Laurent Berger

REPRÉSENTATIONS GALOISIENNES ET ANALYSE p-ADIQUE

Laurent Berger

***Classification mathématique par sujets* (2000). —** 11F.

Octobre 2006

REPRÉSENTATIONS GALOISIENNES ET ANALYSE p-ADIQUE

Laurent Berger

Résumé. — Ce texte est mon mémoire d'habilitation à diriger des recherches. J'y explique les résultats que j'ai obtenus concernant les représentations galoisiennes p-adiques.

TABLE DES MATIÈRES

REMERCIEMENTS

Je remercie vivement les six membres du jury de me faire l'honneur d'en faire partie. Pierre Colmez et Jean-Marc Fontaine tout d'abord, dont les travaux ont été le point de départ et l'inspiration de ma recherche. Christophe Breuil ensuite, qui m'a proposé de travailler sur son programme de Langlands p-adique et m'a guidé au long de ce travail, puis Michael Harris et Peter Schneider, dont la présence témoigne de cette nouvelle orientation de ma recherche. Je remercie enfin Laurent Lafforgue pour sa présence amicale et son soutien du p-adique à l'IHES !

Je remercie par ailleurs le CNRS et l'IHES de m'avoir fourni d'excellentes conditions de travail pendant ces deux dernières années.

INTRODUCTION

Afin d'étudier les représentations p-adiques du groupe de Galois d'un corps local, Fontaine a introduit plusieurs outils qui se sont révélés très utiles. Parmi ces outils, figurent la théorie de Hodge p-adique (le corps $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$ et ses sous-anneaux) et la théorie des (φ, Γ)-modules. Ces deux théories sont en fait étroitement reliées, et l'explicitation de ces liens a permis de résoudre certains des problèmes fondamentaux de la théorie. L'objet de ce mémoire est de donner un panorama des résultats que j'ai démontrés dans cette direction ainsi que (dans la plupart des cas) une explication de leur démonstration.

On commence par quelques rappels sur la théorie de Hodge p-adique et sur les (φ, Γ)-modules, puis sur la manière de relier ces deux mondes (éléments surconvergents). Comme corollaires des idées introduites, on montre le théorème de monodromie p-adique ainsi que le théorème d'admissibilité de Colmez-Fontaine. Dans le deuxième chapitre, on explique comment les résultats du chapitre précédent permettent de donner des « formules explicites » pour l'exponentielle de Bloch-Kato et sa duale. Comme corollaires, on donne une construction de l'exponentielle de Perrin-Riou via les (φ, Γ)-modules, ainsi que le calcul des « normes universelles » pour une représentation de de Rham. Dans le troisième chapitre, on donne une autre application des résultats du premier, cette fois-ci à la théorie des (φ, Γ)-modules. On montre que les (φ, Γ)-modules des représentations cristallines sont particulièrement sympathiques : c'est la théorie des modules de Wach. Comme application, on montre qu'une limite de sous-quotients de représentations cristallines (à poids bornés) est elle-même cristalline. Ensuite, on calcule la réduction modulo p de certaines représentations locales associées aux formes modulaires. Enfin, on explique comment la théorie des modules de Wach permet de montrer une conjecture de Perrin-Riou sur l'intégralité de son exponentielle. Dans le dernier chapitre, on mentionne brièvement le programme de Langlands p-adique de Breuil et deux types de résultats obtenus (en caractéristique nulle, pour les représentations cristabellines, et en caractéristique p).

CHAPITRE 1

THÉORIE DE HODGE p-ADIQUE ET (φ,Γ)-MODULES

L'objet de ce chapitre est de donner quelques rappels sur la théorie de Hodge p-adique et sur les (φ,Γ)-modules, puis d'expliquer comment ces deux théories sont reliées. Nous verrons notamment comment on peut utiliser ces résultats pour montrer le théorème de monodromie p-adique ainsi que le théorème de Colmez-Fontaine.

