PRESQUE $\mathbf{C}_p$-REPRÉSENTATIONS ET (φ, Γ)-MODULES

par

Laurent Berger

Résumé. — On associe deux presque $\mathbf{C}_p$-représentations à un (φ, Γ)-module, et on en calcule les dimensions et les hauteurs. Comme corollaire, on obtient un résultat de pleine fidélité pour les $\mathbf{B}_{\mathrm{e}}$-représentations.

***Abstract* (Almost $\mathbf{C}_p$-representations and (φ, Γ)-modules).** — We associate two almost $\mathbf{C}_p$-representations to a (φ, Γ)-module, and we compute their dimensions and heights. As a corollary, we get a full faithfulness result for $\mathbf{B}_{\mathrm{e}}$-representations.

Table des matières

Introduction

Dans tout cet article, K est une extension finie de $\mathbf{Q}_p$ (on pourrait sans doute se borner à supposer que le corps résiduel de K est parfait mais dans [**Fon03**] on suppose que $K/\mathbf{Q}_p$ est finie et nous faisons de même par précaution) et on note $G_K = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ le groupe de Galois absolu de K. Afin d'étudier les représentations p-adiques de G_K, Fontaine a introduit un certain nombre d'objets (anneaux de périodes p-adiques, (φ, N)-modules filtrés, (φ, Γ)-modules, presque $\mathbf{C}_p$-représentations...) et il est toujours intéressant et fructueux de faire le lien entre ces différents objets. Dans cet article, nous montrons comment on peut associer à un (φ, Γ)-module deux presque $\mathbf{C}_p$-représentations, et nous

***Classification mathématique par sujets* (2000).** — 11F80; 11F85; 11S15; 11S20; 11S25; 14F30.
Mots clefs. — Théorie de Hodge p-adique; presque $\mathbf{C}_p$-représentations; B-paires; (φ, Γ)-modules; (φ, G_K)-modules; pentes de Frobenius.

en calculons la dimension et la hauteur. Avant de donner un énoncé précis, nous faisons à présent quelques rappels pour décrire les objets qui interviennent dans l'article.

Les (φ,Γ)-modules. — Afin de simplifier les notations, nous ne définissons l'anneau de Robba que pour $K=\mathbf{Q}_p$ dans l'introduction. On note $\mathbf{B}^\dagger_{\mathrm{rig},K}$ l'anneau de Robba, c'est-à-dire l'anneau des séries formelles $f(X)=\sum_{k\in\mathbf{Z}} a_k X^k$ telles que $a_k\in K$ et qui convergent sur une couronne $\rho_f<|X|_p<1$ où $\rho_f<1$ dépend de f. On note $\mathbf{B}^\dagger_K$ le sous-espace de $\mathbf{B}^\dagger_{\mathrm{rig},K}$ formé des séries $f(X)$ telles que la suite $\{a_k\}_{k\in\mathbf{Z}}$ est bornée ce qui fait que $\mathbf{B}^\dagger_K$ est un corps muni de la norme de Gauss et dont on note $\mathbf{A}^\dagger_K$ l'anneau des entiers. Ces anneaux sont tous munis d'un frobenius φ défini par $(\varphi f)(X)=f((1+X)^p-1)$ et d'une action de $\Gamma=\mathrm{Gal}(K(\mu_{p^\infty})/K)\xrightarrow{\chi}\mathbf{Z}_p^\times$ donnée par $(\gamma f)(X)=f((1+X)^{\chi(\gamma)}-1)$.

Un (φ,Γ)-module est un $\mathbf{B}^\dagger_{\mathrm{rig},K}$-module libre muni d'un frobenius semi-linéaire φ tel que $\mathrm{Mat}(\varphi)\in\mathrm{GL}_d(\mathbf{B}^\dagger_{\mathrm{rig},K})$ et d'une action semi-linéaire de Γ continue et commutant à φ. On dit qu'un tel objet est étale s'il en existe une base dans laquelle $\mathrm{Mat}(\varphi)\in\mathrm{GL}_d(\mathbf{A}^\dagger_K)$. En combinant des résultats de Fontaine ([**Fon90**]), Wintenberger ([**FW79**] et [**Win83**]), Cherbonnier et Colmez ([**CC98**]) et Kedlaya ([**Ked05**]) on trouve que les (φ,Γ)-modules étales forment une catégorie qui est naturellement équivalente à celle de toutes les représentations p-adiques de G_K ce qui explique leur importance.

Les φ-modules sur $\mathbf{B}^\dagger_{\mathrm{rig},K}$ ont été étudiés par Kedlaya (voir par exemple [**Ked04**]) qui a dégagé une notion de pente et montré que tout φ-module sur $\mathbf{B}^\dagger_{\mathrm{rig},K}$ admet une filtration canonique telle que les gradués sont isoclines de pentes croissantes. Les φ-modules étales sont ceux qui sont de pente nulle. Si D est un φ-module de rang 1, alors il existe une base de D dans laquelle $\lambda=\mathrm{Mat}(\varphi)\in K^\times$ et la pente de D est alors la valuation de λ. Si D est de rang $\geqslant 1$, alors le degré de D est par définition la pente de $\det(\mathrm{D})$.

Les B-paires. — Les B-paires sont des objets introduits dans [**Ber08**] qui généralisent les représentations p-adiques, et la catégorie des B-paires est alors équivalente à celle de tous les (φ,Γ)-modules sur l'anneau de Robba. Pour définir les B-paires, on utilise les anneaux $\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}$, $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$ et $\mathbf{B}_{\mathrm{e}}=\mathbf{B}^{\varphi=1}_{\mathrm{cris}}$ de Fontaine. Notons que ces trois anneaux sont filtrés et que leurs gradués respectifs sont $\mathbf{C}_p[t]$, $\mathbf{C}_p(t)$ et $\{P\in\mathbf{C}_p[t^{-1}]$ tels que $P(0)\in\mathbf{Q}_p\}$. On a $\mathbf{B}_{\mathrm{e}}\subset\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$ et $\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}\subset\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$ et ces trois anneaux sont par ailleurs reliés par la « suite exacte fondamentale » : $0\to\mathbf{Q}_p\to\mathbf{B}_{\mathrm{e}}\to\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}/\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}\to 0$.

Si D est un φ-module filtré qui provient de la cohomologie d'un schéma X propre et lisse sur $\mathcal{O}_K$, alors le φ-module sous-jacent ne dépend que de la fibre spéciale de X (c'en est la cohomologie cristalline) alors que la filtration ne dépend que de la fibre générique (c'est la filtration de Hodge de la cohomologie de de Rham, dans laquelle se plonge la cohomologie cristalline). Si $V=V_{\mathrm{cris}}(D)$, alors on voit que $\mathbf{B}_{\mathrm{e}}\otimes_{\mathbf{Q}_p}V=(\mathbf{B}_{\mathrm{cris}}\otimes_{K_0}D)^{\varphi=1}$

ne dépend que de la structure de φ-module de D et de plus, les φ-modules D_1 et D_2 sont isomorphes si et seulement si les $\mathbf{B}_{\mathrm{e}}$-représentations $\mathbf{B}_{\mathrm{e}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V_1$ et $\mathbf{B}_{\mathrm{e}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V_2$ le sont (cf. la proposition 8.2 de [**Fon03**]). Par ailleurs, $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+ \otimes_{\mathbf{Q}_p} V = \mathrm{Fil}^0(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{K_0} D)$ et les modules filtrés $K \otimes_{K_0} D_1$ et $K \otimes_{K_0} D_2$ sont isomorphes si et seulement si les $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$-représentations $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+ \otimes_{\mathbf{Q}_p} V_1$ et $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+ \otimes_{\mathbf{Q}_p} V_2$ le sont.

L'idée sous-jacente à la construction des B-paires est d'isoler les phénomènes liés à la « fibre spéciale » et à la « fibre générique » en considérant non pas des représentations p-adiques V, mais des « B-paires » $W = (W_e, W_{\mathrm{dR}}^+)$ où W_e est un $\mathbf{B}_{\mathrm{e}}$-module libre muni d'une action semi-linéaire et continue de G_K et où W_{dR}^+ est un $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$-réseau stable par G_K de $W_{\mathrm{dR}} = \mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbf{B}_{\mathrm{e}}} W_e$.

Si V est une représentation p-adique, alors $W(V) = (\mathbf{B}_{\mathrm{e}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V, \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+ \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)$ est une B-paire et si D est un (φ, N)-module filtré, alors

$$W(D) = ((\mathbf{B}_{\mathrm{st}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} D)^{\varphi=1, N=0}, \mathrm{Fil}^0(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} D))$$

est aussi une B-paire. On sait associer à toute B-paire un (φ,Γ)-module $\mathrm{D}(W)$ sur l'anneau de Robba et par le théorème A de [**Ber08**] le foncteur qui en résulte est une équivalence de catégories. De plus, cette équivalence est compatible à celle entre les représentations p-adiques de G_K et les (φ,Γ)-modules étales, via le foncteur $V \mapsto W(V)$. Par ailleurs, si on se restreint aux B-paires de la forme $W(D)$, alors on retrouve les résultats de [**Ber04**].

Les presque $\mathbf{C}_p$-représentations. — Les presque $\mathbf{C}_p$-représentations sont des objets définis et étudiés par Fontaine dans [**Fon03**]. Ce sont des espaces de Banach X munis d'une action linéaire et continue de G_K tels qu'il existe $d \geqslant 0$ et des représentations p-adiques de dimensions finies V_1 et V_2 telles que $X/V_1 = \mathbf{C}_p^d/V_2$. Les presque $\mathbf{C}_p$-représentations ont une dimension $\dim_{\mathcal{C}(G_K)}(X)$ (l'entier d ci-dessus) et une hauteur $\mathrm{ht}(X)$ (qui vaut $\dim(V_1) - \dim(V_2)$).

