REPRÉSENTATIONS POTENTIELLEMENT TRIANGULINES DE DIMENSION 2

par

Laurent Berger & Gaëtan Chenevier

Résumé. — Les deux résultats principaux de cette note sont d'une part que si V est une représentation de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$ de dimension 2 qui est potentiellement trianguline, alors V vérifie au moins une des propriétés suivantes (1) V est trianguline déployée (2) V est une somme de caractères ou une induite (3) V est une représentation de de Rham tordue par un caractère, et d'autre part qu'il existe des représentations de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$ de dimension 2 qui ne sont pas potentiellement triangulines.

Abstract. — The two main results of this note are on the one hand that if V is a 2-dimensional potentially trianguline representation of $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$ then V satisfies at least one of the following properties (1) V is split trianguline (2) V is a direct sum of characters or an induced representation (3) V is a twist of a de Rham representation, and on the other hand that there exists some 2-dimensional representations of $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$ which are not potentially trianguline.

Table des matières

***Classification mathématique par sujets* (2000).** — 11F80; 11F85; 11S20; 14D15; 14F30; 14G22.
Mots clefs. — Représentations triangulines; B-paires; théorie de Hodge p-adique; espaces analytiques; parties fines; déformations universelles.

G. Chenevier est financé par le CNRS.

Introduction

Dans le cadre de la correspondance de Langlands p-adique, Colmez a introduit dans [**Col08**] la notion de représentation p-adique trianguline et a démontré plusieurs propriétés importantes de ces objets. Ses constructions ont été reprises et généralisées par Nakamura dans [**Nak09**]. La définition de Colmez peut se faire en termes des « (φ,Γ)-modules sur l'anneau de Robba » de Fontaine et Kedlaya ou bien en termes de « B-paires ». Dans cette note qui est un complément à [**Col08**] et [**Nak09**], nous avons choisi de travailler avec les B-paires, qui sont plus commodes par certains aspects. A partir de maintenant, K est une extension finie de $\mathbf{Q}_p$ et $G_K = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/K)$.

Les B-paires sont des objets introduits dans [**Ber08**] qui généralisent les représentations p-adiques, et la catégorie des B-paires est alors équivalente à celle des (φ,Γ)-modules sur l'anneau de Robba. Pour définir les B-paires, on utilise les anneaux $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$, $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$ et $\mathbf{B}_{\mathrm{e}} = \mathbf{B}_{\mathrm{cris}}^{\varphi=1}$ de Fontaine. Notons que ces trois anneaux sont filtrés et que leurs gradués respectifs sont $\mathbf{C}_p[t]$, $\mathbf{C}_p[t,t^{-1}]$ et $\{P \in \mathbf{C}_p[t^{-1}]$ tels que $P(0) \in \mathbf{Q}_p\}$.

Si D est un φ-module filtré qui provient de la cohomologie d'un schéma X propre et lisse sur $\mathcal{O}_K$, alors le φ-module sous-jacent ne dépend que de la fibre spéciale de X (c'en est la cohomologie cristalline) alors que la filtration ne dépend que de la fibre générique (c'est la filtration de Hodge de la cohomologie de de Rham, dans laquelle se plonge la cohomologie cristalline). Si $V = V_{\mathrm{cris}}(D)$ et si on note $K_0 = K \cap \mathbf{Q}_p^{\mathrm{nr}}$, alors on voit que $\mathbf{B}_{\mathrm{e}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V = (\mathbf{B}_{\mathrm{cris}} \otimes_{K_0} D)^{\varphi=1}$ ne dépend que de la structure de φ-module de D et de plus, les φ-modules D_1 et D_2 sont isomorphes si et seulement si les $\mathbf{B}_{\mathrm{e}}$-représentations $\mathbf{B}_{\mathrm{e}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V_1$ et $\mathbf{B}_{\mathrm{e}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V_2$ le sont. Par ailleurs, $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+ \otimes_{\mathbf{Q}_p} V = \mathrm{Fil}^0(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{K_0} D)$ et les modules filtrés $K \otimes_{K_0} D_1$ et $K \otimes_{K_0} D_2$ sont isomorphes si et seulement si les $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$-représentations $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+ \otimes_{\mathbf{Q}_p} V_1$ et $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+ \otimes_{\mathbf{Q}_p} V_2$ le sont.

L'idée sous-jacente à la construction des B-paires est d'isoler les phénomènes liés à la « fibre spéciale » et à la « fibre générique » en considérant non pas des représentations p-adiques V, mais des « B-paires » $W = (W_e, W_{dR}^+)$ où W_e est un $\mathbf{B}_{\mathrm{e}}$-module libre muni d'une action semi-linéaire et continue de G_K et où W_{dR}^+ est un $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$-réseau de $W_{dR} = \mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbf{B}_{\mathrm{e}}} W_e$ stable par G_K. Si V est une représentation p-adique, alors $W(V) = (\mathbf{B}_{\mathrm{e}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V, \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+ \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)$ est une B-paire et cette construction permet de plonger la catégorie des représentations p-adiques dans celle strictement plus grande des B-paires.

La définition de Colmez est alors la suivante : si V est une représentation E-linéaire de G_K (ici E est une extension finie de $\mathbf{Q}_p$ qui est un corps de coefficients pour les représentations que l'on considère) alors on peut lui associer comme ci-dessus une B-paire E-linéaire $W(V)$, et on dit que V est trianguline déployée si $W(V)$ est une extension successive de B-paires de rang 1. On dit que V est trianguline s'il existe une extension finie F

de E telle que $F \otimes_E V$ est trianguline déployée (notons cependant que les « triangulines » de Colmez correspondent à nos « triangulines déployées »). On dit que V est potentiellement trianguline s'il existe une extension finie L de K telle que $V|_{G_L}$ est trianguline. Le premier résultat de cette note (le théorème 3.1) est le suivant.

Théorème A. — *Si V est une représentation E-linéaire de $G_{\mathbf{Q}_p}$ de dimension 2 qui est potentiellement trianguline, alors V vérifie au moins une des propriétés suivantes :*

1. *V est trianguline déployée ;*
2. *V est une somme de caractères ou une induite ;*
3. *V est une représentation de de Rham tordue par un caractère.*

La démonstration du théorème A se fait en utilisant de la descente galoisienne. Les B-paires ont des pentes (les pentes de frobenius des (φ, Γ)-modules correspondants) et des poids (qui généralisent les poids de Hodge-Tate des représentations p-adiques). La combinatoire des pentes et des poids est assez rigide et si V est une représentation potentiellement trianguline, soit sa triangulation descend et on est dans le cas (1), soit il y a des symétries supplémentaires suffisantes pour montrer qu'on est dans le cas (2) ou (3).

Les conditions (1), (2) et (3) du théorème A ne sont pas du tout mutuellement exclusives, et en fait pour tout $S \subset \{1, 2, 3\}$ non vide, il existe une représentation V qui vérifie exactement S. Le cas $S = \emptyset$ revient à la construction d'une représentation p-adique qui n'est pas potentiellement trianguline, et dans la suite de cet article, nous montrons que de telles représentations existent.

Théorème B. — *Il existe des représentations p-adiques de dimension 2 de $G_{\mathbf{Q}_p}$ qui ne sont pas potentiellement triangulines.*

Nous prouvons en fait un résultat plus fort, dont voici une conséquence.

Théorème C. — *Soit $R : G_{\mathbf{Q}_p} \to \mathrm{GL}_2(E)$ une représentation résiduellement absolument irréductible. Il existe une extension finie F/E et une representation continue*

$$\rho : G_{\mathbf{Q}_p} \to \mathrm{GL}_2(F\langle t \rangle)$$

telle que $\rho_0 \otimes_E F = R$ et telle que pour tout $t \in \overline{\mathbf{Z}}_p$, sauf peut-être pour un ensemble dénombrable d'entre eux, ρ_t n'est pas potentiellement trianguline.

Ce résultat entraîne évidemment le précédent : considérer par exemple la représentation sur le module de Tate d'une courbe elliptique sur $\mathbf{Q}_p$ ayant bonne réduction supersingulière, ou encore une représentation induite convenable. La représentation ρ que l'on construit est de polynôme de Sen et déterminant constants. Dans de nombreux cas, notamment dans l'exemple précédent, on peut prendre $F = E$ dans l'énoncé ci-dessus.

Remarquons pour terminer que la démonstration du théorème B n'est pas constructive, et le lecteur pourra chercher avec profit à construire explicitement une représentation qui n'est pas potentiellement trianguline.