1.1. Théorie de Hodge p-adique

Soit p un nombre premier, K une extension finie de $\mathbf{Q}_p$ et $G_K = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/K)$. Une représentation p-adique de G_K est un $\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel V de dimension finie d, muni d'une action linéaire et continue de G_K. La principale stratégie (due à Fontaine, voir par exemple [**Fon94b**]) pour étudier les représentations p-adiques de G_K est de construire des anneaux de périodes p-adiques, c'est-à-dire des $\mathbf{Q}_p$-algèbres topologiques B munies d'une action de G_K et de structures supplémentaires de telle manière que si V est une représentation p-adique, alors $D_B(V) = (B \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{G_K}$ est un B^{G_K}-module qui hérite de ces structures, et que le foncteur qui à V associe $D_B(V)$ fournisse des invariants intéressants de V. On dit qu'une représentation p-adique V de G_K est B-admissible si on a $B \otimes_{\mathbf{Q}_p} V \simeq B^d$ en tant que $B[G_K]$-modules.

Fontaine a construit un certain nombre d'anneaux de périodes p-adiques, dont $\mathbf{B}_{\mathrm{cris}}$, $\mathbf{B}_{\mathrm{st}}$ et $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$. L'anneau $\mathbf{B}_{\mathrm{cris}}$ est muni d'un frobenius φ, l'anneau $\mathbf{B}_{\mathrm{st}} \supset \mathbf{B}_{\mathrm{cris}}$ est muni d'un frobenius φ et d'un opérateur de monodromie N tel que $\mathbf{B}_{\mathrm{cris}} = \mathbf{B}_{\mathrm{st}}^{N=0}$, et enfin l'anneau $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$ est un corps muni d'une filtration $\{\mathrm{Fil}^i \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}\}_{i\in\mathbf{Z}}$. De plus, si l'on pose $K_0 = K \cap \mathbf{Q}_p^{nr}$, alors $K_0 \subset \mathbf{B}_{\mathrm{st}}$ et on a une application naturelle injective $K \otimes_{K_0} \mathbf{B}_{\mathrm{st}} \to \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$. Les représentations admissibles pour ces anneaux sont dites cristallines, semistables ou de de Rham. Les foncteurs $D_B(\cdot)$ correspondants sont notés $\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(\cdot)$, $\mathrm{D}_{\mathrm{st}}(\cdot)$ et $\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(\cdot)$. Etant données les structures dont sont munies ces anneaux, on voit que si V est une représentation p-adique, alors $\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V)$ est un φ-module filtré sur K, $\mathrm{D}_{\mathrm{st}}(V)$ est un (φ,N)-module filtré sur K et $\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V)$ est un K-espace vectoriel filtré.

Les anneaux $\mathbf{B}_{\mathrm{cris}}$, $\mathbf{B}_{\mathrm{st}}$ et $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$ sont d'ailleurs reliés à la géométrie arithmétique comme le montre le théorème de Tsuji (voir [**Tsj99, Tsj02**], c'est l'ancienne conjecture C_{st} de Fontaine-Jannsen) : si X est un schéma propre sur K qui a réduction semistable, $m \geqslant 0$ et $V = H^m_{et}(X_{\overline{K}}, \mathbf{Q}_p)$, alors V est semi-stable et $\mathrm{D}_{\mathrm{st}}(V) \simeq H^m_{log-cris}(X)$.

Si D est un (φ, N)-module filtré sur K, rappelons que l'on dit que D est admissible si $t_H(D) = t_N(D)$ et si pour tout sous-objet $D' \subset D$, on a $t_H(D') \leqslant t_N(D')$. On peut montrer que si V est une représentation semistable, alors $\mathrm{D}_{\mathrm{st}}(V)$ est un (φ, N)-module filtré admissible, et la réciproque de cette affirmation est le théorème de Colmez-Fontaine (cf. [**CF00**]) rappelé ci-dessous.

Théorème 1.1.1. — *Si D est un (φ, N)-module filtré admissible, alors il existe une représentation semistable V telle que* $\mathrm{D}_{\mathrm{st}}(V) \simeq D$.