Si F est un groupe formel, alors $X = \varprojlim F(\mathfrak{m}_{\mathbf{C}_p})$ contient $V_pF = \mathbf{Q}_p \otimes_{\mathbf{Z}_p} \varprojlim F[p^n]$ et on a une suite exacte $0 \to V_pF \to X \to \tan_F(\mathbf{C}_p) \to 0$ ce qui fait que X est une presque $\mathbf{C}_p$-représentation, dont la dimension et la hauteur sont celles de F. Dans le cas où $F = \mathbf{G}_m$, on a $X = (\mathbf{B}_{\mathrm{cris}}^+)^{\varphi=p}$ et plus généralement, les espaces $(\mathbf{B}_{\mathrm{cris}}^+)^{\varphi^h=p^a}$ sont tous des presque $\mathbf{C}_p$-représentations.

Presque $\mathbf{C}_p$-représentations et (φ,Γ)-modules. — Le résultat principal de cet article est la construction de deux presque $\mathbf{C}_p$-représentations $X^0(W)$ et $X^1(W)$ associées à une B-paire W ainsi que le calcul de leurs dimensions et de leurs hauteurs. Si D est un (φ,Γ)-module, alors le plus grand sous-module de D de pentes $\leqslant 0$ est bien défini, et on le note $\mathrm{D}_{\leqslant 0}$; on note aussi $\mathrm{D}_{>0} = \mathrm{D}/\mathrm{D}_{\leqslant 0}$.

Si W est une B-paire, alors on pose $X^0(W) = \ker(W_e \to W_{\mathrm{dR}}/W_{\mathrm{dR}}^+)$ et $X^1(W) = \mathrm{coker}(W_e \to W_{\mathrm{dR}}/W_{\mathrm{dR}}^+)$. Le résultat principal de notre article est alors le suivant (voir le théorème 3.1 qui donne un résultat plus précis) :

Théorème A. — *Si W est une B-paire, alors $X^0(W)$ et $X^1(W)$ sont deux presque $\mathbf{C}_p$-représentations. Si de plus $\mathrm{D} = \mathrm{D}(W)$, alors :*

(1) $\dim_{\mathcal{C}(G_K)} X^0(W) = -\deg(\mathrm{D}_{\leqslant 0})$ *et* $\mathrm{ht}(X^0(W)) = \mathrm{rg}(\mathrm{D}_{\leqslant 0})$ *;*

(2) $\dim_{\mathcal{C}(G_K)} X^1(W) = \deg(\mathrm{D}_{>0})$ *et* $\mathrm{ht}(X^1(W)) = -\mathrm{rg}(\mathrm{D}_{>0})$.

Ce théorème permet d'associer à un (φ,Γ)-module D un complexe de longueur 2 de presque $\mathbf{C}_p$-représentations (c'est moralement le complexe $[W_e \to W_{\mathrm{dR}}/W_{\mathrm{dR}}^+]$) dont la dimension et la hauteur sont le degré et le rang de D. L'étude du foncteur qui en résulte promet d'être intéressante.

Le deuxième résultat de cet article est un théorème de pleine fidélité pour les $\mathbf{B}_{\mathrm{e}}$-représentations. Toute $\mathbf{B}_{\mathrm{e}}$-représentation peut être vue comme le W_e d'une B-paire et en utilisant le théorème A, on trouve le résultat suivant (c'est le théorème 4.1), qui répond par l'affirmative à une question de Fontaine (voir la remarque en bas de la page 375 de [**Fon03**]). Ce théorème de pleine fidélité pour les $\mathbf{B}_{\mathrm{e}}$-représentations (les fibres spéciales des B-paires) est l'analogue du théorème A' de [**Fon03**] qui concerne les $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$-représentations de longueur finie.

Théorème B. — *Le foncteur d'oubli de la catégorie des $\mathbf{B}_{\mathrm{e}}$-représentations de G_K vers la catégorie des $\mathbf{Q}_p$-espaces vectoriels topologiques avec action linéaire et continue de G_K est pleinement fidèle.*

Le théorème A est dans le prolongement naturel des calculs de [**Ber08**]. Notons toutefois que le fait que $X^0(W)$ et $X^1(W)$ sont des presque $\mathbf{C}_p$-représentations ainsi que le théorème B s'inscrivent naturellement dans un projet ambitieux ayant pour but de faire le lien entre B-paires, presque $\mathbf{C}_p$-représentations et espaces de Banach-Colmez (Fontaine et Plût, travail en cours).

La plan de l'article est assez naturel. Dans le §1, on fait quelques rappels et compléments sur les B-paires, les (φ, G_K)-modules et les (φ,Γ)-modules et dans le §2 on fait de même pour les presque $\mathbf{C}_p$-représentations. Le §3 est consacré à la démonstration du théorème A et le §4 à celle du théorème B.

Remerciements : Les résultats et les techniques de cet article sont directement inspirés des travaux de Jean-Marc Fontaine et je le remercie pour ses nombreuses explications patientes et éclairantes.

1. B-paires, (φ, G_K)-modules et (φ,Γ)-modules

Commençons par faire des rappels très succincts sur les définitions (données dans [**Fon94**] par exemple) des divers anneaux de Fontaine que nous utilisons dans cet article. Rappelons que $\widetilde{\mathbf{E}}^+ = \varprojlim_{x\mapsto x^p} \mathcal{O}_{\mathbf{C}_p}$ est un anneau de caractéristique p, complet pour la valuation $\mathrm{val}_{\mathrm{E}}$ définie par $\mathrm{val}_{\mathrm{E}}(x) = \mathrm{val}_p(x^{(0)})$ et qui contient un élément ε tel que $\varepsilon^{(n)}$ est une racine primitive p^n-ième de l'unité. On fixe un tel ε dans tout l'article. L'anneau $\widetilde{\mathbf{E}} = \widetilde{\mathbf{E}}^+[1/(\varepsilon-1)]$ est alors un corps qui contient comme sous-corps dense la clôture algébrique de $\mathbf{F}_p(\!(\varepsilon-1)\!)$. On pose $\widetilde{\mathbf{A}}^+ = W(\widetilde{\mathbf{E}}^+)$ et $\widetilde{\mathbf{A}} = W(\widetilde{\mathbf{E}})$ ainsi que $\widetilde{\mathbf{B}}^+ = \widetilde{\mathbf{A}}^+[1/p]$ et $\widetilde{\mathbf{B}} = \widetilde{\mathbf{A}}[1/p]$. L'application $\theta : \widetilde{\mathbf{B}}^+ \to \mathbf{C}_p$ qui à $\sum_{k\gg-\infty} p^k[x_k]$ associe $\sum_{k\gg-\infty} p^k x_k^{(0)}$ est un morphisme d'anneaux surjectif et $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ est le complété de $\widetilde{\mathbf{B}}^+$ pour la topologie $\ker(\theta)$-adique, ce qui en fait un espace topologique de Fréchet. On pose $X = [\varepsilon]-1 \in \widetilde{\mathbf{A}}^+$ et $t = \log(1+X) \in \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ et on définit $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$ par $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}} = \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+[1/t]$. Soit $\widetilde{p} \in \widetilde{\mathbf{E}}^+$ un élément tel que $p^{(0)} = p$. L'anneau $\mathbf{B}_{\max}^+$ est l'ensemble des séries $\sum_{n\geqslant 0} b_n([\widetilde{p}]/p)^n$ où $b_n \in \widetilde{\mathbf{B}}^+$ et $b_n \to 0$ quand $n\to\infty$ ce qui en fait un sous-anneau de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ muni en plus d'un Frobenius φ qui est injectif, mais pas surjectif. On pose $\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}^+ = \cap_{n\geqslant 0}\varphi^n(\mathbf{B}_{\max}^+)$ ce qui en fait un sous-anneau de $\mathbf{B}_{\max}^+$ sur lequel φ est bijectif. Remarquons que l'on travaille souvent avec $\mathbf{B}_{\mathrm{cris}}$ plutôt que $\mathbf{B}_{\max}$ mais le fait de préférer $\mathbf{B}_{\max}$ ne change rien aux résultats et est plus agréable pour des raisons techniques.

Rappelons que les anneaux $\mathbf{B}_{\max}$ et $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$ sont reliés, en plus de l'inclusion $\mathbf{B}_{\max} \subset \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$, par la suite exacte fondamentale $0 \to \mathbf{Q}_p \to \mathbf{B}_{\max}^{\varphi=1} \to \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}/\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+ \to 0$. Ce sont ces anneaux que l'on utilise en théorie de Hodge p-adique. Le point de départ de la théorie des (φ,Γ)-modules sur l'anneau de Robba est la construction d'anneaux intermédiaires entre $\widetilde{\mathbf{B}}^+$ et $\widetilde{\mathbf{B}}$. Si $r>0$, soit $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}$ l'ensemble des $x = \sum_{k\gg-\infty} p^k[x_k] \in \widetilde{\mathbf{B}}$ tels que $\mathrm{val}_{\mathrm{E}}(x_k) + k\cdot pr/(p-1)$ tend vers $+\infty$ quand k augmente. On pose $\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger = \cup_{r>0}\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}$, c'est le corps des éléments surconvergents, défini dans [**CC98**]. L'anneau $\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}^\dagger = \cup_{r>0}\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}^{\dagger,r}$ défini dans [**Ber02**, §2.3] est en quelque sorte la somme de $\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}^+$ et $\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger$; de fait, on a une suite exacte (d'anneaux et d'espaces de Fréchet) $0 \to \widetilde{\mathbf{B}}^+ \to \widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}^+ \oplus \widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r} \to \widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}^{\dagger,r} \to 0$.