1. La catégorie des B-paires

Nous commençons par faire des rappels très succints sur les définitions (données dans [**Fon94**] par exemple) des divers anneaux que nous utilisons dans cette note. Rappelons que $\widetilde{\mathbf{E}}^+ = \varprojlim_{x \mapsto x^p} \mathcal{O}_{\mathbf{C}_p}$ est un anneau de caractéristique p, complet pour la valuation $\mathrm{val}_{\mathrm{E}}$ définie par $\mathrm{val}_{\mathrm{E}}(x) = \mathrm{val}_p(x^{(0)})$ et qui contient un élément ε tel que $\varepsilon^{(n)}$ est une racine primitive p^n-ième de l'unité. On fixe un tel ε dans toute cette note. L'anneau $\widetilde{\mathbf{E}} = \widetilde{\mathbf{E}}^+[1/(\varepsilon-1)]$ est alors un corps qui contient comme sous-corps dense la clôture algébrique de $\mathbf{F}_p(\!(\varepsilon - 1)\!)$. On pose $\widetilde{\mathbf{A}}^+ = W(\widetilde{\mathbf{E}}^+)$ et $\widetilde{\mathbf{B}}^+ = \widetilde{\mathbf{A}}^+[1/p]$. L'application $\theta : \widetilde{\mathbf{B}}^+ \to \mathbf{C}_p$ qui à $\sum_{k \gg -\infty} p^k [x_k]$ associe $\sum_{k \gg -\infty} p^k x_k^{(0)}$ est un morphisme d'anneaux surjectif et $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ est le complété de $\widetilde{\mathbf{B}}^+$ pour la topologie $\ker(\theta)$-adique, ce qui en fait un espace topologique de Fréchet. On pose $X = [\varepsilon] - 1 \in \widetilde{\mathbf{A}}^+$ et $t = \log(1 + X) \in \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ et on définit $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$ par $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}} = \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+[1/t]$. Soit $\widetilde{p} \in \widetilde{\mathbf{E}}^+$ un élément tel que $\widetilde{p}^{(0)} = p$. L'anneau $\mathbf{B}_{\max}^+$ est l'ensemble des éléments de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ qui peuvent s'écrire sous la forme $\sum_{n \geqslant 0} b_n([\widetilde{p}]/p)^n$ où $b_n \in \widetilde{\mathbf{B}}^+$ et $b_n \to 0$ quand $n \to \infty$ ce qui en fait un sous-anneau de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ muni en plus d'un frobenius φ qui est injectif, mais pas surjectif. On pose $\mathbf{B}_{\max} = \mathbf{B}_{\max}^+[1/t]$ et $\mathbf{B}_{\mathrm{e}} = \mathbf{B}_{\max}^{\varphi=1}$. Rappelons que les anneaux $\mathbf{B}_{\max}$ et $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$ sont reliés, en plus de l'inclusion $\mathbf{B}_{\max} \subset \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$, par la suite exacte fondamentale : $0 \to \mathbf{Q}_p \to \mathbf{B}_{\mathrm{e}} \to \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}/\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+ \to 0$.

L'anneau $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ contient $\overline{\mathbf{Q}}_p$ ce qui fait que si E est une extension finie de $\mathbf{Q}_p$, alors $E \otimes \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+ \simeq (\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+)^{[E:\mathbf{Q}_p]}$ (dans toute cette note, on écrit $E \otimes -$ plutôt que $E \otimes_{\mathbf{Q}_p} -$ pour alléger les notations). En ce qui concerne $E \otimes \mathbf{B}_{\mathrm{e}}$, on a le résultat suivant (rappelons qu'un anneau de Bézout est un anneau intègre tel que tout idéal de type fini est principal).

Proposition 1.1. — *Si E est une extension finie de $\mathbf{Q}_p$, alors l'anneau $E \otimes \mathbf{B}_{\mathrm{e}}$ est un anneau de Bézout.*

Démonstration. — Si $E = \mathbf{Q}_p$, alors c'est la proposition 1.1.9 de [**Ber08**] et le cas général fait l'objet du lemme 1.6 de [**Nak09**]. □

Tous les anneaux construits ci-dessus admettent une action naturelle de $G_{\mathbf{Q}_p}$ et donc de G_K si $K \subset \overline{\mathbf{Q}}_p$. On fait agir $G_{\mathbf{Q}_p}$ trivialement sur E de sorte que $E \otimes \mathbf{B}_{\mathrm{e}}$ et $E \otimes \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$ sont munis d'une action E-linéaire de $G_{\mathbf{Q}_p}$.

Une $E \otimes \mathbf{B}_{\mathrm{e}}$-représentation de G_K est un $E \otimes \mathbf{B}_{\mathrm{e}}$-module libre de rang fini muni d'une action semi-linéaire de G_K. Si W_e est une $E \otimes \mathbf{B}_{\mathrm{e}}$-représentation de G_K, alors on pose $W_{dR} = (E \otimes \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}) \otimes_{E \otimes \mathbf{B}_{\mathrm{e}}} W_e$.

Définition 1.2. — Une $B_{|K}^{\otimes E}$-paire est une paire $W = (W_e, W_{dR}^+)$ où W_e est une $E \otimes \mathbf{B}_{\mathrm{e}}$-représentation de G_K et où W_{dR}^+ est un $E \otimes \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$-réseau de W_{dR} stable par G_K.

Si $E = \mathbf{Q}_p$, alors on retrouve la définition du §2 de [**Ber08**] et dans le cas général, on retrouve les « E-B-paires de G_K » de [**Nak09**]. Rappelons que l'on note $X \subset W$ si $X_e \subset W_e$ et $X_{dR}^+ \subset W_{dR}^+$ mais que l'on dit que X est un sous-objet strict de W seulement si en plus X_{dR}^+ est saturé dans W_{dR}^+ (par le lemme 2.1.4 de [**Ber08**], il n'est pas nécessaire d'imposer de condition sur X_e). Dans ce cas, le quotient W/X est aussi une $B_{|K}^{\otimes E}$-paire.

Si W est une $B_{|K}^{\otimes E}$-paire, et si F est une extension finie galoisienne de E et L est une extension finie de K, alors $F \otimes_E W|_{G_L}$ est une $B_{|L}^{\otimes F}$-paire, munie en plus d'une action de $\mathrm{Gal}(F/E)$ et d'une action de G_K qui étend celle de G_L. On a alors le résultat suivant de « descente galoisienne ».

Proposition 1.3. — *Si W est une $B_{|K}^{\otimes E}$-paire et si $X \subset F \otimes_E W|_{G_L}$ est stable sous les actions de $\mathrm{Gal}(F/E)$ et de G_K, alors $X^{\mathrm{Gal}(F/E)}$ avec l'action induite de G_K est une $B_{|K}^{\otimes E}$-paire et $X = F \otimes_E X^{\mathrm{Gal}(F/E)}|_{G_L}$.*

Démonstration. — La proposition 2.2.1 de [**BC08**] appliquée à $B = F$, $M = X$ et $S = E \otimes \mathbf{B}_{\mathrm{e}}$ puis $S = E \otimes \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ (si l'on remplace le produit tensoriel complété $\widehat{\otimes}$ par un produit tensoriel simple $\otimes$, ce qui ne change pas la démonstration) implique que $X_e^{\mathrm{Gal}(F/E)}$ et $(X_{dR}^+)^{\mathrm{Gal}(F/E)}$ sont localement libres de rang fini sur $E \otimes \mathbf{B}_{\mathrm{e}}$ et $E \otimes \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ et vérifient $X = F \otimes_E X^{\mathrm{Gal}(F/E)}$. Ils sont libres de rang fini (par la proposition 1.1 pour $X_e^{\mathrm{Gal}(F/E)}$ et car $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ est principal et le rang est constant pour $(X_{dR}^+)^{\mathrm{Gal}(F/E)}$) et comme $X^{\mathrm{Gal}(F/E)}$ est stable sous l'action induite de G_K, c'est bien une $B_{|K}^{\otimes E}$-paire. □

2. Pentes et poids des B-paires

Rappelons que par le théorème A de [**Ber08**] (si $E = \mathbf{Q}_p$) et par le théorème 1.36 de [**Nak09**] en général, on a une équivalence de catégories entre la catégorie des $B_{|K}^{\otimes E}$-paires et celle des (φ, Γ_K)-modules sur l'anneau $E \otimes \mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}^{\dagger}$ où $\mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}^{\dagger}$ est « l'anneau de Robba sur K ».

On sait associer, par exemple selon la méthode de [**Ked04**], des pentes aux φ-modules sur l'anneau de Robba ; en particulier, on dispose de la notion de φ-module isocline de pente s où $s \in \mathbf{Q}$ et on peut donc définir la notion de $B_{|K}^{\otimes E}$-paire isocline de pente s via l'équivalence de catégories entre $B_{|K}^{\otimes E}$-paires et (φ, Γ_K)-modules sur l'anneau $E \otimes \mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}^{\dagger}$. On a alors le théorème suivant, qui suit de cette équivalence de catégories et du théorème 6.10 de [**Ked04**], le théorème de filtration par les pentes pour les φ-modules sur l'anneau de Robba.