Nous verrons plus loin comment on peut démontrer ce théorème en utilisant des résultat de Kedlaya concernant les φ-modules sur l'anneau de Robba (cf. §1.5). Un autre résultat important sur lequel nous reviendons est le théorème de monodromie p-adique. Rappelons que l'on dit qu'une représentation V de G_K est potentiellement semistable s'il existe une extension finie L de K telle que la restriction de V à G_L est semistable. On a alors le théorème suivant (cf. [**Ber02**] et [**And02b, Ked04, Meb01**]).

Théorème 1.1.2. — *Si V est une représentation de de Rham, alors V est potentiellement semistable.*

1.2. Les (φ, Γ)-modules

Comme le montre le théorème de Tsuji rappelé au paragraphe 1.1, la théorie de Hodge p-adique se prête bien à l'étude des représentations d'origine géométrique. Pour les autres, il faut introduire un outil plus flexible : la théorie des (φ, Γ)-modules. C'est ce qu'a fait Fontaine dans [**Fon90**]. Pour simplifier les notations, nous allons rappeler cette théorie pour les représentations de G_K avec $K = \mathbf{Q}_p$.

Si $n \geqslant 1$, soit $K_n = \mathbf{Q}_p(\zeta_{p^n})$, soit $H_K = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/K_\infty)$ et soit $\Gamma = \mathrm{Gal}(K_\infty/\mathbf{Q}_p)$ qui est isomorphe à $\mathbf{Z}_p^\times$ via le caractère cyclotomique $\gamma \mapsto \chi(\gamma)$. Soit $\mathscr{E}$ le corps des séries formelles $f(X) = \sum_{i \in \mathbf{Z}} a_i X^i$ avec $a_i \in \mathbf{Q}_p$ et telles que $\{a_i\}_{i \in \mathbf{Z}}$ est borné et $a_i \to 0$ quand $i \to -\infty$. On note $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$ l'anneau des entiers de $\mathscr{E}$ pour la topologie p-adique. Remarquons que $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}/p \simeq \mathbf{F}_p(\!(X)\!)$. Le corps $\mathscr{E}$ est muni d'un frobenius $\varphi : f(X) \mapsto f((1+X)^p - 1)$ et d'une action de Γ donnée par la formule $\gamma : f(X) \mapsto f((1+X)^{\chi(\gamma)} - 1)$.

Un (φ, Γ)-module sur $\mathscr{E}$ est un $\mathscr{E}$-espace vectoriel D de dimension finie d muni d'un frobenius φ semi-linéaire tel que $\varphi^*(D) = D$ et d'une action continue de Γ par des applications semi-linéaires commutant à φ. On dit qu'un (φ,Γ)-module D sur $\mathscr{E}$ est étale s'il en existe une base dans laquelle $\mathrm{Mat}(\varphi) \in \mathrm{GL}_d(\mathscr{O}_{\mathscr{E}})$.

Fontaine a construit dans [**Fon90**] un anneau $\mathbf{B}$ muni d'un frobenius φ et d'une action de $G_{\mathbf{Q}_p}$ qui est tel que $\mathbf{B}^{\varphi=1} = \mathbf{Q}_p$ et $\mathbf{B}^{H_{\mathbf{Q}_p}} = \mathscr{E}$, et il a montré le théorème ci-dessous.

Théorème 1.2.1. — *Le foncteur qui à une représentation V associe le (φ,Γ)-module $\mathrm{D}(V) = (\mathbf{B} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{H_{\mathbf{Q}_p}}$ est une équivalence de catégories de la catégorie des représentations de $G_{\mathbf{Q}_p}$ vers la catégorie des (φ,Γ)-modules étales sur $\mathscr{E}$.*

L'inverse de ce foncteur est donné par la formule $D \mapsto (\mathbf{B} \otimes_{\mathscr{E}} D)^{\varphi=1}$.

On peut donc en principe retrouver tous les invariants associés à une représentation V à partir de son (φ,Γ)-module $\mathrm{D}(V)$. La réalisation de cela est le thème principal de ce mémoire : comment faire le lien entre la théorie des (φ,Γ)-modules et la théorie de Hodge p-adique.

Notons que le théorème 1.2.1 ci-dessus est très flexible, et que l'on a de même des équivalences entre $\mathbf{Z}_p$-représentations et (φ,Γ)-modules étales sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$ et en particulier entre $\mathbf{F}_p$-représentations et (φ,Γ)-modules sur $\mathbf{F}_p(\!(X)\!)$.

