

---

# QUE FONT LES MATHÉMATIENS?

*par*

Laurent Berger

---

Il y a plusieurs façons de faire de mathématiques. L'une d'entre elles, celle que je veux décrire, consiste à s'attaquer à des problèmes ouverts, les fameuses conjectures laissées de côté par des mathématiciens qui préfèrent avancer dans leur exploration de l'inconnu, en laissant à d'autres le soin de vérifier les conséquences de leurs théories. Si la solution de ces problèmes permet généralement de débloquer une théorie, et de l'enrichir, la motivation peut être plus terre-à-terre : l'envie d'être le premier à trouver la solution d'un problème, le plaisir de répondre à des questions difficiles, la satisfaction de se rendre compte que plusieurs aspects jusque là disparates d'un domaine ont en fait des relations étroites.

Résoudre un problème, c'est généralement démontrer un résultat, c'est-à-dire expliquer avec suffisamment de rigueur et de clarté pourquoi il est vrai. Voici un exemple : dessinez un triangle dont vous appelez  $A$ ,  $B$  et  $C$  les sommets. Tracez la médiatrice des trois côtés  $AB$ ,  $BC$  et  $CA$  (la médiatrice d'un segment est la droite qui lui est perpendiculaire et passe par son milieu). Si vous avez été suffisamment soigneux, vous constaterez que ces trois droites se coupent en un même point. Vous serez donc amené à conjecturer que les médiatrices d'un triangle sont concourantes (cela rappellera à certains leurs cours de maths du lycée). Comment démontrer cela ? Vous pouvez faire de l'algèbre : donner des noms aux coordonnées des trois sommets puis calculer les équations des médiatrices puis vérifier que ces trois équations ont une solution commune. C'est une démonstration parfaitement valable, et si vous détaillez suffisamment vos calculs, alors chacun de vos amis pourra les refaire ligne à ligne et vérifier que votre conjecture est effectivement vraie. Cela illustre d'ailleurs un aspect des mathématiques : démontrer, ce n'est pas expliquer. Si on suit les calculs ligne à ligne, on ne comprendra probablement pas pourquoi le résultat est vrai. Voici une autre démonstration qui est plus éclairante ; elle consiste à essayer de comprendre en quoi les médiatrices sont des droites spéciales. La médiatrice d'un segment  $AB$ , c'est l'ensemble des points  $P$  qui sont à la même distance de  $A$  et  $B$ . Dans notre triangle, les deux médiatrices de  $AB$  et  $BC$  se coupent en un point  $P$  qui est équidistant

de A et B (puisqu'il est sur la première médiatrice) et équidistant de B et de C (puisqu'il est sur la deuxième médiatrice) et donc équidistant de C et de A, ce qui fait qu'il est aussi sur la troisième médiatrice et donc que ces trois droites sont bien concourantes. Quand on a le bon point de vue, les choses deviennent beaucoup plus simples !

Voici maintenant un exemple d'un problème que personne ne sait résoudre. On part d'un entier  $n$  supérieur ou égal à 1. Si  $n$  est pair, on le divise par deux et si  $n$  est impair on le remplace par  $3n + 1$ . Par exemple, si on part de 13, alors on tombe successivement sur 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2 et 1. Le problème est de montrer que quelque soit l'entier de départ, on finit toujours par tomber sur le nombre 1. D'après Wikipédia : « Cette conjecture mobilisa tant les mathématiciens durant les années 60, en pleine guerre froide, qu'une blague courut selon laquelle ce problème serait l'oeuvre d'un complot soviétique pour ralentir la recherche américaine ». Bon courage !

Quand on est face à un problème non-résolu, on est face à un mur. On commence alors à taper sur le mur en divers endroits, dans l'espoir de trouver un point faible, un endroit où les pierres sont mal ajustées pour attaquer la maçonnerie. Bien souvent, ça résiste, et commence alors une longue période que beaucoup de mathématiciens connaissent bien, d'incertitude et de détermination, pendant laquelle on essaye les outils que l'on a, on utilise les méthodes que l'on connaît bien et on cherche à comprendre ce qui se passe. Comme c'est un procédé assez frustrant, il est utile de travailler sur plusieurs problèmes à la fois (et bien souvent, les uns éclairent les autres), de discuter de ses questions avec les collègues et de se changer les idées pour éviter la surchauffe. Après une période plus ou moins longue (quelques jours, quelques semaines voire quelques mois), on finit par progresser. Par exemple, on a traité un cas particulier et il semble représentatif du cas général, ou bien on a séparé le problème en plusieurs cas et certains de ces cas ont l'air faisables, ou encore on n'a pas très bien compris ce qui se passe, mais on a de gros calculs qui semblent donner la bonne réponse. Dès qu'on a trouvé une faiblesse dans le mur, on peut se mettre à l'attaquer sérieusement, et plus on avance et plus on peut abattre de gros pans.

On passe alors à la deuxième phase : on voit plus ou moins ce qu'il faut faire, et il faut mettre sa solution au propre et vérifier les détails. Si l'on a une idée générale de la démonstration d'un résultat, sa rédaction peut réserver des surprises : on se rend compte que tel raccourci est en fait un piège, que tel résultat intermédiaire n'est pas assez puissant, etc. On a quelque fois l'impression d'essayer de boucher les trous d'un ballon fragile rempli d'eau ; dès que l'on a réparé un trou, ça se met à fuir d'un autre endroit ! Et pour peu que les trous soient trop importants, on est forcé de revenir à la première étape. Mais dès que l'on a bouché tous les trous, alors on peut finir tranquillement et produire

une solution aussi élégante que possible au problème qu'on s'était fixé. Et la conjecture est démontrée!

Voilà comment travaillent certains mathématiciens. Mais que fait la communauté mathématique? L'objet du travail des mathématiciens, c'est de comprendre les phénomènes mathématiques et de synthétiser l'ensemble des connaissances que nous avons en les unifiant, en trouvant le bon point de vue. Les milliers de résultats que l'on démontre chaque année servent à repousser et à délimiter la frontière de ce qui est vrai. On peut alors, avec suffisamment de recul, l'expliquer complètement et l'intégrer au corps permanent des mathématiques. Dans ce travail, les contributions de chacun comptent!

---

LAURENT BERGER