Théorème 2.1. — *Si W est une $B_{|K}^{\otimes E}$-paire, alors il existe une filtration canonique*

$$0 = W_0 \subset W_1 \subset \cdots \subset W_\ell = W$$

par des sous-$B_{|K}^{\otimes E}$-paires, telle que :

1. *pour tout $1 \leqslant i \leqslant \ell$, le quotient W_i/W_{i-1} est isocline ;*
2. *si l'on appelle s_i la pente de W_i/W_{i-1}, alors $s_1 < s_2 < \cdots < s_\ell$.*

Notons tout de même que $E \otimes \mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}^{\dagger}$ n'est pas nécessairement intègre, et donc qu'il faut un petit argument supplémentaire (on oublie E puis on utilise le fait que la filtration est canonique pour le faire réapparaître) pour obtenir le théorème ci-dessus, qui est alors le théorème 1.32 de [**Nak09**]. Dans cette note, nous n'avons pas besoin de savoir comment calculer les pentes d'une B-paire. En plus du théorème 2.1, nous n'utilisons que les deux résultats ci-dessous.

Proposition 2.2. — *Si V est une représentation E-linéaire de G_K alors*

$$W(V) = ((E \otimes \mathbf{B}_{\mathrm{e}}) \otimes_E V, (E \otimes \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{+}) \otimes_E V)$$

est une $B_{|K}^{\otimes E}$-paire, et le foncteur $V \mapsto W(V)$ donne une équivalence de catégories entre la catégorie des représentations E-linéaires de G_K et la catégorie des $B_{|K}^{\otimes E}$-paires isoclines de pente nulle.

Démonstration. — Si $E = \mathbf{Q}_p$, alors c'est le théorème 3.2.3 de [**Ber08**] appliqué à $a/h = 0/1$ et le cas E-linéaire s'en déduit immédiatement. □

Si W est une $B_{|K}^{\otimes E}$-paire de rang 1, alors elle n'a qu'une seule pente, que l'on appelle aussi le degré de W, noté $\deg(W)$. Si W est de rang $\geqslant 1$, alors on pose $\deg(W) = \deg\det(W)$ ce qui fait de $\deg(\cdot)$ une fonction additive sur les suites exactes.

Proposition 2.3. — *Si $X \subset W$ sont deux $B_{|K}^{\otimes E}$-paires de rang 1, alors $\deg(X) \geqslant \deg(W)$ et $\deg(X) = \deg(W)$ si et seulement si $X = W$.*

Démonstration. — Si $E = \mathbf{Q}_p$, cela suit du corollaire 1.2.8 de [**Ber08**] et le cas E-linéaire est tout à fait semblable. □

Les poids d'une B-paire W sont une généralisation des poids de Hodge-Tate des représentations p-adiques. Rappelons que si U est une $\mathbf{C}_p$-représentation de G_K, et que si l'on note $H_K = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/K(\mu_{p^\infty}))$ et $\Gamma_K = G_K/H_K$, alors la réunion $U_{\mathrm{fini}}^{H_K}$ des sous-K_∞-espaces vectoriels de dimension finie stables par Γ_K de U^{H_K} a la propriété que l'application $\mathbf{C}_p \otimes_{K_\infty} U_{\mathrm{fini}}^{H_K} \to U$ est un isomorphisme (cf. [**Sen81**]). L'espace $U_{\mathrm{fini}}^{H_K}$ est muni de l'application K_∞-linéaire $\nabla_U = \log(\gamma)/\log_p(\chi(\gamma))$ avec $\gamma \in \Gamma_K \setminus \{1\}$ suffisamment proche de 1. Le polynôme caractéristique de ∇_U est alors à coeffcients dans K, et même dans

$E \otimes K$ si U est de plus E-linéaire. Les racines de ce polynôme sont les poids de Sen de U (le nombre de racines dépend de la décomposition de $E \otimes K$, ce qui explique l'inclusion éventuellement stricte dans le (2) de la proposition 2.4 ci-dessous).

Si W est une $B_{|K}^{\otimes E}$-paire, alors W_{dR}^+/tW_{dR}^+ est une $E \otimes \mathbf{C}_p$-représentation de G_K et on pose $\mathrm{D}_{\mathrm{Sen}}(W) = (W_{dR}^+/tW_{dR}^+)_{\mathrm{fini}}^{H_K}$. Les poids de W sont alors les poids de Sen de ∇_W agissant sur $\mathrm{D}_{\mathrm{Sen}}(W)$. Notons poids$(W)$ l'ensemble des poids de Sen de W comptés avec multiplicité. La proposition ci-dessous est inspirée des calculs du §3 de [**Fon04**]. On écrit "poids$(X) \subset$ poids$(W) + \mathbf{Z}_{\geqslant 0}$" pour exprimer le fait que tout poids de X est de la forme $w + a$ où w est un poids de W et $a \in \mathbf{Z}_{\geqslant 0}$.

Proposition 2.4. — *Si $X \subset W$ sont deux $B_{|K}^{\otimes E}$-paires, alors*

1. poids$(X) \subset$ poids$(W) + \mathbf{Z}_{\geqslant 0}$ *;*
2. *si X est un sous-objet strict de W, alors* poids$(W) \supset$ poids$(W/X) \cup$ poids(X) *;*
3. *si X et W sont de même rang et* poids$(X) =$ poids(W), *alors $X = W$.*

Démonstration. — Commençons par montrer le (2). Si X est un sous-objet strict de W, alors on a une suite exacte $0 \to X_{dR}^+ \to W_{dR}^+ \to (W/X)_{dR}^+ \to 0$ et donc $0 \to \mathrm{D}_{\mathrm{Sen}}(X) \to \mathrm{D}_{\mathrm{Sen}}(W) \to \mathrm{D}_{\mathrm{Sen}}(W/X) \to 0$ ce qui permet de conclure.

Le (2) implique que pour montrer le (1), on peut se ramener au cas où X et W sont de même rang. Notons tW la B-paire $tW = (W_e, tW_{dR}^+)$ de sorte que poids$(tW) =$ poids$(W) + 1$. Comme deux $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$-réseaux sont commensurables, il existe $h \geqslant 0$ tel que $t^h W \subset X$ et en considérant la suite d'inclusions

$$X = X + t^h W \subset X + t^{h-1} W \subset \cdots \subset X + tW \subset X + W = W,$$

on voit que pour montrer le (1), on peut en plus supposer que $tW \subset X \subset W$. Dans ce cas, on a deux suites exactes

$$0 \to W_{dR}^+/tW_{dR}^+ \to W_{dR}^+/X_{dR}^+$$
$$0 \to t(W_{dR}^+/X_{dR}^+) \to X_{dR}^+/tX_{dR}^+ \to W_{dR}^+/tW_{dR}^+$$

qui montrent que les poids de X sont dans poids$(W) \cup$ poids$(W) + 1$.

Enfin pour montrer le (3), on voit que si poids$(X) =$ poids(W), alors on a égalité à chaque étape ci-dessus et que cela implique $W = X$. On peut aussi se ramener au cas de rang 1 en prenant le déterminant. □

Si W est une $B_{|K}^{\otimes E}$-paire, alors W_{dR} est une $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$-représentation de G_K et ces objets sont étudiés dans le §3 de [**Fon04**]. Si W est une $B_{|K}^{\otimes E}$-paire, alors on dit qu'elle est de de Rham si la $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$-représentation W_{dR} est triviale. Remarquons que si V est une représentation E-linéaire de G_K alors V est de de Rham si et seulement si $W(V)$ est de de Rham.

Proposition 2.5. — *Si W est une $B_{|K}^{\otimes E}$-paire à poids entiers et si $X \subset W$ est une $B_{|K}^{\otimes E}$-paire de rang 1, alors X est de de Rham.*

Démonstration. — Comme $\overline{\mathbf{Q}}_p \subset \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$, on a une décomposition $E \otimes \mathbf{B}_{\mathrm{dR}} = \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{[E:\mathbf{Q}_p]}$ qui est compatible à l'action naturelle de G_L sur les deux membres si L est une extension de $\mathbf{Q}_p$ qui contient E. Si l'on choisit une extension finie L de $\mathbf{Q}_p$ qui contient K et E, alors on en déduit une décomposition $(X|_{G_L})_{dR} = \oplus_{i=1}^{[E:\mathbf{Q}_p]} X_{dR}^{(i)}$. Chaque $X_{dR}^{(i)}$ est une $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$-représentation de dimension 1 dont le poids appartient à $\mathbf{Z}$ et qui est donc triviale par les résultats du §3.7 de [**Fon04**]. C'est donc que $X|_{G_L}$ est de de Rham et donc X aussi. □

3. Représentations potentiellement triangulines

Si V est une représentation E-linéaire de G_K, alors on peut lui associer par la proposition 2.2 une $B_{|K}^{\otimes E}$-paire $W(V)$, et on dit que V est trianguline déployée si $W(V)$ est une extension successive de $B_{|K}^{\otimes E}$-paires de rang 1. On dit que V est trianguline s'il existe une extension finie F de E telle que $F \otimes_E V$ est trianguline déployée. Etant donné l'équivalence de catégories entre $B_{|K}^{\otimes E}$-paires et (φ, Γ_K)-modules sur $E \otimes \mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}^{\dagger}$ cette définition est compatible avec les définitions 4.1 et 3.4 de [**Col08**] (à ceci près que les « triangulines » de Colmez correspondent à nos « triangulines déployées »). On dit que V est potentiellement trianguline s'il existe une extension finie L de K telle que $V|_{G_L}$ est trianguline.