Rappelons que $K_0 = W(k)[1/p]$; pour $1 \leqslant n \leqslant +\infty$, on pose $K_n = K(\mu_{p^n})$ et $H_K = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K_\infty)$ et $\Gamma_K = G_K/H_K$. Si R est un anneau muni d'une action de G_K (c'est le cas pour tous ceux que nous considérons), on note $R_K = R^{H_K}$. L'anneau $\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}^{\dagger,r}$ contient l'ensemble des séries $f(X) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} f_k X^k$ avec $f_k \in K_0$ telles que $f(X)$ converge sur $\{p^{-1/r} \leqslant |X| < 1\}$. Cet anneau est noté $\mathbf{B}_{\mathrm{rig},K_0}^{\dagger,r}$. Si K est une extension finie de K_0, il lui correspond par la théorie du corps de normes (cf. [**FW79**] et [**Win83**]) une extension finie $\mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}^{\dagger,r}$ qui s'identifie (si r est assez grand) à l'ensemble des séries $f(X_K) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} f_k X_K^k$ avec $f_k \in K_0'$ telles que $f(X_K)$ converge sur $\{p^{-1/er} \leqslant |X_K| < 1\}$ où X_K est un certain élément de $\widetilde{\mathbf{B}}_K^\dagger$ et K_0' est la plus grande sous-extension non ramifiée de K_0 dans K_∞ et

$e = [K_\infty : K_0(\mu_{p^\infty})]$. On pose $\mathbf{B}^\dagger_{\mathrm{rig},K} = \cup_{r>0} \mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}$ et $\mathbf{B}^{\dagger,r}_K = \mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K} \cap \widetilde{\mathbf{B}}^\dagger$ et $\mathbf{B}^\dagger_K = \cup_{r>0} \mathbf{B}^{\dagger,r}_K$. Les anneaux $\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger_{\mathrm{rig}}$ et $\mathbf{B}^\dagger_{\mathrm{rig},K}$ coïncident avec les anneaux $\Gamma^{\mathrm{alg}}_{\mathrm{an,con}}$ et $\Gamma_{\mathrm{an,con}}$ définis dans [**Ked05**, §2.2] (cf. en particulier la convention 2.2.16 et la remarque 2.4.13 de [**Ked05**]).

Rappelons que l'on pose $Q_1 = ((1+X)^p - 1)/X$ et $Q_n = \varphi^{n-1}(Q_1)$ pour $n \geqslant 1$ et que si $r > 0$, alors $n(r)$ est le plus petit entier n tel que $p^{n-1}(p-1) \geqslant r$. Enfin, l'injection $\varphi^{-n} : \widetilde{\mathbf{B}}^+ \to \mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}$ se prolonge par continuité à $\iota_n : \widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,p^{n-1}(p-1)}_{\mathrm{rig}} \to \mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}$.

Lemme 1.1. — *Si $x \in \widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig}}$ a la propriété que pour tout $n \geqslant n(r)$, on a $\theta \circ \iota_n(x) = 0$, alors $x \in t \cdot \widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig}}$.*

Démonstration. — Par la proposition 2.17 de [**Ber02**], le noyau de $\theta \circ \iota_n : \widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig}} \to \mathbf{C}_p$ est engendré par Q_n et on en déduit que Q_n divise x quel que soit $n \geqslant n(r)$ ce qui fait que pour tout $n \geqslant n(r)$, on peut écrire $x = x_n \cdot \prod_{m=n(r)}^n (Q_m/p)$. Par le même argument que celui de la démonstration du lemme 4.6 de [**Ber02**], la suite $\{x_n\}_{n \geqslant n(r)}$ converge dans $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig}}$ et sa limite y vérifie alors $x = y \cdot \prod_{n \geqslant n(r)} (Q_n/p)$. Comme dans $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig}}$ les idéaux engendrés par t et par $\prod_{n \geqslant n(r)} (Q_n/p)$ coïncident, on a bien $x \in t \cdot \widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig}}$. □

Rappelons qu'un φ-module sur $\mathbf{B}^\dagger_{\mathrm{rig},K}$ est un $\mathbf{B}^\dagger_{\mathrm{rig},K}$-module libre D muni d'un Frobenius φ tel que $\mathrm{Mat}(\varphi) \in \mathrm{GL}_d(\mathbf{B}^\dagger_{\mathrm{rig},K})$. Un (φ,Γ)-module est un φ-module muni d'une action semi-linéaire et continue de Γ_K qui commute à φ. Les B-paires sont des objets qui ont été définis dans [**Ber08**]. Rappelons qu'une B-paire $W = (W_e, W^+_{\mathrm{dR}})$ est la donnée d'une $\mathbf{B}_{\mathrm{e}}$-représentation W_e et d'un $\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}$-réseau W^+_{dR} de $W_{\mathrm{dR}} = \mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbf{B}_{\mathrm{e}}} W_e$ stable par G_K. Dans [**Ber08**], nous avons construit une équivalence de catégories entre la catégorie des B-paires et celle des (φ,Γ)-modules sur $\mathbf{B}^\dagger_{\mathrm{rig},K}$. Nous allons la préciser ci-dessous.

Appelons (φ, G_K)-module sur $\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger_{\mathrm{rig}}$ la donnée d'un φ-module $\widetilde{\mathrm{D}}$ sur $\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger_{\mathrm{rig}}$ muni d'une action de G_K qui est semi-linéaire et continue et qui commute à φ. On a un foncteur évident $\mathrm{D} \mapsto \widetilde{\mathrm{D}} = \widetilde{\mathbf{B}}^\dagger_{\mathrm{rig}} \otimes_{\mathbf{B}^\dagger_{\mathrm{rig},K}} \mathrm{D}$ de la catégorie des (φ,Γ)-modules sur $\mathbf{B}^\dagger_{\mathrm{rig},K}$ vers celle des (φ, G_K)-modules sur $\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger_{\mathrm{rig}}$ et on peut par ailleurs associer à tout (φ, G_K)-module $\widetilde{\mathrm{D}}$ sur $\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger_{\mathrm{rig}}$ une B-paire $W(\widetilde{\mathrm{D}})$ en copiant la recette de la proposition 2.2.6 de [**Ber08**], c'est-à-dire en posant :

$$W_e(\widetilde{\mathrm{D}}) = (\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger_{\mathrm{rig}}[1/t] \otimes_{\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger_{\mathrm{rig}}} \widetilde{\mathrm{D}})^{\varphi=1} \quad \text{et} \quad W^+_{\mathrm{dR}}(\widetilde{\mathrm{D}}) = \mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}} \otimes^{\iota_n}_{\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r_n}_{\mathrm{rig}}} \widetilde{\mathrm{D}}^{r_n}$$

pour $n \gg 0$. Le théorème 2.2.7 de [**Ber08**] s'étend alors immédiatement en le résultat suivant :

Théorème 1.2. — *Les foncteurs $\mathrm{D} \mapsto \widetilde{\mathrm{D}}$ et $\widetilde{\mathrm{D}} \mapsto W(\widetilde{\mathrm{D}})$ réalisent des équivalences de catégories entre les trois catégories suivantes :*

(1) *les (φ,Γ)-modules sur $\mathbf{B}^\dagger_{\mathrm{rig},K}$;*
(2) *les (φ, G_K)-modules sur $\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger_{\mathrm{rig}}$;*

(3) *les B-paires.*

Remarquons que si $\mathrm{D}(W)$ est le (φ,Γ)-module associé à une B-paire $W=(W_e,W_{\mathrm{dR}}^+)$, alors le (φ,Γ)-module associé à $W=(W_e,t^jW_{\mathrm{dR}}^+)$ est $t^j\mathrm{D}(W)$.

Kedlaya a étudié dans [**Ked05**] les φ-modules sur $\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger_{\mathrm{rig}}$ et il a notamment dégagé la notion de pentes pour ces objets (il a en fait un cadre commun pour l'étude des φ-modules sur $\mathbf{B}^\dagger_{\mathrm{rig},K}$ et sur $\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger_{\mathrm{rig}}$; pour des raisons pratiques, nous travaillons avec des modules sur $\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger_{\mathrm{rig}}$ dans cet article).

Si $h\geqslant 1$ et $a\in\mathbf{Z}$, disons qu'un φ-module $\widetilde{\mathrm{D}}$ sur $\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger_{\mathrm{rig}}$ est isocline de pente a/h si c'est une somme directe des modules élémentaires $M_{a,h}$ définis dans le §4.1 de [**Ked05**]. On peut appliquer le même raisonnement que dans la démonstration du théorème 3.2.3 de [**Ber08**] pour en déduire que tout φ-module $\widetilde{\mathrm{D}}$ sur $\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger_{\mathrm{rig}}$ qui est isocline de pente a/h s'écrit $\widetilde{\mathrm{D}}=\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger_{\mathrm{rig}}\otimes_{\mathbf{Q}_{p^h}}V_{a,h}$ où $V_{a,h}=\widetilde{\mathrm{D}}^{\varphi^h=p^a}$ est un $\mathbf{Q}_{p^h}$-espace vectoriel de dimension finie muni d'un frobenius semi-linéaire vérifiant $\varphi^h=p^a$. Si de plus $\widetilde{\mathrm{D}}$ est un (φ,G_K)-module sur $\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger_{\mathrm{rig}}$, alors $V_{a,h}$ est stable par G_K et donc $V_{a,h}$ appartient à la catégorie $\mathrm{Rep}(a,h)$ définie dans [**Ber08**, §3.2] (c'est la catégorie dont les objets sont les $\mathbf{Q}_{p^h}$-espaces vectoriels $V_{a,h}$ de dimension finie, munis d'une action semi-linéaire de G_K et d'un frobenius lui aussi semi-linéaire $\varphi: V_{a,h}\to V_{a,h}$ qui commute à G_K et qui vérifie $\varphi^h=p^a$) et on a :

Proposition 1.3. — *Le foncteur $V_{a,h}\mapsto\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger_{\mathrm{rig}}\otimes_{\mathbf{Q}_{p^h}}V_{a,h}$ réalise une équivalence de catégories entre la catégorie $\mathrm{Rep}(a,h)$ et celle des (φ,G_K)-modules sur $\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger_{\mathrm{rig}}$ qui sont isoclines de pente a/h.*

En ce qui concerne les (φ,G_K)-modules non nécessairement isoclines, Kedlaya a montré le résultat ci-dessous (voir [**Ked05**, §4.5]).