1.3. Eléments surconvergents

La première étape pour faire le lien entre la théorie des (φ,Γ)-modules et la théorie de Hodge p-adique est de faire le lien entre l'anneau de périodes $\mathbf{B}$ et l'anneau de périodes $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$. Tout élément $x \in \mathbf{B}$ peut s'écrire $x = \sum_{i \gg -\infty} p^i [x_i]$ avec x_i appartenant à un certain anneau $\widetilde{\mathbf{E}}$ et on note (comme dans [**CC98**]) $\mathbf{B}^\dagger$ l'ensemble des $x \in \mathbf{B}$ tels qu'il existe $n \geqslant 0$ ayant la propriété que la série $\sum_{i \gg -\infty} p^i [x_i^{1/p^n}]$ converge dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$. Ceci fait de $\mathbf{B}^\dagger$ un sous-corps de $\mathbf{B}$, qui y est dense pour la topologie p-adique. On a toujours $(\mathbf{B}^\dagger)^{\varphi=1} = \mathbf{Q}_p$ mais $(\mathbf{B}^\dagger)^{H_{\mathbf{Q}_p}} = \mathscr{E}^\dagger$ où $\mathscr{E}^\dagger$ est l'ensemble des séries formelles $f(X) \in \mathscr{E}$ ayant la propriété qu'il existe $r < 1$ tel que $f(X)$ converge sur la couronne $\{r \leqslant |X|_p < 1\}$. On définit comme au paragraphe précédent la notion de (φ,Γ)-module sur $\mathscr{E}^\dagger$ et on a alors le théorème ci-dessous, dû à Cherbonnier et Colmez (cf. [**CC98**]).

Théorème 1.3.1. — *Le foncteur $\mathrm{D}^\dagger \mapsto \mathscr{E} \otimes_{\mathscr{E}^\dagger} \mathrm{D}^\dagger$ est une équivalence de catégories de la catégorie des (φ,Γ)-modules étales sur $\mathscr{E}^\dagger$ vers la catégorie des (φ,Γ)-modules étales sur $\mathscr{E}$.*

En particulier, si V est une représentation p-adique, alors on peut lui associer $\mathrm{D}^\dagger(V)$ et on montre que l'on a alors $\mathrm{D}^\dagger(V) = (\mathbf{B}^\dagger \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{H_{\mathbf{Q}_p}}$.

1.4. Des (φ, Γ)-modules à la théorie de Hodge p-adique

Soit $\mathscr{R}$ l'anneau des séries formelles $f(X) = \sum_{i \in \mathbf{Z}} a_i X^i$ avec $a_i \in \mathbf{Q}_p$ ayant la propriété qu'il existe $r < 1$ tel que $f(X)$ converge sur la couronne $\{r \leqslant |X|_p < 1\}$, ce qui fait que $\mathscr{E}^\dagger$ s'identifie au sous-anneau de $\mathscr{R}$ formé des séries à coefficients bornés. L'anneau $\mathscr{R}$ est appelé « l'anneau de Robba ». Par exemple, $t = \log(1+X) \in \mathscr{R}$. Posons aussi $\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}} = \cap_{j \geqslant 0} \varphi^j(\mathbf{B}^+_{\mathrm{cris}})$; on montre sans mal que si V est une représentation de G_K, alors en fait $\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V) = (\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}}[1/t] \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{G_K}$. Afin de récupérer $\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V)$ et $\mathrm{D}_{\mathrm{st}}(V)$ à partir de $\mathrm{D}^\dagger(V)$, on construit un anneau $\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger_{\mathrm{rig}}$ qui contient $\mathbf{B}^\dagger$, $\mathscr{R}$ et $\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}}$. En particulier, les deux objets $\mathscr{R}[1/t] \otimes_{\mathscr{E}^\dagger} \mathrm{D}^\dagger(V)$ et $\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V)$, qui n'ont a priori rien à voir entre eux, vivent tous les deux dans $\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger_{\mathrm{rig}}[1/t] \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$ et on a le théorème ci-dessous (cf. [**Ber02**]) qui est valable quel que soit K, quitte à étendre la définition de $\mathscr{E}^\dagger$ et $\mathscr{R}$.