Théorème 3.1. — *Si V est une représentation E-linéaire de $G_{\mathbf{Q}_p}$ de dimension 2 qui est potentiellement trianguline, alors V vérifie au moins une des propriétés suivantes :*

1. *V est trianguline déployée ;*
2. *V est une somme de caractères ou une induite ;*
3. *V est une représentation de de Rham tordue par un caractère.*

Notons que dans le cas (2), « V est une somme de caractères ou une induite » veut dire qu'il existe une extension finie F de E (que l'on peut alors prendre de degré $\leqslant 2$) telle que $F \otimes_E V$ est une somme directe de deux caractères F-linéaires ou l'induite d'un caractère F-linéaire.

Démonstration. — Soit $W = W(V)$ la $B_{|\mathbf{Q}_p}^{\otimes E}$-paire isocline de pente nulle associée à V comme dans la proposition 2.2. Si V est potentiellement trianguline, alors il existe une extension finie F de E, et une extension finie K de $\mathbf{Q}_p$, que l'on peut supposer toutes les deux galoisiennes, telles que l'on puisse écrire

$$0 \to X \to F \otimes_E W|_{G_K} \to Y \to 0$$

avec X et Y deux $B_{|K}^{\otimes F}$-paires de rang 1. Si $g \in \mathrm{Gal}(F/E)$ ou bien si $g \in G_{\mathbf{Q}_p}$, alors $g(X)$ et $g(Y)$ sont aussi deux $B_{|K}^{\otimes F}$-paires de rang 1 et on a

$$0 \to g(X) \to F \otimes_E W|_{G_K} \to g(Y) \to 0.$$

Si $g(X) = X$ quel que soit $g \in \mathrm{Gal}(F/E)$ et quel que soit $g \in G_{\mathbf{Q}_p}$, alors la proposition 1.3 montre que X provient d'une $B_{|\mathbf{Q}_p}^{\otimes E}$-paire ce qui fait qu'on est dans le cas (1).

Le reste de la démonstration est donc consacré à examiner le cas où il existerait un $g \in \mathrm{Gal}(F/E)$ ou bien un $g \in G_{\mathbf{Q}_p}$ tel que $g(X) \neq X$. Dans ce cas, on a $g(X) \cap X = \{0\}$ et donc $g(X) \hookrightarrow Y$. Comme W et donc $F \otimes_E W|_{G_K}$ est de pente nulle, le théorème 2.1 implique que $\deg(X) \geqslant 0$. Si $\deg(X) = 0$, alors $\deg(X \oplus g(X)) = 0$ et la proposition 2.3 appliquée à l'inclusion $\det(X \oplus g(X)) \subset \det(F \otimes_E W|_{G_K})$ montre que $F \otimes_E W|_{G_K}$ est somme directe de X et $g(X)$. Par l'équivalence de catégories de la proposition 2.2, la représentation $F \otimes_E V|_{G_K}$ est somme directe de deux caractères de G_K ce qui fait par le lemme 3.2 ci-dessous que l'on est dans le cas (2).

Supposons donc que $\deg(X) > 0$. Comme V est une représentation E-linéaire de $G_{\mathbf{Q}_p}$ les poids de Sen de V et donc de W sont les deux racines λ et $\mu \in \overline{\mathbf{Q}}_p$ du polynôme caractéristique de ∇_W qui est à coefficients dans E. Les poids de $F \otimes_E W|_{G_K}$ sont donc des uplets de λ et de μ. Par le (2) de la proposition 2.4, les poids de Sen de X et de Y sont aussi des uplets de λ et de μ.

Supposons tout d'abord que $\lambda - \mu \notin \mathbf{Z}$. Toujours par le (2) de la proposition 2.4, le poids de $g(X)$ est aussi un uplet de λ et de μ et comme $g(X) \hookrightarrow Y$ c'est par ailleurs un uplet d'éléments de $\lambda + \mathbf{Z}$ et de $\mu + \mathbf{Z}$ par le (1) de la proposition 2.4. Si $\lambda - \mu \notin \mathbf{Z}$, le poids de $g(X)$ est donc nécessairement égal à celui de Y et par le (3) de la proposition 2.4, on a $g(X) = Y$. Comme $\deg g(X) = \deg(X) > 0$ et $\deg(Y) < 0$, on a une contradiction et le cas $\lambda - \mu \notin \mathbf{Z}$ ne peut pas se produire s'il existe g tel que $g(X) \neq X$ avec $\deg(X) > 0$.

Nous sommes donc ramenés à examiner la situation où $\lambda - \mu = a \in \mathbf{Z}$ et $\deg(X) > 0$. Quitte à tordre V par un caractère de poids $-\mu$, on peut supposer que les poids de Sen de V sont 0 et $a \in \mathbf{Z}$. Nous allons montrer que V est alors de de Rham. Pour cela, remarquons que $X \oplus g(X) \subset F \otimes_E W|_{G_K}$ et que bien que cette inclusion ne soit pas une égalité, on a $X_{dR} \oplus g(X_{dR}) = F \otimes_E W_{dR}|_{G_K}$ puisque les deux $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$-espaces vectoriels sont de même dimension. Afin de terminer la démonstration, on applique la proposition 2.5 qui montre que X et $g(X)$ sont de de Rham et donc W aussi. □

Lemme 3.2. — *Si V est une représentation E-linéaire de $G_{\mathbf{Q}_p}$ de dimension 2 telle qu'il existe une extension finie K de $\mathbf{Q}_p$ vérifiant $V|_{G_K} = V_1 \oplus V_2$ alors soit V est une somme de caractères, soit V est une induite.*

Démonstration. — On peut supposer que K est une extension galoisienne de $\mathbf{Q}_p$. Notons η_1 et η_2 les caractères de G_K correspondant à V_1 et V_2. Si $\eta_1 \neq \eta_2$ et si $g \in G_{\mathbf{Q}_p}$ alors $g(V_1)$ est soit V_1 soit V_2 et les caractères η_1 et η_2 s'étendent à l'ensemble des g tels que $g(V_i) = V_i$ qui est un sous-groupe d'indice 2 de $G_{\mathbf{Q}_p}$. Le lemme résulte alors de la théorie des représentations induites (réciprocité de Frobenius).

Si $V_1 = V_2$ alors posons $H = G_K$ et $G = G_{\mathbf{Q}_p}$. La théorie de la ramification montre qu'il existe une suite de groupes $H = H_0 \subset H_1 \subset \cdots \subset H_n = G$ telle que H_i est distingué dans G et H_{i+1}/H_i est cyclique (en d'autres termes, G/H est hyper-résoluble). Il existe alors $g_1, \ldots, g_n \in G$ tels que $H_i = \langle H_{i-1}, g_i \rangle$. Si V est une somme de caractères, alors on a terminé et sinon il existe $1 \leqslant i \leqslant n$ tel que $V|_{H_{i-1}}$ est somme de deux caractères égaux mais pas $V|_{H_i}$. Comme $H_i = \langle H_{i-1}, g_i \rangle$ et H_{i-1} agit par des homothéties et $g_i^{[H_i:H_{i-1}]} \in H_{i-1}$, l'élément g_i est semi-simple et donc la représentation $V|_{H_i}$ est somme de deux caractères, ce qui fait que quitte à remplacer K par $\overline{\mathbf{Q}}_p^{H_i}$, on est ramené au cas $V_1 \neq V_2$. □

4. Parties fines d'un espace analytique

Afin de montrer les théorèmes B et C de l'introduction, nous avons besoin de faire quelques rappels et compléments sur les espaces rigides analytiques p-adiques. Si $\mathcal{X}$ est un tel espace et $x \in \mathcal{X}$ en est un point fermé, nous désignons par $K(x) = \mathcal{O}_{\mathcal{X},x}/\mathfrak{M}_x$ le corps résiduel de x, qui est une extension finie de $\mathbf{Q}_p$. On rappelle que $\mathcal{X}$ est dit de dimension finie si l'ensemble $\{\dim \mathcal{O}_{\mathcal{X},x}\}_{x \in \mathcal{X}}$ est borné, auquel cas $\dim(\mathcal{X})$ est le maximum de cet ensemble. Tous les espaces ci-dessous sont supposés de dimension finie. Nous notons $\mathcal{B}$ la boule unité fermée de dimension 1 sur $\mathbf{Q}_p$ (d'algèbre affinoïde $\mathbf{Q}_p\langle t \rangle$).