Théorème 1.4. — *Si $\widetilde{\mathrm{D}}$ est un φ-module sur $\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger_{\mathrm{rig}}$, alors il existe une unique filtration $0=\widetilde{\mathrm{D}}_0\subset\widetilde{\mathrm{D}}_1\subset\cdots\subset\widetilde{\mathrm{D}}_\ell=\widetilde{\mathrm{D}}$ par des sous-φ-modules saturés, telle que :*

(1) *pour tout $1\leqslant i\leqslant\ell$, le quotient $\widetilde{\mathrm{D}}_i/\widetilde{\mathrm{D}}_{i-1}$ est isocline ;*

(2) *si l'on appelle s_i la pente de $\widetilde{\mathrm{D}}_i/\widetilde{\mathrm{D}}_{i-1}$, alors $s_1<s_2<\cdots<s_\ell$.*

De plus, cette filtration est scindée (décomposition de Dieudonné-Manin), mais non canoniquement.

Le fait que cette filtration est canonique implique que si $\widetilde{\mathrm{D}}$ est un (φ,G_K)-module sur $\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger_{\mathrm{rig}}$, alors chacun des crans de la filtration est stable par G_K et est donc aussi un (φ,G_K)-module. En revanche, il n'est en général pas possible de scinder la filtration de manière compatible à l'action de G_K (ceci dit, c'est sans doute possible si $\widetilde{\mathrm{D}}$ est de de Rham, voir la décomposition de Dieudonné-Manin de [**Col03**]).

Les rationnels $s_1, \cdots, s_\ell$ construits dans le théorème 1.4 sont par définition les pentes de $\widetilde{\mathrm{D}}$. Si $s \in \mathbf{Q}$, alors $\widetilde{\mathrm{D}}_{\leqslant s}$ et $\widetilde{\mathrm{D}}_{<s}$, les sous-modules maximaux de $\widetilde{\mathrm{D}}$ de pentes $\leqslant s$ et $< s$ sont bien définis et ce sont des (φ, G_K)-modules. On note aussi $\widetilde{\mathrm{D}}_{>s} = \widetilde{\mathrm{D}}/\widetilde{\mathrm{D}}_{\leqslant s}$ et $\widetilde{\mathrm{D}}_{\geqslant s} = \widetilde{\mathrm{D}}/\widetilde{\mathrm{D}}_{<s}$.

Pour terminer, nous aurons besoin de la proposition ci-dessous, qui généralise un peu la proposition 4.1.3 de [**Ked05**].

Proposition 1.5. — *Soit $\widetilde{\mathrm{D}}$ un (φ, G_K)-module sur $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{\mathrm{rig}}$ et $h \geqslant 1$ et $a \in \mathbf{Z}$.*

(1) *Si les pentes de $\widetilde{\mathrm{D}}$ sont $> a/h$, alors $\widetilde{\mathrm{D}}^{\varphi^h = p^a} = 0$;*

(2) *si les pentes de $\widetilde{\mathrm{D}}$ sont $\leqslant a/h$, alors $\widetilde{\mathrm{D}}/(\varphi^h - p^a) = 0$.*

Démonstration. — Cela suit du corollaire 4.1.4 de [**Ked05**] puisque l'on a d'une part $\widetilde{\mathrm{D}}^{\varphi^h = p^a} = \mathrm{Hom}(M_{a,h}, \widetilde{\mathrm{D}})$ et d'autre part $\widetilde{\mathrm{D}}/(\varphi^h - p^a) = \mathrm{Ext}^1(M_{a,h}, \widetilde{\mathrm{D}})$. □

2. Rappels et compléments sur les presque $\mathbf{C}_p$-représentations

Soit $\mathcal{B}(G_K)$ la catégorie dont les objets sont les $\mathbf{Q}_p$-espaces de Banach munis d'une action linéaire et continue de G_K et dont les morphismes sont les applications linéaires continues et G_K-equivariantes, et soit $\mathcal{C}(G_K)$ la sous-catégorie de $\mathcal{B}(G_K)$ constituée des presque $\mathbf{C}_p$-représentations de G_K définies et étudiées dans [**Fon03**]. Rappelons qu'une presque $\mathbf{C}_p$-représentation est un espace de Banach X muni d'une action linéaire et continue de G_K et tel qu'il existe $d \geqslant 0$ et des représentations p-adiques de dimensions finies V_1 et V_2 telles que $X/V_1 = \mathbf{C}_p^d/V_2$. Nous rappelons ici quelques uns des résultats concernant les presque $\mathbf{C}_p$-représentations qui nous serviront dans la suite de cet article.

Par le théorème B de [**Fon03**], la catégorie $\mathcal{C}(G_K)$ est une sous-catégorie stricte de $\mathcal{B}(G_K)$ (c'est-à-dire une sous-catégorie strictement pleine, stable par somme directe, et telle que tout morphisme est strict et a son noyau et son conoyau dans $\mathcal{C}(G_K)$), et $\mathcal{C}(G_K)$ contient toutes les représentations p-adiques de dimension finie et toutes les $\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}$-représentations de longueur finie.

De plus, il existe deux fonctions, la dimension $\dim_{\mathcal{C}(G_K)} : \mathrm{Ob}\, \mathcal{C}(G_K) \to \mathbf{Z}_{\geqslant 0}$ et la hauteur $\mathrm{ht} : \mathrm{Ob}\, \mathcal{C}(G_K) \to \mathbf{Z}$, qui sont additives et caractérisées par $\dim_{\mathcal{C}(G_K)}(\mathbf{C}_p) = 1$ et $\mathrm{ht}(\mathbf{C}_p) = 0$ et $\dim_{\mathcal{C}(G_K)}(\mathbf{Q}_p) = 0$ et $\mathrm{ht}(\mathbf{Q}_p) = 1$. On a par exemple $\dim_{\mathcal{C}(G_K)}(\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}/t^a) = a$ et $\mathrm{ht}(\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}/t^a) = 0$. Une presque $\mathbf{C}_p$-représentation de dimension et de hauteur nulles est elle-même nulle.

Lemme 2.1. — *Si $h \geqslant 1$ et $a \in \mathbf{Z}$, alors $(\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{\mathrm{rig}})^{\varphi^h = p^a}$ est une presque $\mathbf{C}_p$-représentation, qui est de dimension a et de hauteur h si $a \geqslant 0$ et qui est nulle si $a < 0$.*

Démonstration. — La proposition 2.10 de [**Col03**] implique que si $a \geqslant 0$, alors on a une suite exacte :

$$0 \to \mathbf{Q}_{p^h} \cdot t_h^a \to (\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger_{\mathrm{rig}})^{\varphi^h = p^a} \to \mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}/t^a \to 0,$$

où t_h est l'élément construit dans le §2.4 de [**Col03**] (c'est une période d'un groupe de Lubin-Tate associé à $\mathbf{Q}_{p^h}$), et donc $(\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger_{\mathrm{rig}})^{\varphi^h = p^a}$ est bien une presque $\mathbf{C}_p$-représentation et sa dimension se lit sur la suite exacte. □

Proposition 2.2. — *Si $h, k \geqslant 1$ et $a, b \in \mathbf{Z}$, et si $V_{a,h} \in \mathrm{Rep}(a,h)$ est de dimension d sur $\mathbf{Q}_{p^h}$, alors $(\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger_{\mathrm{rig}} \otimes_{\mathbf{Q}_{p^h}} V_{a,h})^{\varphi^k = p^b}$ est une presque $\mathbf{C}_p$-représentation, nulle si $a/h > b/k$, et de dimension $d \cdot (b - ak/h)$ et de hauteur dk sinon.*

Démonstration. — Un calcul immédiat montre que :

$$X = (\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger_{\mathrm{rig}} \otimes_{\mathbf{Q}_{p^h}} V_{a,h})^{\varphi^k = p^b} \subset Y = (\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger_{\mathrm{rig}})^{\varphi^{kh} = p^{bh-ak}} \otimes_{\mathbf{Q}_{p^h}} V_{a,h}$$

et le lemme 2.1 montre que Y est une presque $\mathbf{C}_p$-représentation, qui est nulle si $a/h > b/k$. L'espace Y est muni de l'opérateur φ qui est continu et commute à l'action de G_K. Comme $\mathcal{C}(G_K)$ est une sous-catégorie pleine de $\mathcal{B}(G_K)$, l'espace $X = Y^{\varphi^k - p^b}$ est lui-même un objet de $\mathcal{C}(G_K)$.

Observons que si $a/h \leqslant b/k$, alors $\dim_{\mathcal{C}(G_K)}(Y) = d(bh - ak)$ et $\mathrm{ht}(Y) = dkh$ par le lemme 2.1 et comme on a un isomorphisme $Y \simeq \mathbf{Q}_{p^{kh}} \otimes_{\mathbf{Q}_{p^k}} X$, on trouve que $\dim_{\mathcal{C}(G_K)}(X) = d(bh - ak)/h$ et que $\mathrm{ht}(X) = dk$ (notons que par la remarque 3.2.2 de [**Ber08**], d est divisible par h). □

Proposition 2.3. — *Si $h \geqslant 1$ et $a \in \mathbf{Z}$, et si $V_{a,h} \in \mathrm{Rep}(a,h)$ est de dimension d sur $\mathbf{Q}_{p^h}$, alors la représentation $X^1(V_{a,h})$ définie par :*

$$X^1(V_{a,h}) = \frac{\mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}_{p^h}} V_{a,h}}{\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}_{p^h}} V_{a,h} + (\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger_{\mathrm{rig}}[1/t] \otimes_{\mathbf{Q}_{p^h}} V_{a,h})^{\varphi=1}}$$

est une presque $\mathbf{C}_p$-représentation, nulle si $a \leqslant 0$ et de dimension da/h et de hauteur $-d$ sinon.