Théorème 1.4.1. — *Si V est une représentation de G_K, alors* $\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V) = (\mathscr{R}[1/t] \otimes_{\mathscr{E}^\dagger} \mathrm{D}^\dagger(V))^{\Gamma_K}$ *et* $\mathrm{D}_{\mathrm{st}}(V) = (\mathscr{R}[\log(X), 1/t] \otimes_{\mathscr{E}^\dagger} \mathrm{D}^\dagger(V))^{\Gamma_K}$.

Si de plus V est cristalline, alors $\mathscr{R}[1/t] \otimes_{K_0} \mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V) = \mathscr{R}[1/t] \otimes_{\mathscr{E}^\dagger} \mathrm{D}^\dagger(V)$ *et si V est semistable, alors* $\mathscr{R}[\log(X), 1/t] \otimes_{K_0} \mathrm{D}_{\mathrm{st}}(V) = \mathscr{R}[\log(X), 1/t] \otimes_{\mathscr{E}^\dagger} \mathrm{D}^\dagger(V)$.

La caractérisation des représentations de de Rham est plus délicate, et en utilisant les résultats de Fontaine sur les $\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}$-représentations (voir [**Fon04a**]), on trouve le théorème ci-dessous (cf. [**Ber02**]), où l'on a posé $\nabla_V = \log(\gamma)/\log_p(\chi(\gamma))$ (c'est l'opérateur qui donne l'action de l'algèbre de Lie de Γ_K sur $\mathscr{R}[1/t] \otimes_{\mathscr{E}^\dagger} \mathrm{D}^\dagger(V)$).

Théorème 1.4.2. — *Si V est une représentation de G_K, alors V est de de Rham si et seulement s'il existe un $\mathscr{R}$-module libre* $\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V) \subset \mathscr{R}[1/t] \otimes_{\mathscr{E}^\dagger} \mathrm{D}^\dagger(V)$, *tel que* $\mathscr{R}[1/t] \otimes_{\mathscr{R}} \mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V) = \mathscr{R}[1/t] \otimes_{\mathscr{E}^\dagger} \mathrm{D}^\dagger(V)$ *et tel que* $\nabla_V(\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V)) \subset t \cdot \mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V)$.

Si V est de de Rham, on montre alors que $\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V)$ est aussi stable par φ et que l'on a $\varphi^*(\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V)) = \mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V)$. Par exemple, si V est cristalline, alors $\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V) = \mathscr{R} \otimes_{K_0} \mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V)$ et si V est semistable, alors $\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V) = (\mathscr{R}[\log(X)] \otimes_{K_0} \mathrm{D}_{\mathrm{st}}(V))^{N=0}$.

Les deux théorèmes ci-dessus sont à la base de la démonstration du théorème de monodromie p-adique, et de la démonstration du théorème de Colmez-Fontaine via les (φ, Γ)-modules. Ces démonstrations sont expliquées dans les trois paragraphes suivants.

1.5. La théorie de Kedlaya pour les φ-modules sur $\mathscr{R}$

Un φ-module sur $\mathscr{R}$ est un $\mathscr{R}$-module M libre de rang fini, muni d'un frobenius φ semi-linéaire et tel que $\varphi^*(M) = M$. On dit qu'un tel objet est isocline de pente $s = n/q$ si et seulement si on peut écrire $M = \mathscr{R} \otimes_{\mathscr{E}^\dagger} M^\dagger$ où $M^\dagger$ est un φ-module sur $\mathscr{E}^\dagger$ qui a une base dans laquelle $\mathrm{Mat}(p^{-n}\varphi^q) \in \mathrm{GL}_d(\mathscr{O}^\dagger_{\mathscr{E}})$. Le φ-module $M^\dagger$ (et la pente !) sont alors déterminés par M. Par exemple, M est isocline de pente 0 si et seulement si $M^\dagger$ est étale. Le théorème ci-dessous est dû à Kedlaya (cf. [**Ked04**]).

