *Si $0 \to V' \to V \to V'' \to 0$ est une suite exacte de représentations p-adiques, alors on a une suite exacte :*

$$0 \to \mathbf{D}^\dagger(V')^{\psi=1}_g \to \mathbf{D}^\dagger(V)^{\psi=1}_g \to \mathbf{D}^\dagger(V'')^{\psi=1}_g$$

Démonstration. — La théorie des (φ,Γ)-modules nous donne une suite exacte :

$$0 \to \mathbf{D}^\dagger(V') \to \mathbf{D}^\dagger(V) \to \mathbf{D}^\dagger(V'') \to 0,$$

et le lemme du serpent implique que l'on a :

$$0 \to \mathbf{D}^\dagger(V')^{\psi=1} \to \mathbf{D}^\dagger(V)^{\psi=1} \to \mathbf{D}^\dagger(V'')^{\psi=1}.$$

Le lemme résulte alors du fait (voir [**Fo88b**, §3.8, (iii)]) que les sous-quotients des représentations de Rham sont de de Rham. □

Si W est une représentation de Hodge-Tate et $j \in \mathbf{Z}$, soit $\mathrm{Fil}^j W$ la plus grande sous-représentation de W dont tous les poids sont $\geqslant j$.

Lemme II.3.3. — *On a* $\mathrm{Fil}^j(W/\mathrm{Fil}^j W) = 0$.

Démonstration. — Soit $f : W \to W/\mathrm{Fil}^j W$ la projection naturelle. Si $X \subset W/\mathrm{Fil}^j W$ a tous ses poids $\geqslant j$, alors on a une suite exacte

$$0 \to \mathrm{Fil}^j W \to f^{-1}(X) \to X \to 0$$

et donc $f^{-1}(X)$ est une représentation de Hodge-Tate, extension de deux représentations de Hodge-Tate à poids $\geqslant j$, et donc elle-même à poids $\geqslant j$, ce qui fait que $f^{-1}(X) = \mathrm{Fil}^j W$ et donc que $X = 0$. □

Nous pouvons enfin montrer le résultat principal de cet article. Pour cela, rappelons que l'on a un isomorphisme $H^1_{\mathrm{Iw}}(K,V) = \mathbf{D}^\dagger(V)^{\psi=1}$.

Théorème II.3.4. — *Si V est une représentation de de Rham, alors*

(1) *si V n'a pas de sous-quotient fixé par H_K, alors $\mathbf{D}^\dagger(V)^{\psi=1}_g = \mathbf{D}^\dagger(\mathrm{Fil}^1 V)^{\psi=1}$;*

(2) *en général, $\mathbf{D}^\dagger(\mathrm{Fil}^1 V)^{\psi=1} \subset \mathbf{D}^\dagger(V)^{\psi=1}_g$ et le quotient est un $\mathbf{Q}_p \otimes_{\mathbf{Z}_p} \Lambda_K$-module de torsion.*

Démonstration. — Le fait que $\mathbf{D}^\dagger(\mathrm{Fil}^1 V)^{\psi=1} \subset \mathbf{D}^\dagger(V)^{\psi=1}_g$ suit du fait (démontré en [**Ber02**, lemme 6.5] par exemple) que si W est une représentation de de Rham dont tous les poids de Hodge-Tate sont $\geqslant 1$, alors toute extension de $\mathbf{Q}_p$ par W est elle-même de de Rham.

Nous allons tout d'abord montrer le (2), c'est-à-dire que le $\mathbf{Q}_p \otimes_{\mathbf{Z}_p} \Lambda_K$-module $\mathbf{D}^\dagger(V)^{\psi=1}_g/\mathbf{D}^\dagger(\mathrm{Fil}^1 V)^{\psi=1}$ est de torsion. Par un argument de dévissage, il suffit de montrer que pour tout $k \geqslant 0$,

$$\mathbf{D}^\dagger(\mathrm{Fil}^{-k} V)^{\psi=1}_g/\mathbf{D}^\dagger(\mathrm{Fil}^{1-k} V)^{\psi=1}_g$$

est un $\mathbf{Q}_p \otimes_{\mathbf{Z}_p} \Lambda_K$-module de torsion ce que nous allons maintenant faire. Par le lemme II.3.2, on a une suite exacte :

$$(S_k) \qquad 0 \to \mathbf{D}^\dagger(\mathrm{Fil}^{1-k}V)_g^{\psi=1} \to \mathbf{D}^\dagger(\mathrm{Fil}^{-k}V)_g^{\psi=1} \to \mathbf{D}^\dagger(\mathrm{Fil}^{-k}V/\mathrm{Fil}^{1-k}V)_g^{\psi=1}$$