Démonstration. — Si $a \leqslant 0$ et si $\ell \geqslant 0$, alors un petit calcul et la proposition 2.11 de [**Col03**] impliquent qu'on a un morceau de suite exacte :

$$0 \to (\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger_{\mathrm{rig}} \otimes_{\mathbf{Q}_{p^h}} V_{a,h})^{\varphi=1} \to (t^{-\ell}\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger_{\mathrm{rig}} \otimes_{\mathbf{Q}_{p^h}} V_{a,h})^{\varphi=1} \to (t^{-\ell}\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}/\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}) \otimes_{\mathbf{Q}_{p^h}} V_{a,h},$$

et on a $(t^{-\ell}\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger_{\mathrm{rig}} \otimes_{\mathbf{Q}_{p^h}} V_{a,h})^{\varphi=1} = t^{-\ell}(\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger_{\mathrm{rig}} \otimes_{\mathbf{Q}_{p^h}} V_{a,h})^{\varphi=p^\ell}$. Par la proposition 2.2, les deux premiers termes sont de dimensions $-da/h$ et $d \cdot (\ell - a/h)$ et de hauteurs d et d ce qui fait que la flèche de droite est en fait surjective et donc :

$$\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}_{p^h}} V_{a,h} + (t^{-\ell}\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger_{\mathrm{rig}} \otimes_{\mathbf{Q}_{p^h}} V_{a,h})^{\varphi=1} = t^{-\ell}\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}_{p^h}} V_{a,h}.$$

On déduit des calculs précédents que si $j \geqslant 0$ vérifie $j - a/h \geqslant 0$, alors pour tout $\ell \gg 0$, on a :

$$t^{-j}\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{+} \otimes_{\mathbf{Q}_{p^h}} V_{a,h} + (t^{-\ell}\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}^{\dagger} \otimes_{\mathbf{Q}_{p^h}} V_{a,h})^{\varphi=1} = t^{-\ell}\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{+} \otimes_{\mathbf{Q}_{p^h}} V_{a,h},$$

et donc :

$$t^{-j}\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{+} \otimes_{\mathbf{Q}_{p^h}} V_{a,h} + (\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}^{\dagger}[1/t] \otimes_{\mathbf{Q}_{p^h}} V_{a,h})^{\varphi=1} = \mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}_{p^h}} V_{a,h},$$

ce qui fait que l'application :

$$\frac{t^{-j}\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{+} \otimes_{\mathbf{Q}_{p^h}} V_{a,h}}{\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{+} \otimes_{\mathbf{Q}_{p^h}} V_{a,h} + (t^{-j}\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}^{\dagger} \otimes_{\mathbf{Q}_{p^h}} V_{a,h})^{\varphi=1}} \to \frac{\mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}_{p^h}} V_{a,h}}{\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{+} \otimes_{\mathbf{Q}_{p^h}} V_{a,h} + (\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}^{\dagger}[1/t] \otimes_{\mathbf{Q}_{p^h}} V_{a,h})^{\varphi=1}}$$

est un isomorphisme et que $X^1(V_{a,h})$ s'identifie au conoyau de l'application :

$$(t^{-j}\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}^{\dagger} \otimes_{\mathbf{Q}_{p^h}} V_{a,h})^{\varphi=1} \to (t^{-j}\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{+}/\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{+}) \otimes_{\mathbf{Q}_{p^h}} V_{a,h}.$$

Comme il s'agit d'un morphisme de presque $\mathbf{C}_p$-représentations, ce conoyau est aussi une presque $\mathbf{C}_p$-représentation, et si $a \leqslant 0$, alors on peut prendre $j = 0$ et $X^1(V_{a,h})$ est nul. Si $a \geqslant 1$, alors $(\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}^{\dagger} \otimes_{\mathbf{Q}_{p^h}} V_{a,h})^{\varphi=1} = 0$ et on a la suite exacte :

$$0 \to (t^{-j}\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}^{\dagger} \otimes_{\mathbf{Q}_{p^h}} V_{a,h})^{\varphi=1} \to (t^{-j}\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{+}/\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{+}) \otimes_{\mathbf{Q}_{p^h}} V_{a,h} \to X^1(V_{a,h}) \to 0,$$

ce qui fait que $\dim_{\mathcal{C}(G_K)} X^1(V_{a,h}) = dj - d(j-a/h) = da/h$ et que $\mathrm{ht}(X^1(V_{a,h})) = -d$. □

Proposition 2.4. — *Si V est une représentation p-adique de G_K, si S est une presque $\mathbf{C}_p$-représentation de G_K et si $E \in \mathcal{B}(G_K)$ est une extension de V par S, alors :*

(1) *E est elle-même une presque $\mathbf{C}_p$-représentation ;*

(2) *il existe un $\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel de dimension finie $X \subset E$ stable par G_K qui s'envoie surjectivement sur V.*

Démonstration. — Le (1) suit de la proposition 6.7 de [**Fon03**]. Par le corollaire du §5.2 de [**Fon03**], la suite exacte $0 \to S \to E \to V \to 0$ est presque scindée ce qui veut dire qu'il existe une représentation de dimension finie $W \subset S$ telle que la suite $0 \to S/W \to E/W \to V \to 0$ est scindée, disons par $s : V \to E/W$. Pour montrer le (2), il suffit de prendre pour X l'image inverse de $s(V)$ dans E. □

3. Les presque $\mathbf{C}_p$-représentations associées aux B-paires

Si W est une B-paire, alors on pose $X^0(W) = W_e \cap W_{\mathrm{dR}}^{+} \subset W_{\mathrm{dR}}$ et $X^1(W) = W_{\mathrm{dR}}/(W_e + W_{\mathrm{dR}}^{+})$. Ces espaces sont donc le noyau et le conoyau de l'application naturelle $W_e \to W_{\mathrm{dR}}/W_{\mathrm{dR}}^{+}$. L'objet de ce paragraphe est de montrer le théorème ci-dessous.

Théorème 3.1. — *Si W est une B-paire, et si $\widetilde{\mathrm{D}} = \widetilde{\mathrm{D}}(W)$, alors :*

(1) *$X^0(W) \simeq \widetilde{\mathrm{D}}^{\varphi=1}$ et $X^1(W) \simeq \widetilde{\mathrm{D}}/(1-\varphi)$;*

(2) $X^0(W)$ *et* $X^1(W)$ *sont deux presque* $\mathbf{C}_p$*-représentations ;*
(3) $\dim_{\mathcal{C}(G_K)} X^0(W) = -\deg(\widetilde{\mathrm{D}}_{\leqslant 0})$ *et* $\mathrm{ht}(X^0(W)) = \mathrm{rg}(\widetilde{\mathrm{D}}_{\leqslant 0})$ *;*
(4) $\dim_{\mathcal{C}(G_K)} X^1(W) = \deg(\widetilde{\mathrm{D}}_{>0})$ *et* $\mathrm{ht}(X^1(W)) = -\mathrm{rg}(\widetilde{\mathrm{D}}_{>0})$.

Avant de pouvoir montrer ce théorème, nous allons devoir établir quelques résultats intermédiaires. Dans la suite, il est plus commode de travailler avec des (φ, G_K)-modules sur $\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger_{\mathrm{rig}}$ qu'avec des B-paires et on pose donc $X^i(\widetilde{\mathrm{D}}) = X^i(W(\widetilde{\mathrm{D}}))$ pour $i = 0$, 1.

Proposition 3.2. — *Si* $\widetilde{\mathrm{D}}$ *est un* (φ, G_K)*-module sur* $\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger_{\mathrm{rig}}$*, alors* $X^0(\widetilde{\mathrm{D}}) = \widetilde{\mathrm{D}}^{\varphi=1}$.

Démonstration. — C'est l'occasion de rappeler que par la définition donnée dans la proposition 2.2.6 de [**Ber08**], on a $W_e(\widetilde{\mathrm{D}}) = (\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger_{\mathrm{rig}}[1/t] \otimes_{\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger_{\mathrm{rig}}} \widetilde{\mathrm{D}})^{\varphi=1}$ et $W^+_{\mathrm{dR}}(\widetilde{\mathrm{D}}) = \mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}} \otimes^{\iota_n}_{\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger r_n}_{\mathrm{rig}}} \widetilde{\mathrm{D}}^{r_n}$ pour $n \gg 0$. Si $\{f_i\}_{i=1}^d$ est une base de $\widetilde{\mathrm{D}}$ et si $y = \sum_{i=1}^d b_i \otimes f_i \in W_e$ a la propriété que :

$$y = \varphi^{-n}(y) = \sum_{i=1}^d \varphi^{-n}(b_i) \otimes \varphi^{-n}(f_i) \in \mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}} \otimes^{\iota_n}_{\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger r_n}_{\mathrm{rig}}} \widetilde{\mathrm{D}}^{r_n}$$

pour tout $n \gg 0$, c'est donc que $\varphi^{-n}(b_i) \in \mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}$ pour tout $n \gg 0$ et on est donc ramené à montrer que si $b \in \widetilde{\mathbf{B}}^\dagger_{\mathrm{rig}}[1/t]$ vérifie $\varphi^{-n}(b) \in \mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}$ pour tout $n \gg 0$, alors $b \in \widetilde{\mathbf{B}}^\dagger_{\mathrm{rig}}$. Si $h \geqslant 1$ est tel que $t^h b \in \widetilde{\mathbf{B}}^\dagger_{\mathrm{rig}}$, alors $\theta \circ \iota_n(t^h b) = 0$ pour tout $n \gg 0$ et par le lemme 1.1, $t^h b \in t \cdot \widetilde{\mathbf{B}}^\dagger_{\mathrm{rig}}$ ce qui fait que l'on peut diminuer h de 1 et finalement que $b \in \widetilde{\mathbf{B}}^\dagger_{\mathrm{rig}}$. □

Proposition 3.3. — *Si* $\widetilde{\mathrm{D}}$ *est un* (φ, G_K)*-module sur* $\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger_{\mathrm{rig}}$*, alors* $X^1(\widetilde{\mathrm{D}}) = \widetilde{\mathrm{D}}/(1-\varphi)$.