Un espace rigide est dit *de type dénombrable* s'il admet un recouvrement (non nécessairement admissible) par un nombre dénombrable d'ouverts affinoïdes. Cette propriété est bien entendue stable par réunions disjointes dénombrables quelconques.

Lemme 4.1. — *Si $\mathcal{X}$ est un affinoïde, alors il existe une famille dénombrable d'ouverts affinoïdes $\mathcal{U} = (\mathcal{U}_i)_{i \geqslant 0}$ de $\mathcal{X}$ telle que pour tout $x \in \mathcal{X}$ et tout voisinage ouvert affinoïde $\mathcal{V}$ de x, il existe un entier i tel que $x \in \mathcal{U}_i \subset \mathcal{V}$.*

Démonstration. — Si $\mathcal{X}$ est la boule unité $\mathcal{B}^n$, de paramètres $t_1, \ldots, t_n$, alors nous pouvons prendre pour $\mathcal{U}$ la collection de toutes les sous-boules affinoïdes dont le centre x est tel que les $t_i(x)$ sont algébriques sur $\mathbf{Q}$ (rappelons que les rayons possibles sont dénombrables). En général, nous pouvons trouver par définition une immersion fermée $\mathcal{X} \to \mathcal{B}^n$ pour n assez grand, et l'image inverse dans $\mathcal{X}$ de la collection précédente d'ouverts affinoïdes de $\mathcal{B}^n$ a les propriétés requises. □

Corollaire 4.2. — *Si $\mathcal{X}$ est de type dénombrable, alors de tout recouvrement de $\mathcal{X}$ par des ouverts admissibles on peut extraire un recouvrement dénombrable. De plus, tout fermé et tout ouvert de $\mathcal{X}$ est encore de type dénombrable.*

Démonstration. — Pour le premier point, $\mathcal{X}$ étant de type dénombrable on peut le supposer affinoïde, auquel cas cela découle du lemme précédent. La seconde assertion est évidente pour un fermé, et dans le cas d'un ouvert elle se ramène à voir qu'un ouvert d'un affinoïde est de type dénombrable, ce qui découle encore du lemme 4.1 ci-dessus. □

Définition 4.3. — Si $\mathcal{X}$ est un espace rigide, une partie $\mathcal{A} \subset \mathcal{X}$ sera dite *fine* s'il existe un espace rigide $\mathcal{Y}$ de type dénombrable, ainsi qu'un morphisme analytique $f : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$, tels que $\dim(\mathcal{Y}) < \dim(\mathcal{X})$ et $\mathcal{A} \subset f(\mathcal{Y})$.

Par exemple, si $\dim(\mathcal{X}) = 1$, ses parties fines sont ses parties dénombrables. Le corps $\mathbf{Q}_p$ étant indénombrable il est bien connu qu'une telle partie est propre. Nous allons maintenant vérifier que ce résultat s'étend en toute dimension.

Lemme 4.4. — *Soient $\mathcal{X}$ un espace analytique et $\mathcal{A} \subset \mathcal{X}$ une partie fine.*

1. *Si $\mathcal{U} \subset \mathcal{X}$ est un ouvert admissible de dimension* $\dim(\mathcal{X})$*, alors $\mathcal{A} \cap \mathcal{U}$ est une partie fine de $\mathcal{U}$.*
2. *Si $\nu : \mathcal{X}' \to \mathcal{X}$ est un morphisme fini tel que* $\dim(\mathcal{X}') = \dim(\mathcal{X})$*, alors $\nu^{-1}(A)$ est une partie fine de $\mathcal{X}'$. Cela vaut en pariculier si ν est la normalisation de $\mathcal{X}$.*
3. *Si $\mathcal{X}$ est irréductible et si $\{\mathcal{X}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ est un ensemble indénombrable de fermés de $\mathcal{X}$ irréductibles, deux à deux distincts, et de dimension* $\dim(\mathcal{X}) - 1$*, alors hors d'un ensemble dénombrable de $\lambda \in \Lambda$, la partie $\mathcal{A} \cap \mathcal{X}_\lambda$ est une partie fine de $\mathcal{X}_\lambda$.*

Démonstration. — Le (1) découle de la définition et de ce qu'un ouvert d'un espace de type dénombrable l'est encore. Pour le (2), écrivons $\mathcal{A} \subset f(\mathcal{Y})$ avec $\mathcal{Y}$ de type dénombrable et de dimension $< \dim(\mathcal{X})$; l'ensemble $\nu^{-1}(\mathcal{A})$ est inclus dans l'image du morphisme naturel $\mathcal{Y} \times_{\mathcal{X}} \mathcal{X}' \to \mathcal{X}'$. Cela permet de conclure car l'espace $\mathcal{Y} \times_{\mathcal{X}} \mathcal{X}'$ est de type dénombrable, étant fini sur $\mathcal{Y}$ qui a cette propriété, et de dimension $\leqslant \dim(\mathcal{Y}) < \dim(\mathcal{X}')$ pour la même raison.

Vérifions à présent le (3). On peut supposer que $\mathcal{A} = f(\mathcal{Y})$ avec $\dim(\mathcal{Y}) \leqslant n - 1$ où $n = \dim(\mathcal{X})$. Soit $\Lambda' \subset \Lambda$ le sous-ensemble des λ tels que $\mathcal{Y}$ ait une composante irréductible $\mathcal{T}$ avec $f(\mathcal{T})$ Zariski-dense dans $\mathcal{X}_\lambda$. Comme $\mathcal{Y}$ est de type dénombrable, il en va de même de sa normalisation, de sorte que $\mathcal{Y}$ n'a qu'un nombre dénombrable de composantes irréductibles, et donc Λ' est dénombrable.

Posons $\mathcal{A}_\lambda = \mathcal{A} \cap \mathcal{X}_\lambda$ et considérons $\lambda \in \Lambda$ tel que $\mathcal{A}_\lambda$ n'est pas une partie fine de $\mathcal{X}_\lambda$. Nous allons montrer que $\lambda \in \Lambda'$. L'espace $\mathcal{Y}_\lambda = f^{-1}(\mathcal{X}_\lambda)$ est un fermé de $\mathcal{Y}$ et en particulier il est de type dénombrable. Comme $\mathcal{A}_\lambda \subset f(\mathcal{Y}_\lambda)$ n'est pas une partie fine de $\mathcal{X}_\lambda$, l'espace $\mathcal{Y}_\lambda$ est de dimension $\geqslant n-1$. Il vient que $\dim(\mathcal{Y}_\lambda) = \dim(\mathcal{Y}) = n-1$ car $\dim(\mathcal{Y}) \leqslant n-1$. La décomposition en composantes irréductibles de la nilréduction de $\mathcal{Y}_\lambda$ est donc de la forme $\mathcal{T} \cup \mathcal{T}'$ où $\mathcal{T}$ est une réunion non vide de composantes irréductibles $\mathcal{T}_i$ de $\mathcal{Y}$ et $\dim(\mathcal{T}') < n-1$. Si pour chaque i, l'adhérence Zariski $\mathcal{Z}_i$ de $f(\mathcal{T}_i)$ dans $\mathcal{X}_\lambda$ est stricte, donc de dimension $< \dim \mathcal{X}_\lambda$ par irréductibilité de $\mathcal{X}_\lambda$, alors $\mathcal{A}_\lambda$ est inclus dans la partie fine $f(\mathcal{T}') \cup (\cup_i \mathcal{Z}_i)$ de $\mathcal{X}_\lambda$. On en déduit que l'un des $f(\mathcal{T}_i)$ est Zariski-dense dans $\mathcal{X}_\lambda$, et donc que $\lambda \in \Lambda'$. □

Si K est une extension finie de $\mathbf{Q}_p$, nous entendons par *K-boule* de dimension r l'affinoïde $\mathcal{B}_K^r$ sur $\mathbf{Q}_p$ d'algèbre $K\langle t_1, t_2, \ldots, t_r\rangle$. Si $\mathcal{X}$ est un affinoïde et si $x \in \mathcal{X}$ en est un point régulier, rappelons qu'un résultat classique dû à Kiehl [**Kie67**, Thm. 1.18] assure l'existence d'un voisinage ouvert affinoïde $\mathcal{U}$ de x dans $\mathcal{X}$ qui est isomorphe à une $K(x)$-boule[(1)].

Proposition 4.5. — *Si $\mathcal{X}$ est un espace analytique de dimension > 0, alors une partie fine de $\mathcal{X}$ en est une partie stricte.*

Plus précisément, soit $\mathcal{A} \subset \mathcal{X}$ une partie fine et soit $x \in \mathcal{X}$ tel que $\dim \mathcal{O}_{\mathcal{X},x} = \dim(\mathcal{X}) > 0$. Si x est régulier, alors on peut trouver un morphisme analytique $\iota : \mathcal{B}^1_{K(x)} \longrightarrow \mathcal{X}$ tel que $\iota(0) = x$, tel que $\iota^{-1}(\mathcal{A})$ est dénombrable, et qui est une immersion fermée vers un voisinage affinoïde de x. Si x n'est pas régulier, on peut encore trouver un ι comme ci-dessus satisfaisant les deux première conditions, si l'on s'autorise à remplacer $K(x)$ par une extension finie.