et la représentation $\mathrm{Fil}^{-k}V/\mathrm{Fil}^{1-k}V$ a des poids $\geqslant -k$ et n'admet pas de sous-représentation dont les poids sont $\geqslant 1-k$ par le lemme II.3.3. La proposition II.3.1 montre que $\mathbf{D}^\dagger(\mathrm{Fil}^{-k}V/\mathrm{Fil}^{1-k}V)_g^{\psi=1} \subset (\mathrm{Fil}^{-k}V/\mathrm{Fil}^{1-k}V)^{H_K}$ et donc que $\mathbf{D}^\dagger(\mathrm{Fil}^{-k}V)_g^{\psi=1}/\mathbf{D}^\dagger(\mathrm{Fil}^{1-k}V)_g^{\psi=1}$ est un $\mathbf{Q}_p \otimes_{\mathbf{Z}_p} \Lambda_K$-module de torsion car $(\mathrm{Fil}^{-k}V/\mathrm{Fil}^{1-k}V)^{H_K}$ est un $\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel de dimension finie. Ceci montre le (2).

Les calculs ci-dessus montrent de plus que si V n'a pas de sous-quotient fixé par H_K, alors en fait $\mathbf{D}^\dagger(\mathrm{Fil}^1V)^{\psi=1} = \mathbf{D}^\dagger(V)_g^{\psi=1}$ car dans ce cas on a $\mathbf{D}^\dagger(\mathrm{Fil}^{-k}V/\mathrm{Fil}^{1-k}V)_g^{\psi=1} = 0$ pour tout $k \geqslant 0$ et donc $\mathbf{D}^\dagger(\mathrm{Fil}^{-k}V)_g^{\psi=1} = \mathbf{D}^\dagger(\mathrm{Fil}^{1-k}V)_g^{\psi=1}$ pour tout $k \geqslant 0$. Ceci montre le (1). □

Remarque II.3.5. — Reprenons la démonstration du théorème II.3.4 ci-dessus. L'image de l'espace $\mathbf{D}^\dagger(\mathrm{Fil}^{-k}V)_g^{\psi=1}$ dans $\mathbf{D}^\dagger(\mathrm{Fil}^{-k}V/\mathrm{Fil}^{1-k}V)_g^{\psi=1}$ s'identifie à une sous-représentation W_{-k} du groupe Γ_K de $(\mathrm{Fil}^{-k}V/\mathrm{Fil}^{1-k}V)^{H_K}$; c'est donc une représentation de G_K fixée par H_K et dont le seul poids de Hodge-Tate est $-k$ (notons aussi que $W_0 = 0$). Comme il n'y a pas d'extensions non-triviales entre de tels objets qui soit encore fixée par H_K (ou, ce qui revient au même, il n'y a pas d'extensions non-triviales entre de tels objets chez les $\mathbf{Q}_p \otimes_{\mathbf{Z}_p} \Lambda_K$-modules) (2), on en déduit que si l'on « splice » les suites exactes (S_k) pour $k \geqslant 0$, on trouve :

$$0 \to \mathbf{D}^\dagger(\mathrm{Fil}^1V)^{\psi=1} \to \mathbf{D}^\dagger(V)_g^{\psi=1} \to \oplus_{k\geqslant 1} W_{-k} \to 0.$$

ce qui permet de préciser (au moins en principe) le théorème A.

Appendice A
Liste des notations

Voici une liste des principales notations du texte, dans l'ordre où elles apparaissent :

I.1 : k, K, F, μ_{p^n}, K_n, K_∞, G_K, H_K, χ, Γ_K, F', σ, $\mathbf{B}_F^{\dagger,r}$, φ, $\mathbf{B}_F^\dagger$, $\mathbf{B}_F$, e_K, $\mathbf{B}_K^\dagger$, $\mathbf{B}_K$, $\mathbf{B}_K^{\dagger,r}$, $D^\dagger$, ψ, $r(K)$, ι_n, $D^{\dagger,r}$, $r(D)$.

I.2 : $\mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}^{\dagger,r}$, t, $\mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}^\dagger$, ∇, ∂, $D_{\mathrm{rig}}^\dagger$, $D_{\mathrm{rig}}^{\dagger,r}$, ∇_D, ∂_D, N_r, N, ℓ_Y.

II.1 : V, d, $\mathbf{D}^\dagger(V)$, $\mathbf{D}_{\mathrm{rig}}^\dagger(V)$, $r(V)$, $\mathbf{N}_{\mathrm{dR}}(V)$, $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)$, $\mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V)$, $\delta_{V(-k)}$.

II.2 : $h^1_{K_n,V}$, $H^1_{\mathrm{Iw}}(K,V)$, ∂_V, $r_\psi(V)$.

II.3 : $\mathbf{D}^\dagger(V)_g^{\psi=1}$, Fil^j.

(2) pour voir cela, il suffit de remarquer que si W est une représentation de Γ_K qui est une somme directe de tordues par des caractères d'ordres finis de $\mathbf{Q}_p(k_j)$ avec $k_j \neq 0$, alors $H^1(\Gamma_K, W) = 0$

Références

[And01] André Y. : *Filtrations de Hasse-Arf et monodromie p-adique.* Invent. Math. 148 (2002), no. 2, 285–317.