Démonstration. — Si l'on a une suite exacte du type $0 \to \widetilde{\mathrm{D}}' \to \widetilde{\mathrm{D}} \to \widetilde{\mathrm{D}}'' \to 0$, alors le lemme du serpent appliqué au diagramme :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & W_e(\widetilde{\mathrm{D}}') \oplus W^+_{\mathrm{dR}}(\widetilde{\mathrm{D}}') \arrow[r] \arrow[d] & W_e(\widetilde{\mathrm{D}}) \oplus W^+_{\mathrm{dR}}(\widetilde{\mathrm{D}}) \arrow[r] \arrow[d] & W_e(\widetilde{\mathrm{D}}'') \oplus W^+_{\mathrm{dR}}(\widetilde{\mathrm{D}}'') \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & W_{\mathrm{dR}}(\widetilde{\mathrm{D}}') \arrow[r] & W_{\mathrm{dR}}(\widetilde{\mathrm{D}}) \arrow[r] & W_{\mathrm{dR}}(\widetilde{\mathrm{D}}'') \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

nous donne une suite exacte :

$$0 \to X^0(\widetilde{\mathrm{D}}') \to X^0(\widetilde{\mathrm{D}}) \to X^0(\widetilde{\mathrm{D}}'') \to X^1(\widetilde{\mathrm{D}}') \to X^1(\widetilde{\mathrm{D}}) \to X^1(\widetilde{\mathrm{D}}'') \to 0. \tag{3.1}$$

Si $\widetilde{\mathrm{D}}$ est isocline de pente $\leqslant 0$, alors les propositions 1.3 et 2.3 montrent que $X^1(\widetilde{\mathrm{D}}) = 0$. On déduit du théorème 1.4 et de la suite exacte 3.1 que si $\widetilde{\mathrm{D}}$ est un (φ, G_K)-module, alors $X^1(\widetilde{\mathrm{D}}_{\leqslant 0}) = 0$ et donc que l'application $X^1(\widetilde{\mathrm{D}}) \to X^1(\widetilde{\mathrm{D}}_{>0})$ est un ismorphisme.

Le lemme du serpent appliqué au diagramme :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \widetilde{\mathrm{D}}' \arrow[r] \arrow[d, "1-\varphi"] & \widetilde{\mathrm{D}} \arrow[r] \arrow[d, "1-\varphi"] & \widetilde{\mathrm{D}}'' \arrow[r] \arrow[d, "1-\varphi"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \widetilde{\mathrm{D}}' \arrow[r] & \widetilde{\mathrm{D}} \arrow[r] & \widetilde{\mathrm{D}}'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

nous donne une suite exacte :

$$(3.2)\quad 0 \to (\widetilde{\mathrm{D}}')^{\varphi=1} \to \widetilde{\mathrm{D}}^{\varphi=1} \to (\widetilde{\mathrm{D}}'')^{\varphi=1} \to \widetilde{\mathrm{D}}'/(1-\varphi) \to \widetilde{\mathrm{D}}/(1-\varphi) \to \widetilde{\mathrm{D}}''/(1-\varphi) \to 0.$$

On en déduit comme ci-dessus, en utilisant cette fois le (2) de la proposition 1.5, que si $\widetilde{\mathrm{D}}$ est un (φ, G_K)-module, alors l'application $\widetilde{\mathrm{D}}/(1-\varphi) \to \widetilde{\mathrm{D}}_{>0}/(1-\varphi)$ est un isomorphisme.

Il suffit donc de montrer la proposition sous l'hypothèse supplémentaire que les pentes de $\widetilde{\mathrm{D}}$ sont > 0. La proposition A.4 de [**Ked07**] nous dit qu'il existe alors deux (φ, G_K)-modules $\widetilde{\mathrm{D}}_{\mathrm{et}}$ et $\widetilde{\mathrm{M}}$ tels que $\widetilde{\mathrm{D}}_{\mathrm{et}}$ est étale (c'est-à-dire isocline de pente nulle) et tels que l'on a une suite exacte :

$$0 \to \widetilde{\mathrm{D}} \to \widetilde{\mathrm{D}}_{\mathrm{et}} \to \widetilde{\mathrm{M}} \to 0.$$

En utilisant la proposition 3.2 et les deux suites exactes ci-dessus, ainsi que le fait que $X^1(\widetilde{\mathrm{D}}_{\mathrm{et}}) = 0$ et $\widetilde{\mathrm{D}}_{\mathrm{et}}/(1-\varphi) = 0$, on trouve que l'on a :

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & \longrightarrow & X^0(\widetilde{\mathrm{D}}) & \longrightarrow & X^0(\widetilde{\mathrm{D}}_{\mathrm{et}}) & \longrightarrow & X^0(\widetilde{\mathrm{M}}) & \longrightarrow & X^1(\widetilde{\mathrm{D}}) & \longrightarrow & 0 \\ & & \| & & \| & & \| & & & & \\ 0 & \longrightarrow & \widetilde{\mathrm{D}}^{\varphi=1} & \longrightarrow & (\widetilde{\mathrm{D}}_{\mathrm{et}})^{\varphi=1} & \longrightarrow & (\widetilde{\mathrm{M}})^{\varphi=1} & \longrightarrow & \widetilde{\mathrm{D}}/(1-\varphi) & \longrightarrow & 0, \end{array}$$

ce qui fait que l'on a bien $X^1(\widetilde{\mathrm{D}}) \simeq \widetilde{\mathrm{D}}/(1-\varphi)$. □

Remarque 3.4. — L'isomorphisme $\alpha : \widetilde{\mathrm{D}}/(1-\varphi) \to X^1(\widetilde{\mathrm{D}})$ peut être décrit explicitement de la manière suivante (c'est un exercice de « chasse au diagramme » que nous laissons au lecteur). Par le théorème 1.4 ci-dessus et le corollaire 1.1.6 de [**Ber08**], l'application $1-\varphi : \widetilde{\mathrm{D}}[1/t] \to \widetilde{\mathrm{D}}[1/t]$ est surjective et si $x \in \widetilde{\mathrm{D}}$, il existe donc $y \in \widetilde{\mathrm{D}}[1/t]$ tel que $(1-\varphi)y = x$. Si $n \gg 0$, alors on a $\varphi^{-n}(y) \in W_{\mathrm{dR}}(\widetilde{\mathrm{D}})$ et $\alpha(x)$ est par définition l'image de $\varphi^{-n}(y)$ dans $X^1(\widetilde{\mathrm{D}})$.

Vérifions que α est bien définie. Si l'on avait choisi $y' \in \widetilde{\mathrm{D}}[1/t]$ tel que $(1-\varphi)y' = x$, alors $y - y' \in (\widetilde{\mathrm{D}}[1/t])^{\varphi=1}$ et alors $\varphi^{-n}(y)$ et $\varphi^{-n}(y')$ ont même image modulo $W_e(\widetilde{\mathrm{D}})$ et donc $\alpha(x)$ ne dépend pas du choix de y. Ensuite, on a $\varphi^{-(n+1)}(y) - \varphi^{-n}(y) = \varphi^{-(n+1)}(1-\varphi)y = \varphi^{-(n+1)}(x) \in W_{\mathrm{dR}}^+(\widetilde{\mathrm{D}})$ et donc $\alpha(x)$ ne dépend pas du choix de $n \gg 0$ ce qui fait que $\alpha(x)$ est bien défini.

On peut voir directement que α est injective. Si $\alpha(x) = 0$, c'est que pour tout $n \gg 0$ on peut écrire $\varphi^{-n}(y) = z_n + w_n$ avec $z_n \in W_{\mathrm{dR}}^+(\widetilde{\mathrm{D}})$ et $w_n \in W_e(\widetilde{\mathrm{D}})$ et donc $\varphi^{-n}(y - w_n) \in W_{\mathrm{dR}}^+(\widetilde{\mathrm{D}})$. On a alors :

$$\varphi^{-(n+1)}(y - w_{n+1}) - \varphi^{-(n+1)}(\varphi(y) - \varphi(w_n)) = \varphi^{-(n+1)}(x) - (w_{n+1} - w_n) \in W_{\mathrm{dR}}^+(\widetilde{\mathrm{D}}),$$

ce qui fait (comme $\varphi^{-(n+1)}(x) \in W_{\mathrm{dR}}^+(\widetilde{\mathrm{D}})$) que $w_{n+1} - w_n \in W_{\mathrm{dR}}^+(\widetilde{\mathrm{D}}) \cap W_e(\widetilde{\mathrm{D}}) = \widetilde{\mathrm{D}}^{\varphi=1}$ par la proposition 3.2. Quitte à modifier w_{n+1} par un élément de $\widetilde{\mathrm{D}}^{\varphi=1}$, on peut donc supposer que w_n ne dépend pas de n, ce qui fait qu'il existe $w \in (\widetilde{\mathrm{D}}[1/t])^{\varphi=1}$ tel que $\varphi^{-n}(y-w) \in W_{\mathrm{dR}}^+(\widetilde{\mathrm{D}})$ pour tout $n \gg 0$. Si l'on écrit $y - w = \sum_{i=1}^d b_i \otimes f_i$ avec $b_i \in \widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}^{\dagger}[1/t]$

comme dans la démonstration de la proposition 3.2, on trouve alors que $\varphi^{-n}(b_i) \in \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ pour tout $n \gg 0$ ce qui fait que $y - w \in \widetilde{\mathrm{D}}$ et donc que $x = (1-\varphi)y \in (1-\varphi)\widetilde{\mathrm{D}}$ et donc que α est injective. En revanche, le fait que α est surjective est moins évident et suit des calculs sous-jacents à la proposition 2.3.

Proposition 3.5. — *Soit $\widetilde{\mathrm{D}}$ un (φ, G_K)-module sur $\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger_{\mathrm{rig}}$, s sa plus grande pente, $k \geqslant 1$ et $b \in \mathbf{Z}$.*

(1) *Il existe deux (φ, G_K)-modules $\widetilde{\mathrm{D}}^1$ et $\widetilde{\mathrm{D}}^2$ sur $\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger_{\mathrm{rig}}$ qui sont isoclines de pente s et tels que $\widetilde{\mathrm{D}} = (\widetilde{\mathrm{D}}_{<s} \oplus \widetilde{\mathrm{D}}^1)/\widetilde{\mathrm{D}}^2$;*

(2) *le $\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel $\widetilde{\mathrm{D}}^{\varphi^k = p^b}$ est une presque $\mathbf{C}_p$-représentation.*

Démonstration. — La démonstration se fait par récurrence sur le nombre $\ell(\widetilde{\mathrm{D}})$ de pentes de $\widetilde{\mathrm{D}}$. Si $\ell(\widetilde{\mathrm{D}}) = 1$, alors $\widetilde{\mathrm{D}}$ est isocline de pente $s = a/h$, et pour montrer le (1) il suffit de prendre $\widetilde{\mathrm{D}}^1 = \widetilde{\mathrm{D}}$ et $\widetilde{\mathrm{D}}^2 = 0$ et le (2) suit de la proposition 1.3 qui dit que $\widetilde{\mathrm{D}} = \widetilde{\mathbf{B}}^\dagger_{\mathrm{rig}} \otimes_{\mathbf{Q}_{p^h}} V_{a,h}$ et de la proposition 2.2 qui dit que $(\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger_{\mathrm{rig}} \otimes_{\mathbf{Q}_{p^h}} V_{a,h})^{\varphi^k = p^b}$ est une presque $\mathbf{C}_p$-représentation.