Démonstration. — Soit $\mathcal{A} = f(\mathcal{Y}) \subset \mathcal{X}$ une partie fine et $x \in \mathcal{X}$ de dimension $\dim X > 0$. Démontrons tout d'abord l'assertion concernant le cas où x est régulier. D'après le (1) du lemme 4.4 et le résultat de Kiehl, on peut supposer que $\mathcal{X}$ est une $K(x)$-boule de dimension $\dim(\mathcal{X}) = n > 0$. Si $n = 1$ alors $\mathcal{A}$ est dénombrable et le résultat est évident. Sinon on procède par récurrence sur n. On choisit une famille indénombrable de sous-$K(x)$-boules fermées centrées en x et de dimension $n-1$ (par exemple $t_1 = \lambda t_2$ pour $\lambda \in \mathbf{Z}_p^\times$), et on conclut par le (3) du lemme 4.4.

La première assertion de la proposition s'en déduit car on peut supposer que $\mathcal{X}$ est réduit, auquel cas son lieu régulier est un ouvert Zariski et Zariski-dense, donc contient un point de dimension $\dim \mathcal{X}$.

Vérifions le dernier point. Quitte à remplacer $\mathcal{X}$ par un ouvert affinoïde de dimension $\dim(\mathcal{X})$, et d'après le (1) du lemme 4.4, on peut supposer que $\mathcal{X}$ est affinoïde contenant x, puis que $\mathcal{X}$ est normal et connexe d'après le (2) du même lemme. Par normalisation

[(1)]Nous remercions Laurent Fargues de nous avoir indiqué cette référence.

de Noether-Tate, on peut donc trouver un morphisme fini et surjectif $\pi : \mathcal{X} \to \mathcal{B}^n$ avec $n = \dim(\mathcal{X})$. Par conséquent, $\pi(\mathcal{A})$ est une partie fine de $\mathcal{B}^n$. Par l'argument précédent, il existe une immersion fermée $\mathcal{B}^1_{K(\pi(x))} \to \mathcal{B}^n_{K(\pi(x))}$ ne rencontrant $\pi(\mathcal{A})$ qu'en un sous-ensemble dénombrable. L'image inverse $\mathcal{C}$ de cette boule dans $\mathcal{X} \times K(\pi(x))$ est un fermé d'équi-dimension 1 contenant x et ne recontrant $\mathcal{A}$ qu'en un sous-ensemble dénombrable. Quitte à normaliser $\mathcal{C}$, on peut finalement supposer que $\mathcal{X}$ est régulier de dimension 1, et on conclut encore par le résultat de Kiehl. $\square$

5. Représentations non potentiellement triangulines

5.1. Rappel sur les espaces de déformations. — Soit q une puissance de p, $\mathbf{F}_q$ le corps fini à q éléments, $\mathbf{Q}_q$ l'extension non ramifiée de $\mathbf{Q}_p$ de corps résiduel $\mathbf{F}_q$ et $\mathbf{Z}_q$ l'anneau des entiers de $\mathbf{Q}_q$. Soit $r : G_{\mathbf{Q}_p} \to \mathrm{GL}_2(\mathbf{F}_q)$ une représentation continue et absolument irréductible. D'après un résultat classique de Mazur (cf. [**Maz89**]), le foncteur des déformations de r aux $\mathbf{Z}_q$-algèbres locales finies de corps résiduel $\mathbf{F}_q$ est pro-représentable par une $\mathbf{Z}_q$-algèbre locale noethérienne complète $R(r)$ de corps résiduel $\mathbf{F}_q$. On désigne par $\mathcal{X}(r)$ l'espace analytique p-adique associé par Berthelot à $R(r)[1/p]$. D'après un théorème de Tate, si $\delta = \dim_{\mathbf{F}_q} \mathrm{Hom}_{G_{\mathbf{Q}_p}}(r, r(1))$, alors $\dim_{\mathbf{F}_q} H^2(G_{\mathbf{Q}_p}, \mathrm{ad}(r)) = \delta$ et $\dim_{\mathbf{F}_q} H^1(G_{\mathbf{Q}_p}, \mathrm{ad}(r)) = 5 + \delta$. Lorsque $r \not\simeq r(1)$, ce qui est par exemple toujours satisfait si $p > 3$, il vient que $R(r) \simeq \mathbf{Z}_q[\![t_0, t_1, \ldots, t_4]\!]$, de sorte que $\mathcal{X}(r)$ est isomorphe à la boule unité ouverte de dimension 5 sur $\mathbf{Q}_q$. Dans tous les cas, comme on le verra ci-dessous, $\mathcal{X}(r)$ est régulier de dimension 5.

Le $\mathbf{Q}_q$-espace analytique $\mathcal{X}(r)$ jouit d'une propriété universelle que nous rappelons à présent. Soit $\mathcal{Y}$ un $\mathbf{Q}_q$-affinoïde et $\rho : G_{\mathbf{Q}_p} \to \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}(\mathcal{Y}))$ une représentation continue. Pour $y \in \mathcal{Y}$, on note $\rho_y : G_{\mathbf{Q}_p} \to \mathrm{GL}_2(K(y))$ l'évaluation de ρ en y. On note aussi k_y le corps résiduel de $K(y)$, qui est alors muni d'un morphisme naturel $\mathbf{F}_q \to k_y$, ainsi que $\overline{\rho}_y : G_{\mathbf{Q}_p} \to \mathrm{GL}_2(k_y)$ la représentation résiduelle semi-simplifiée de ρ_y. On dit que ρ est *résiduellement constante et égale à* r si $\overline{\rho}_y \simeq r \otimes_{\mathbf{F}_q} k_y$ pour tout $y \in \mathcal{Y}$. Si $\mathcal{Y}$ est connexe, il suffit pour cela que cela soit vrai pour un $y \in \mathcal{Y}$. *Les points de $\mathcal{X}(r)$ dans un $\mathbf{Q}_q$-affinoïde $\mathcal{Y}$ sont en bijection canonique avec les classes d'isomorphisme de $\mathcal{O}(\mathcal{Y})$-représentations continues $\rho : G_{\mathbf{Q}_p} \to \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}(\mathcal{Y}))$ qui sont résiduellement constantes et égales à r.* Cela vaut en particulier pour les points fermés $x \in \mathcal{X}(r)$, qui sont en bijection avec les classes d'isomorphisme de relèvements $r_x : G_{\mathbf{Q}_p} \to \mathrm{GL}_2(K(x))$ de r. Enfin, cette propriété universelle appliquée aux $\mathbf{Q}_q$-algèbres locales artiniennes assure que pour tout x dans $\mathcal{X}(r)$, $\widehat{\mathcal{O}}_{\mathcal{X},x}$ est canoniquement isomorphe à la déformation (pro-)universelle de r_x au sens de Mazur. Comme $r_x \not\simeq r_x(1)$ pout tout $x \in \mathcal{X}(r)$, les théorèmes de Tate montrent bien que $\mathcal{X}(r)$ est régulier de dimension 5.

5.2. Points potentiellement triangulins de $\mathcal{X}(r)$. — Etant donnée une propriété de représentations, on dira que $x \in \mathcal{X}(r)$ a cette propriété si la représentation asscoiée r_x a cette propriété.

Conjecture 5.1. — *L'ensemble des points potentiellement triangulins est une partie fine de $\mathcal{X}(r)$.*

Un point technique nous empêche de démontrer cette conjecture, mais nous en montrons ci-dessous une variante à poids de Hodge-Tate-Sen et déterminant fixés. La théorie de Tate-Sen nous fournit un polynôme $P(T) = T^2 + aT + b \in \mathcal{O}(\mathcal{X}(r))[T]$ tel que pour tout $x \in \mathcal{X}(r)$ l'évaluation (des coefficients) de $P(T)$ en x est le polynôme de Sen de r_x. On dispose de plus d'une fonction $\lambda \in R(r)^\times$ qui est l'évaluation en $p \in \mathbf{Q}_p^\times = G_{\mathbf{Q}_p}^{\mathrm{ab}}$ du déterminant de la représentation universelle $G_{\mathbf{Q}_p} \to \mathrm{GL}_2(R(r))$.