[Ber02] Berger L. : *Représentations p-adiques et équations différentielles.* Invent. Math. 148 (2002), 219–284.

[Ber03] Berger L. : *Bloch and Kato's exponential map : three explicit formulas.* Documenta Mathematica Extra Volume : Kazuya Kato's Fiftieth Birthday (2003) 99–129.

[BK91] Bloch S., Kato K. : *L-functions and Tamagawa numbers of motives.* The Grothendieck Festschrift, Vol. I, 333–400, Progr. Math. 86, Birkhäuser Boston, Boston, MA 1990.

[Che96] Cherbonnier F. : *Représentations p-adiques surconvergentes.* Thèse de l'Université d'Orsay, 1996.

[CC98] Cherbonnier F., Colmez P. : *Représentations p-adiques surconvergentes.* Invent. Math. 133 (1998), 581–611.

[CC99] Cherbonnier F., Colmez P. : *Théorie d'Iwasawa des représentations p-adiques d'un corps local.* J. Amer. Math. Soc. 12 (1999), 241–268.

[CG96] Coates J., Greenberg R. : *Kummer theory for abelian varieties over local fields.* Invent. Math. 124 (1996), no. 1-3, 129–174.

[Col98] Colmez P. : *Théorie d'Iwasawa des représentations de de Rham d'un corps local.* Ann. of Math. 148 (1998), 485–571.

[Col00] Colmez P. : *Fonctions L p-adiques.* Séminaire Bourbaki, 1998/99, Astérisque 266 (2000) Exp. 851.

[Col01] Colmez P. : *Les conjectures de monodromie p-adiques.* Séminaire Bourbaki, 2001/02, Astérisque, Exp. 897.

[Col03] Colmez P. : *Espaces Vectoriels de dimension finie et représentations de de Rham.* En préparation.

[Fo88a] Fontaine J-M. : *Le corps des périodes p-adiques.* Périodes p-adiques (Bures-sur-Yvette, 1988), Astérisque 223 (1994) 59–111.

[Fo88b] Fontaine J-M. : *Représentations p-adiques semi-stables.* Périodes p-adiques, (Bures-sur-Yvette, 1988), Astérisque 223 (1994) 113–184.

[Fon91] Fontaine J-M. : *Représentations p-adiques des corps locaux I.* The Grothendieck Festschrift, Vol. II, 249–309, Progr. Math. 87, Birkhäuser Boston, Boston, MA 1990.

[FW79] Fontaine J-M., Wintenberger J-P. : *Le "corps des normes" de certaines extensions algébriques de corps locaux.* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B 288 (1979), no. 6, A367–A370.

[Haz74] Hazewinkel M. : *On norm maps for one dimensional formal groups I : the cyclotomic Γ-extension.* J. Algebra 32 (1974), 89–108.

[Haz74] Hazewinkel M. : *On norm maps for one dimensional formal groups. II. G-extensions of local fields with algebraically closed residue field.* J. reine angew Math. 268/269 (1974), 222–250.

[Haz77] Hazewinkel M. : *On norm maps for one dimensional formal groups. III.* Duke Math. J. 44 (1977), 305–314.

[Her98] Herr L. : *Sur la cohomologie galoisienne des corps p-adiques.* Bull. Soc. Math. France 126 (1998), 563–600.

[Ked00] Kedlaya K. : *A p-adic local monodromy theorem.* Ann. of Math., to appear.

[Maz72] Mazur B. : *Rational points of abelian varieties with values in towers of number fields.* Invent. Math. 18 (1972), 183–266.

[Meb01] MEBKHOUT Z. : *Analogue p-adique du théorème de Turrittin et le théorème de la monodromie p-adique.* Invent. math. 148 (2002), 319–351.

[Per92] PERRIN-RIOU B. : *Théorie d'Iwasawa et hauteurs p-adiques.* Invent. Math. 109 (1992), no. 1, 137–185.

[Per94] PERRIN-RIOU B. : *Théorie d'Iwasawa des représentations p-adiques sur un corps local.* Invent. Math. 115 (1994) 81–161.

[Per00] PERRIN-RIOU B. : *Représentations p-adiques et normes universelles. I. Le cas cristallin.* J. Amer. Math. Soc. 13 (2000), no. 3, 533–551 (electronic).

[Per01] PERRIN-RIOU B. : *Théorie d'Iwasawa des représentations p-adiques semi-stables.* Mém. Soc. Math. Fr. (N.S.) No. 84, (2001), vi+111 pp.

[Sch87] SCHNEIDER P. : *Arithmetic of formal groups and applications I : universal norm subgroups.* Invent. Math. 87 (1987), 587–602.

[Sen73] SEN S. : *Lie algebras of Galois groups arising from Hodge-Tate modules.* Ann. of Math. 97 (1973) 160–170.

[Win83] WINTENBERGER J-P. : *Le corps des normes de certaines extensions infinies des corps locaux ; applications.* Ann. Sci. École Norm. Sup. 16 (1983), 59–89.

Mai 2006

LAURENT BERGER