Sinon, soit $s = a/h$ la plus grande pente de $\widetilde{\mathrm{D}}$ ce qui fait que l'on a une suite exacte $0 \to \widetilde{\mathrm{D}}_{<s} \to \widetilde{\mathrm{D}} \to \widetilde{\mathrm{D}}_s \to 0$ où $\ell(\widetilde{\mathrm{D}}_{<s}) = \ell(\widetilde{\mathrm{D}}) - 1$. En prenant les invariants par $\varphi^h - p^a$, on trouve :

$$0 \to \widetilde{\mathrm{D}}_{<s}^{\varphi^h = p^a} \to \widetilde{\mathrm{D}}^{\varphi^h = p^a} \to \widetilde{\mathrm{D}}_s^{\varphi^h = p^a} \to \widetilde{\mathrm{D}}_{<s}/(\varphi^h - p^a).$$

Par le (2) de la proposition 1.5, on a $\widetilde{\mathrm{D}}_{<s}/(\varphi^h - p^a) = 0$; par ailleurs, $\widetilde{\mathrm{D}}_{<s}^{\varphi^h = p^a}$ est une presque $\mathbf{C}_p$-représentation par hypothèse de récurrence et enfin par la proposition 1.3, on peut écrire $\widetilde{\mathrm{D}}_s = \widetilde{\mathbf{B}}^\dagger_{\mathrm{rig}} \otimes_{\mathbf{Q}_{p^h}} V_{a,h}$ et alors $\widetilde{\mathrm{D}}_s^{\varphi^h = p^a} = V_{a,h}$ est de dimension finie sur $\mathbf{Q}_p$. On peut alors appliquer le (2) de la proposition 2.4 qui nous fournit $X \subset \widetilde{\mathrm{D}}^{\varphi^h = p^a}$ de dimension finie qui s'envoie surjectivement sur $V_{a,h}$. Quitte à remplacer X par le $\mathbf{Q}_{p^h}$-espace vectoriel qu'il engendre, on peut supposer que X est un $\mathbf{Q}_{p^h}$-espace vectoriel. Posons alors $\widetilde{\mathrm{D}}^1 = \widetilde{\mathbf{B}}^\dagger_{\mathrm{rig}} \otimes_{\mathbf{Q}_{p^h}} X$; il est isocline de pente $s = a/h$ puisque $X \subset \widetilde{\mathrm{D}}^{\varphi^h = p^a}$ et on a une application naturelle : $\widetilde{\mathrm{D}}_{<s} \oplus \widetilde{\mathrm{D}}^1 \to \widetilde{\mathrm{D}}$ qui est surjective. Son noyau $\widetilde{\mathrm{D}}^2$ s'injecte dans $\widetilde{\mathrm{D}}^1$ et ses pentes sont donc $\geqslant s$ (par le (a) de la proposition 4.5.14 de [**Ked05**]). Par ailleurs, le lemme 3.4.3 de [**Ked05**] appliqué à la suite $0 \to \widetilde{\mathrm{D}}^2 \to \widetilde{\mathrm{D}}_{<s} \oplus \widetilde{\mathrm{D}}^1 \to \widetilde{\mathrm{D}} \to 0$ implique que :

$$\deg(\widetilde{\mathrm{D}}^2) = \deg(\widetilde{\mathrm{D}}_{<s}) + \deg(\widetilde{\mathrm{D}}^1) - \deg(\widetilde{\mathrm{D}}) = \deg(\widetilde{\mathrm{D}}^1) - \deg(\widetilde{\mathrm{D}}_s) = s \cdot \mathrm{rg}(\widetilde{\mathrm{D}}^2),$$

ce qui fait que $\widetilde{\mathrm{D}}^2$ est nécessairement isocline de pente s, ce qui montre le (1).

Pour montrer le (2), posons $r = b/k$ et considérons la suite exacte :

$$0 \to \widetilde{\mathrm{D}}_{\leqslant r} \to \widetilde{\mathrm{D}} \to \widetilde{\mathrm{D}}_{>r} \to 0.$$

En prenant les invariants par $\varphi^k - p^b$, on trouve $0 \to \widetilde{\mathrm{D}}_{\leqslant r}^{\varphi^k = p^b} \to \widetilde{\mathrm{D}}^{\varphi^k = p^b} \to \widetilde{\mathrm{D}}_{>r}^{\varphi^k = p^b}$ et par le (1) de la proposition 1.5, on a $\widetilde{\mathrm{D}}_{>r}^{\varphi^k = p^b} = 0$ ce qui fait que l'application naturelle

$\widetilde{\mathrm{D}}_{\leqslant r}^{\varphi^k=p^b} \to \widetilde{\mathrm{D}}^{\varphi^k=p^b}$ est un isomorphisme. On peut donc supposer que les pentes de $\widetilde{\mathrm{D}}$ sont $\leqslant r$. Dans ce cas, le (1) nous donne une suite exacte :

$$0 \to \widetilde{\mathrm{D}}^2 \to \widetilde{\mathrm{D}}_{<s} \oplus \widetilde{\mathrm{D}}^1 \to \widetilde{\mathrm{D}} \to 0,$$

et en prenant les invariants par $\varphi^k - p^b$, on trouve :

$$0 \to (\widetilde{\mathrm{D}}^2)^{\varphi^k=p^b} \to \widetilde{\mathrm{D}}_{<s}^{\varphi^k=p^b} \oplus (\widetilde{\mathrm{D}}^1)^{\varphi^k=p^b} \to \widetilde{\mathrm{D}}^{\varphi^k=p^b} \to \widetilde{\mathrm{D}}^2/(\varphi^k - p^b),$$

Comme $s \leqslant r$, le (2) de la proposition 1.1.4 nous dit que $\widetilde{\mathrm{D}}^2/(\varphi^k - p^b) = 0$. Par ailleurs, $(\widetilde{\mathrm{D}}^1)^{\varphi^k=p^b}$ et $(\widetilde{\mathrm{D}}^2)^{\varphi^k=p^b}$ et $\widetilde{\mathrm{D}}_{<s}^{\varphi^k=p^b}$ sont trois presque $\mathbf{C}_p$-représentations par hypothèse de récurrence ce qui fait que $\widetilde{\mathrm{D}}^{\varphi^k=p^b}$ est elle-même une presque $\mathbf{C}_p$-représentation. □

Démonstration du théorème 3.1. — Le (1) fait l'objet des propositions 3.2 et 3.3. Montrons le (2). Le fait que $X^0(W)$ est une presque $\mathbf{C}_p$-représentation suit de la proposition 3.2 qui dit que $X^0(W) = \widetilde{\mathrm{D}}^{\varphi=1}$ et du (2) de la proposition 3.5 appliquée à $b/k = 0/1$.

Le fait que $X^1(W)$ est une presque $\mathbf{C}_p$-représentation se démontre par récurrence sur le nombre de pentes de $\widetilde{\mathrm{D}}$. Si $\widetilde{\mathrm{D}}$ est isocline, alors le résultat suit des propositions 1.3 et 2.3. Sinon, le (1) de la proposition 3.5 nous fournit une suite exacte $0 \to \widetilde{\mathrm{D}}^2 \to \widetilde{\mathrm{D}}_{<s} \oplus \widetilde{\mathrm{D}}^1 \to \widetilde{\mathrm{D}} \to 0$ où $\widetilde{\mathrm{D}}^1$ et $\widetilde{\mathrm{D}}^2$ et $\widetilde{\mathrm{D}}_{<s}$ ont chacun moins de pentes que $\widetilde{\mathrm{D}}$ ce qui permet de montrer par récurrence que $X^1(\widetilde{\mathrm{D}})$ est une presque $\mathbf{C}_p$-représentation en utilisant la suite exacte 3.1 :

$$0 \to X^0(\widetilde{\mathrm{D}}^2) \to X^0(\widetilde{\mathrm{D}}_{<s} \oplus \widetilde{\mathrm{D}}^1) \to X^0(\widetilde{\mathrm{D}}) \to X^1(\widetilde{\mathrm{D}}^2) \to X^1(\widetilde{\mathrm{D}}_{<s} \oplus \widetilde{\mathrm{D}}^1) \to X^1(\widetilde{\mathrm{D}}) \to 0.$$

Pour montrer le (3), observons que d'une part, l'application $X^0(\widetilde{\mathrm{D}}_{\leqslant 0}) \to X^0(\widetilde{\mathrm{D}})$ est un isomorphisme et d'autre part si $s \leqslant 0$, alors $X^1(\widetilde{\mathrm{D}}_{<s}) = 0$ et on a donc une suite exacte :

$$0 \to X^0(\widetilde{\mathrm{D}}_{<s}) \to X^0(\widetilde{\mathrm{D}}) \to X^0(\widetilde{\mathrm{D}}_s) \to 0.$$

La dimension étant additive sur les suites exactes, on se ramène au cas où $\widetilde{\mathrm{D}}$ est isocline, qui résulte alors de la proposition 1.3 et de la proposition 2.2. Le (4) se démontre exactement de la même manière, en utilisant la proposition 2.3. Ceci termine la démonstration du théorème. □

Remarque 3.6. — Notons pour référence les propriétés suivantes de X^0 et X^1 :

(1) les applications $X^0(\widetilde{\mathrm{D}}_{\leqslant 0}) \to X^0(\widetilde{\mathrm{D}})$ et $X^1(\widetilde{\mathrm{D}}) \to X^1(\widetilde{\mathrm{D}}_{>0})$ sont des isomorphismes ;

(2) on a $X^0(\widetilde{\mathrm{D}}) = 0$ si et seulement si les pentes de $\widetilde{\mathrm{D}}$ sont toutes > 0 et on a $X^1(\widetilde{\mathrm{D}}) = 0$ si et seulement si les pentes de $\widetilde{\mathrm{D}}$ sont toutes $\leqslant 0$.