Fixons une extension finie E de $\mathbf{Q}_q$ ainsi que $P_0 \in E[T]$ unitaire de degré 2 et $\lambda_0 \in \mathcal{O}_E^\times$, et considérons $\mathcal{X}_0 \subset \mathcal{X}(r) \times_{\mathbf{Q}_q} E$ le fermé défini par les équations $P = P_0$ et $\lambda = \lambda_0$. C'est un espace rigide sur E dont chaque composante irréductible est de dimension $\geqslant 2$ par le *hauptidealsatz* de Krull.[(2)]

Théorème 5.2. — *Pour tout (P_0, λ_0), l'ensemble des points potentiellement triangulins de chacune des composantes irréductibles de $\mathcal{X}_0$ en est une partie fine.*

Ce théorème entraîne le Théorème C de l'introduction par la proposition 4.5, ainsi donc que le théorème B.

Soit V une E-représentation trianguline de dimension 2 qui est absolument irréductible et $D_{\mathrm{rig}}(V)$ le (φ, Γ)-module étale sur l'anneau de Robba associé à V. Soient F une extension finie de E, ainsi que des caractères $\delta_i : \mathbf{Q}_p^\times \to F^\times$ pour $i = 1, 2$, tels que $D_{\mathrm{rig}}(V) \otimes_E F$ soit une extension de $(\mathbf{B}^\dagger_{\mathrm{rig},\mathbf{Q}_p} \otimes F)(\delta_2)$ par $(\mathbf{B}^\dagger_{\mathrm{rig},\mathbf{Q}_p} \otimes F)(\delta_1)$. On note $x : \mathbf{Q}_p^\times \to F^\times$ l'inclusion et on pose $\chi = x|x|$ (c'est le caractère cyclotomique). Rappelons que si $\delta_1\delta_2^{-1} \in \chi x^{\mathbf{N}}$ alors quitte à tordre la représentation V par un caractère, soit V est semi-stable non cristalline, soit V est cristalline telle que le quotient des deux valeurs propres de son frobenius cristallin est $p^{\pm 1}$.

Lemme 5.3. — *Soit $\mathcal{O}$ la déformation pro-universelle de V aux E-algèbres artiniennes de corps résiduel E, paramétrant les déformations de polynôme de Sen et déterminant constants. Si $\delta_1\delta_2^{-1} \notin \chi x^{\mathbf{N}}$, alors $\mathcal{O} \simeq E[\![X, Y]\!]$.*

Démonstration. — Si $\mathcal{O}'$ est la déformation pro-universelle de V aux E-algèbres artiniennes de corps résiduel E, alors on a déjà vu que $\mathcal{O}' \simeq E[\![X_1, \ldots, X_5]\!]$. Soient

(2) Un argument de torsion permet de voir que ces composantes irréductibles sont de dimension 3 au plus. Il est probable qu'elles soient toutes de dimension exactement 2, mais ceci est inutile pour la suite.

$T^2+aT+b \in \mathcal{O}[T]$ le polynôme de Sen universel, $\lambda \in \mathcal{O}^\times$ la valeur en p du déterminant de la déformation universelle, et $(T^2+a_0T+b_0,\lambda_0) \in E[T]\times E^\times$ leurs évaluations en 0. Par définition, $\mathcal{O} = \mathcal{O}'/(a-a_0, b-b_0, \lambda-\lambda_0)$. D'après un résultat classique sur les anneaux locaux réguliers, il suffit de voir que les images de $a-a_0$, $b-b_0$ et $\lambda-\lambda_0$ sont linéairement indépendantes sur E dans $\mathfrak{M}/\mathfrak{M}^2$ où $\mathfrak{M}$ est l'idéal maximal de $\mathcal{O}'$. Il suffit de le vérifier après extension des scalaires à F, et donc de voir qu'il existe des déformations $\widetilde{V}$ de $V\otimes_E F$ à $F[\varepsilon]/(\varepsilon)^2$ telles que $(a(\widetilde{V})-a_0, b(\widetilde{V})-b_0, \lambda(\widetilde{V})-\lambda_0)$ soit quelconque dans $(\varepsilon F)^3$. Par l'hypothèse sur $\delta_1\delta_2^{-1}$, cela résulte de [**BC09**, Prop. 2.3.10 (ii)], qui montre que l'on peut même choisir $\widetilde{V}$ trianguline sur $F[\varepsilon]/(\varepsilon^2)$ au sens de *loc.cit.* $\square$

Ainsi, si la représentation R de l'énoncé du théorème C satisfait les hypothèses du lemme ci-dessus, alors le point correspondant à R dans l'espace $\mathcal{X}_0 \subset \mathcal{X}(\overline{R})$ approprié est un point régulier. Dans ce cas, on peut donc prendre $F=E$ dans l'énoncé de ce théorème, d'après la proposition 4.5. La précision suivant l'énoncé du théorème C de l'introduction s'en déduit. Cela démontre en particulier qu'il existe des représentations non potentiellement triangulines qui sont à coefficients dans $\mathbf{Q}_p$.

5.3. Preuve du théorème 5.2. — Le reste du chapitre est consacré à la démonstration du théorème 5.2. D'après le théorème A de l'introduction et comme r est absolument irréductible, il y a trois types (non exclusifs) de représentations potentiellement triangulines :

(a) les représentations de de Rham tordues par un caractère ;

(b) les induites d'un caractère d'une extension quadratique de $\mathbf{Q}_p$;

(c) les représentations triangulines (déployées).

Ces représentations vivent dans des familles analytiques naturelles que nous décrivons à présent. Considérons tout d'abord le cas (b), qui est le plus simple. Il ne serait pas difficile d'expliciter la famille universelle (de dimension 3) formée de toutes les représentations de type (b). C'est cependant inutile pour l'application au théorème 5.2 car à déterminant et polynôme de Sen fixés, il n'y a qu'un nombre dénombrable de telles représentations.

En effet, il n'y a d'une part qu'un nombre fini d'extensions quadratiques K de $\mathbf{Q}_p$ (3 si $p\geqslant 3$ et 7 si $p=2$). D'autre part, fixons K une extension finie de $\mathbf{Q}_p$ et notons Σ l'ensemble des $[K:\mathbf{Q}_p]$ plongements de K dans $\overline{\mathbf{Q}}_p$. Si $\eta : G_K^{\mathrm{ab}} = \widehat{K^\times} \to \overline{\mathbf{Q}}_p^\times$ est un caractère continu, il existe des éléments uniques $a_\sigma \in \overline{\mathbf{Q}}_p$, $\sigma\in\Sigma$, tels que $\eta(x) = \prod_{\sigma\in\Sigma}\sigma(x)^{a_\sigma}$ pour tout x dans un sous-groupe ouvert assez petit de $\mathcal{O}_K^\times$. En particulier, le caractère η est d'ordre fini si, et seulement si, $a_\sigma=0$ pour tout $\sigma\in\Sigma$; la donnée des a_σ détermine donc η à multiplication près par un caractère d'ordre fini (et en particulier, un ensemble dénombrable de caractères). On conclut car le polynôme de Sen de $\mathrm{Ind}_{G_K}^{G_{\mathbf{Q}_p}}\eta$ est exactement $\prod_{\sigma\in\Sigma}(T-a_\sigma)$.

Intéressons nous maintenant au cas (c). Colmez a défini dans [**Col08**] l'espace $\mathcal{S}$ des représentations triangulines (nous nous limitons ici aux représentations irréductibles). Par construction, c'est un espace analytique sur $\mathbf{Q}_p$ de type dénombrable, équi-dimensionnel de dimension 4, et muni d'un morphisme naturel vers l'espace $\mathcal{D}$ des caractères p-adiques de $(\mathbf{Q}_p^\times)^2$ (une réunion disjointe finie de copies de $\mathbb{G}_m^2\times\mathcal{W}^2$ où $\mathcal{W}$ est la boule unité ouverte de dimension 1 sur $\mathbf{Q}_p$). L'espace défini par Colmez est construit de manière ad-hoc de sorte que ses points fermés paramètrent les représentations triangulines. Contrairement à ce que l'on pourrait penser, il n'existe pas de famille analytique de représentations galoisiennes sur $\mathcal{S}$ qui se spécialise en tout point sur la représentation paramétrée par ce point ; une première obstruction vient de ce que la représentation résiduelle associée n'est pas constante sur $\mathcal{S}$. Cependant, Colmez démontre une forme faible de ce type d'énoncé qui est suffisante pour notre application (mais pas tout à fait pour la conjecture 5.1). Si $x\in\mathcal{S}$ est un point fermé, il lui est associé un point $\delta(x)\in\mathcal{D}$, c'est à dire une paire de caractères continus $\delta_{i,x}:\mathbf{Q}_p^\times\to K(x)^\times$ pour $i=1,2$. Par construction, le D_{rig} de la $K(x)$-représentation V_x associée à x est une extension non triviale de $(\mathbf{B}^\dagger_{\mathrm{rig},\mathbf{Q}_p}\otimes K(x))(\delta_{2,x})$ par $(\mathbf{B}^\dagger_{\mathrm{rig},\mathbf{Q}_p}\otimes K(x))(\delta_{1,x})$. On note $\mathcal{S}'\subset\mathcal{S}$ l'ouvert admissible de $\mathcal{S}$ défini par la condition $(\delta_{1,x}/\delta_{2,x})(p)\notin p^{\mathbf{Z}}$. L'application naturelle $\mathcal{S}'\to\mathcal{D}$ est alors une immersion ouverte, et d'après [**Col08**, Prop. 5.2], pour tout $x\in\mathcal{S}'$ il existe un voisinage affinoïde $\mathcal{B}_x$ de x dans $\mathcal{S}'$ qui est une $K(x)$-boule, ainsi qu'une représentation continue $\rho^{\mathcal{B}_x}:G_{\mathbf{Q}_p}\to\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}(\mathcal{B}_x))$, dont l'évaluation en chaque $y\in\mathcal{B}_x$ est isomorphe à V_y. Comme $\mathcal{S}'$ est de type dénombrable, car $\mathcal{D}$ l'est, on peut extraire du recouvrement des $\mathcal{B}_x$ un recouvrement dénombrable $\{\mathcal{B}_x\}_{x\in I}$ avec $I\simeq\mathbf{Z}_{\geqslant 0}$. On pose alors

$$\mathcal{S}'_{\mathrm{dec}}=\coprod_{x\in I}\mathcal{B}_x.$$

Il s'agit d'une “déconnexion” non canonique de $\mathcal{S}'$. On a par ailleurs une immersion ouverte surjective évidente $\mathcal{S}'_{\mathrm{dec}}\to\mathcal{S}'$ ainsi qu'une représentation galoisienne naturelle $\rho^{\mathcal{S}'_{\mathrm{dec}}}:G_{\mathbf{Q}_p}\to\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}(\mathcal{S}'_{\mathrm{dec}}))$ obtenue à partir des $\rho^{\mathcal{B}_x}$ pour $x\in I$. Notons enfin que via l'inclusion $\mathcal{S}'\subset\mathcal{D}$, l'opération consistant à fixer le polynôme de Sen et le déterminant en p est encore parfaitement transparente, et que les lieux obtenus sont de type dénombrable et équi-dimensionnels de dimension $4-3=1$.

Il nous faut maintenant comprendre $\mathcal{S}\backslash\mathcal{S}'$. Remarquons que lorsque le polynôme de Sen d'une représentation trianguline $x\in\mathcal{S}$ est donné, on connaît les deux caractères $\delta_{1,x|\mathbf{Z}_p^\times}$ et $\delta_{2,x|\mathbf{Z}_p^\times}$ à des caractères d'ordre fini près. Si de plus on ne s'interesse qu'à des représentations dans $\mathcal{S}\backslash\mathcal{S}'$ dont le déterminant en p est aussi donné, cela détermine un nombre dénombrable de $\delta_{i,x}(p)$ possibles, et donc de paires de $\delta_{i,x}$ possibles. Pour chacune de ces paires, il y a en fait une et une seule représentation trianguline associée dans $\mathcal{S}\backslash\mathcal{S}'$, à moins que $\delta_{1,x}/\delta_{2,x}$ ne soit de la forme $z \mapsto z^i|z|$ pour un entier $i \geqslant 1$, d'après [**Col08**, Thm. 2.9].(3) Mais dans ce cas, les représentations possibles sont des torsions par un caractère de représentations semi-stables, et sont donc du type (a).

Terminons enfin par le type (a). Le lieu de de Rham de $\mathcal{X}(r)$, s'il est non vide, est un fermé analytique (cf [**BC08**]). En particulier, il est de type dénombrable. Sa dimension a été calculée par Kisin dans [**Kis08**, Thm. 3.3.8] : elle est toujours $\leqslant 1$. Par torsion, on en déduit que pour tout caractère $\eta : G_{\mathbf{Q}_p} \to F^\times$ (F étant une extension finie de E), le lieu des $x \in \mathcal{X}(r) \times_E F$ tels que $r_x \otimes \eta$ soit de de Rham est encore un fermé analytique de dimension $\leqslant 1$. Pour récapituler, nous avons démontré le résultat suivant :

Lemme 5.4. — *Il existe un E-espace analytique $\mathcal{Y}$, ainsi qu'une représentation continue $\rho : G_{\mathbf{Q}_p} \to \mathcal{O}(\mathcal{Y})^\times$, tels que :*
- *$\mathcal{Y}$ est de type dénombrable et de dimension $\leqslant 1$,*
- *le polynôme de Sen de ρ est constant égal à P_0, et son déterminant en p est constant égal à λ_0,*
- *pour tout point $x \in \mathcal{X}_0$ potentiellement triangulin, il existe $y \in \mathcal{Y}$, et des plongements de $K(x)$ et $K(y)$ dans $\overline{\mathbf{Q}}_p$, tels que $\rho_y \otimes_{K(y)} \overline{\mathbf{Q}}_p \simeq r_x \otimes_{K(x)} \overline{\mathbf{Q}}_p$,*
- *pour tout $y \in \mathcal{Y}$, la représentation ρ_y est potentiellement trianguline.*

En effet, on peut prendre pour $\mathcal{Y}$ la réunion disjointe de : l'ensemble dénombrable des points de type (b), l'ensemble dénombrable des points de type (c) dans $\mathcal{S}\backslash\mathcal{S}'$ qui ne sont pas de type (a), l'espace $\mathcal{S}'_{\mathrm{dec}}$, et pour chaque $\eta : G_{\mathbf{Q}_p} \to F^\times$ dans un ensemble dénombrable, du lieu de de Rham de $\mathcal{X}(r) \times_E F$.

Le théorème 5.2 est maintenant immédiat : soit $\mathcal{Y}(r) \subset \mathcal{Y}$ l'ouvert fermé sur lequel la représentation ρ ci-dessus est résiduellement constante et isomorphe à r. Par la propriété universelle de $\mathcal{X}(r)$, et donc de $\mathcal{X}_0$, la représentation ρ correspond à un morphisme analytique $f : \mathcal{Y}(r) \to \mathcal{X}_0$. De plus, $f(\mathcal{Y}(r))$ est exactement l'ensemble des points potentiellement triangulins de $\mathcal{X}_0$. Il vient que $f(\mathcal{Y}(r))$ est fine dans $\mathcal{X}_0$ car chaque composante irréductible de $\mathcal{X}_0$ est de dimension $\geqslant 2$.

Références

[BC08] L. Berger & P. Colmez – « Familles de représentations de de Rham et monodromie p-adique », *Astérisque* (2008), no. 319, p. 303–337.

(3) Notons que l'autre cas a priori exceptionnel, où $\delta_{1,x}/\delta_{2,x}$ est de la forme $z \mapsto z^{-i}$ pour $i \geqslant 0$, ne se produit pas pour $x \in \mathcal{S}$, car il ne correspond pas à un $(\varphi, \Gamma_{\mathbf{Q}_p})$-module étale si $i \neq 0$, et qu'il est réductible si $i = 0$.

[BC09] J. Bellaïche & G. Chenevier – « Families of Galois representations and Selmer groups », Astérisque 324, to appear, 2009.

[Ber08] L. Berger – « Construction de (φ, Γ)-modules : représentations p-adiques et B-paires », *Algebra Number Theory* **2** (2008), no. 1, p. 91–120.

[Col08] P. Colmez – « Représentations triangulines de dimension 2 », *Astérisque* (2008), no. 319, p. 213–258.

[Fon94] J.-M. Fontaine – « Le corps des périodes p-adiques », *Astérisque* (1994), no. 223, p. 59–111, With an appendix by Pierre Colmez, Périodes p-adiques (Bures-sur-Yvette, 1988).

[Fon04] ———, « Arithmétique des représentations galoisiennes p-adiques », *Astérisque* (2004), no. 295, p. xi, 1–115, Cohomologies p-adiques et applications arithmétiques. III.

[Ked04] K. S. Kedlaya – « A p-adic local monodromy theorem », *Ann. of Math. (2)* **160** (2004), no. 1, p. 93–184.

[Kie67] R. Kiehl – « Die de Rham Kohomologie algebraischer Mannigfaltigkeiten über einem bewerteten Körper », *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* (1967), no. 33, p. 5–20.

[Kis08] M. Kisin – « Potentially semi-stable deformation rings », *J. Amer. Math. Soc.* **21** (2008), no. 2, p. 513–546.

[Maz89] B. Mazur – « Deforming Galois representations », Galois groups over $\mathbf{Q}$ (Berkeley, CA, 1987), Math. Sci. Res. Inst. Publ., vol. 16, Springer, New York, 1989, p. 385–437.

[Nak09] K. Nakamura – « Classification of two-dimensional split trianguline representations of p-adic fields », *Compos. Math.* **145** (2009), no. 4, p. 865–914.

[Sen81] S. Sen – « Continuous cohomology and p-adic Galois representations », *Invent. Math.* **62** (1980/81), no. 1, p. 89–116.

Laurent Berger
Gaëtan Chenevier