On pourra comparer ces constructions au « complexe fondamental » du §5 de [**CF00**].

4. Pleine fidélité pour les $\mathrm{B_e}$-représentations

L'objet de ce pararaphe est de démontrer le théorème suivant, qui répond par l'affirmative à une question de Fontaine (voir la remarque en bas de la page 375 de [**Fon03**]).

Théorème 4.1. — *Le foncteur d'oubli de la catégorie des $\mathbf{B}_{\mathrm{e}}$-représentations de G_K vers la catégorie des $\mathbf{Q}_p$-espaces vectoriels topologiques avec action linéaire et continue de G_K est pleinement fidèle.*

Avant de montrer ce théorème, définissons la topologie naturelle sur une $\mathbf{B}_{\mathrm{e}}$-représentation. Rappelons que si W_e est une $\mathbf{B}_{\mathrm{e}}$-représentation et que si l'on pose $W_{\mathrm{dR}} = \mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbf{B}_{\mathrm{e}}} W_e$, alors (cf. le début du §3.5 de [**Fon04**]) la $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$-représentation W_{dR} admet un $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$-réseau W_{dR}^+ stable par G_K. Si $j \geqslant 0$, alors $W_e^j = W_e \cap t^{-j} W_{\mathrm{dR}}^+$ est, par les résultats du paragraphe précédent, une presque $\mathbf{C}_p$-représentation, et c'est notamment un objet de $\mathcal{B}(G_K)$. Comme on a $W_e = \cup_{j\geqslant 0} W_e^j$, la $\mathbf{B}_{\mathrm{e}}$-représentation W_e est une limite inductive dénombrable d'espaces de Banach et donc un espace LF. Par ailleurs, si l'on choisit un $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$-réseau différent de W_{dR}, alors comme deux tels réseaux sont commensurables, on trouve une structure d'espace LF homéomorphe à la première et la topologie de W_e qui en résulte ne dépend donc pas du choix de W_{dR}^+. La topologie d'une $\mathbf{B}_{\mathrm{e}}$-représentation est alors la topologie d'espace LF que l'on a définie ci-dessus. Dans le cas où $W_e = \mathbf{B}_{\mathrm{e}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$, on retrouve la définition du début du §8.2 de [**Fon03**].

Rappelons que si $f : E \to F$ est une application linéaire continue d'espaces LF avec $E = \cup_{i\geqslant 1} E_i$ et $F = \cup_{j\geqslant 1} F_j$, alors par le théorème de Baire, pour tout i il existe j tel que $f(E_i) \subset F_j$ et que réciproquement, une collection compatible de telles applications définit une application continue d'espaces LF. En particulier, si $f : W_e \to X_e$ est un morphisme de $\mathbf{B}_{\mathrm{e}}$-représentations, alors il est nécessairement continu et le foncteur d'oubli $\mathrm{Rep}_{\mathbf{B}_{\mathrm{e}}}(G_K) \to \mathrm{Rep}_{LF}(G_K)$ est bien défini et il est manifestement fidèle ce qui fait que pour montrer le théorème, il suffit de montrer que toute application continue G_K-équivariante $W_e \to X_e$ est nécessairement $\mathbf{B}_{\mathrm{e}}$-linéaire.

Démonstration du théorème 4.1. — Si $f : W_e \to X_e$ est une application continue G_K-équivariante, alors pour tout $i \geqslant 0$, il existe j tel que $f(W_e \cap t^{-i} W_{\mathrm{dR}}^+) \subset X_e \cap t^{-j} X_{\mathrm{dR}}^+$. Quitte à modifier W_{dR}^+ et X_{dR}^+, on peut supposer que $f(W_e \cap W_{\mathrm{dR}}^+) \subset X_e \cap X_{\mathrm{dR}}^+$ et que les pentes de (W_e, W_{dR}^+) sont $\leqslant 0$. Cette dernière hypothèse implique que les pentes de $(W_e, t^{-i} W_{\mathrm{dR}}^+)$ sont $\leqslant -i$ (rappelons que si $\mathrm{D}(W)$ est le (φ,Γ)-module associé à une B-paire $W = (W_e, W_{\mathrm{dR}}^+)$, alors le (φ,Γ)-module associé à $W = (W_e, t^j W_{\mathrm{dR}}^+)$ est $t^j \mathrm{D}(W)$) et en particulier que si $i \geqslant 0$, alors :

$$\dim_{\mathcal{C}(G_K)}(W_e \cap t^{-i} W_{\mathrm{dR}}^+) - \dim_{\mathcal{C}(G_K)}(W_e \cap W_{\mathrm{dR}}^+) = i \cdot \mathrm{rg}(W)$$

et $\mathrm{ht}(W_e \cap t^{-i}W_{\mathrm{dR}}^+) = \mathrm{ht}(W_e \cap W_{\mathrm{dR}}^+)$ par le (3) du théorème 3.1 ce qui fait que l'on a une suite exacte :

$$0 \to W_e \cap W_{\mathrm{dR}}^+ \to W_e \cap t^{-i}W_{\mathrm{dR}}^+ \to t^{-i}W_{\mathrm{dR}}^+/W_{\mathrm{dR}}^+ \to 0,$$

et que si l'on choisit j tel que $f(W_e \cap t^{-i}W_{\mathrm{dR}}^+) \subset X_e \cap t^{-j}X_{\mathrm{dR}}^+$, alors f induit une application continue et G_K-équivariante $f_{\mathrm{dR}}^{ij} : t^{-i}W_{\mathrm{dR}}^+/W_{\mathrm{dR}}^+ \to t^{-j}X_{\mathrm{dR}}^+/X_{\mathrm{dR}}^+$ puisque l'on a un diagramme :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & W_e \cap W_{\mathrm{dR}}^+ \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & W_e \cap t^{-i}W_{\mathrm{dR}}^+ \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & t^{-i}W_{\mathrm{dR}}^+/W_{\mathrm{dR}}^+ \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & X_e \cap X_{\mathrm{dR}}^+ \arrow[r] & X_e \cap t^{-j}X_{\mathrm{dR}}^+ \arrow[r] & t^{-j}X_{\mathrm{dR}}^+/X_{\mathrm{dR}}^+. &
\end{tikzcd}$$

Le théorème A' de [**Fon03**] implique que f_{dR}^{ij} est $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$-linéaire. On trouve que f induit une application $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$-linéaire $f_{\mathrm{dR}}^i : t^{-i}W_{\mathrm{dR}}^+/W_{\mathrm{dR}}^+ \to X_{\mathrm{dR}}/X_{\mathrm{dR}}^+$ puis en passant à la limite une application $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$-linéaire : $f_{\mathrm{dR}} : W_{\mathrm{dR}}/W_{\mathrm{dR}}^+ \to X_{\mathrm{dR}}/X_{\mathrm{dR}}^+$. Cette application induit elle-même une application $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$-linéaire $W_{\mathrm{dR}}^+ \to X_{\mathrm{dR}}^+$ (en passant au duaux) et donc une application $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$-linéaire $W_{\mathrm{dR}} \to X_{\mathrm{dR}}$; comme $W_e \subset W_{\mathrm{dR}}$ et $X_e \subset X_{\mathrm{dR}}$ on trouve bien que f est $\mathbf{B}_{\mathrm{e}}$-linéaire. □

Références

[Ber02] L. Berger – *Représentations p-adiques et équations différentielles.* Invent. Math. 148 (2002), no. 2, 219–284.

[Ber04] L. Berger – *Equations différentielles p-adiques et (φ, N)-modules filtrés.* Astérisque No. 319 (2008), à paraître.

[Ber08] L. Berger – *Construction de (φ, Γ)-modules : représentations p-adiques et B-paires.* Algebra & Number Theory, 2 (2008), no. 1, 91–120.

[CC98] F. Cherbonnier, P. Colmez – *Représentations p-adiques surconvergentes.* Invent. Math. 133 (1998), no. 3, 581–611.

[Col02] P. Colmez – *Espaces de Banach de dimension finie.* J. Inst. Math. Jussieu 1 (2002), no. 3, 331–439.

[Col03] P. Colmez – *Espaces Vectoriels de dimension finie et représentations de de Rham.* Astérisque No. 319 (2008), à paraître.

[CF00] P. Colmez, J.-M. Fontaine – *Construction des représentations p-adiques semi-stables.* Inv. Math. 140, 2000, 1–43.

[Fon90] J.-M. Fontaine – *Représentations p-adiques des corps locaux I.* The Grothendieck Festschrift, Vol. II, 249–309, Progr. Math. 87, Birkhäuser Boston, Boston, MA 1990.

[Fon94] J.-M. Fontaine – *Le corps des périodes p-adiques.* Astérisque No. 223 (1994), 59–111.

[Fon03] J.-M. Fontaine – *Presque $\mathbf{C}_p$-représentations.* Kazuya Kato's fiftieth birthday. Doc. Math. 2003, Extra Vol., 285–385 (electronic).

[Fon04] J.-M. Fontaine – *Arithmétique des représentations galoisiennes p-adiques.* Cohomologies p-adiques et applications arithmétiques. III. Astérisque No. 295 (2004), xi, 1–115.

[FW79] J.-M. Fontaine, J.-P. Wintenberger – *Le "corps des normes" de certaines extensions algébriques de corps locaux.* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B 288 (1979), no. 6, A367–A370.

[Ked04] K. Kedlaya – *A p-adic local monodromy theorem.* Ann. of Math. (2) 160 (2004), no. 1, 93–184.

[Ked05] K. Kedlaya – *Slope filtrations revisited.* Doc. Math. 10 (2005), 447–525 (electronic).

[Ked07] K. Kedlaya – *Some new directions in p-adic Hodge theory.* Prépublication (2007).

[Win83] J.-P. Wintenberger – *Le corps des normes de certaines extensions infinies des corps locaux ; applications.* Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. 16 (1983), 59–89.

Février 2008, révision janvier 2009

Laurent Berger