Théorème 1.5.1. — *Si M est un φ-module sur $\mathscr{R}$, alors il existe une unique filtration $0 = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_\ell = M$ par des sous-φ-modules saturés, telle que :*

(1) *pour tout $1 \leqslant i \leqslant \ell$, le quotient M_i/M_{i-1} est isocline ;*

(2) *si l'on appelle s_i la pente de M_i/M_{i-1}, alors $s_1 < s_2 < \cdots < s_\ell$.*

Il faut prendre garde au fait qu'un φ-module isocline de pente s peut très bien avoir des sous-objets saturés de pente $> s$; ce n'est que la filtration par les pentes croissantes qui est canonique.

Remarquons pour terminer ce paragraphe que les pentes se comportent comme on le pense vis-à-vis des opérations $\oplus$, $\otimes$, $\wedge$, etc.

1.6. Equations différentielles et monodromie p-adique

Une équation différentielle p-adique est un $\mathscr{R}$-module M, libre de rang fini, muni d'un opérateur différentiel $\partial_M : M \to M$. On dit que M est munie d'une structure de frobenius s'il existe $\varphi : M \to M$ qui est compatible avec ∂_M. On appelle extension étale de $\mathscr{R}$ un anneau $\mathscr{R}'$ de la forme $\mathscr{R}' = \mathscr{R} \otimes_{\mathscr{E}^\dagger} (\mathbf{B}^\dagger)^{H_K}$ où K est une extension finie de $\mathbf{Q}_p$. Enfin, étant donnée une équation différentielle M, on dit que M est :

– triviale, si $M = \mathscr{R} \otimes M^{\partial_M = 0}$;

– unipotente, si $\mathscr{R}[\log(X)] \otimes M = \mathscr{R}[\log(X)] \otimes (\mathscr{R}[\log(X)] \otimes M)^{\partial_M = 0}$, ce qui revient à dire que M est extension successive d'équations triviales ;

– potentiellement triviale ou unipotente s'il existe une extension étale $\mathscr{R}'$ de $\mathscr{R}$ telle que $\mathscr{R}' \otimes_{\mathscr{R}} M$ est triviale ou unipotente.

Le théorème ci-dessous a été démontré indépendamment par André, Kedlaya et Mebkhout (cf. [**And02b, Ked04, Meb01**]).

Théorème 1.6.1. — *Si M est une équation différentielle p-adique munie d'une structure de frobenius, alors M est potentiellement unipotente.*

Tsuzuki avait montré dans [**Tsu98b**] que si M est isocline, alors M est potentiellement triviale. Dès lors, il suffit de montrer que la filtration par les pentes de M est compatible à ∂_M : c'est ce que fait Kedlaya.

Comme corollaire de ce théorème, on trouve le théorème de monodromie pour les représentations p-adiques (théorème 1.1.2). En effet, si V est de de Rham, alors on peut lui associer, par le théorème 1.4.2, une équation différentielle p-adique $\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V)$ (avec $\partial_V = t^{-1}\nabla_V$) qui est $\subset \mathscr{R}[1/t] \otimes_{\mathscr{E}^\dagger} \mathrm{D}^\dagger(V)$ et qui est munie d'une structure de frobenius.

Elle est potentiellement unipotente, ce qui revient à dire qu'il existe une extension finie L de K telle que si l'on note $\mathscr{R}'$ l'extension étale de $\mathscr{R}$ correspondante, alors $(\mathscr{R}'[\log(X)]\otimes_{\mathscr{R}} \mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V))^{\partial_V=0}$ est de dimension d. On peut alors appliquer le théorème 1.4.1 qui entraîne que la restriction de V à L_n est semistable pour $n \gg 0$.

1.7. Construction de (φ,Γ)-modules et admissibilité

Dans le paragraphe précédent, on a vu comment le théorème de filtration par les pentes de Kedlaya implique le théorème de monodromie p-adique. Dans ce paragraphe, nous allons voir qu'il implique aussi le théorème de Colmez-Fontaine. La première étape est la construction de (φ,Γ)-modules sur $\mathscr{R}$ à partir de (φ,N)-modules filtrés. Encore une fois, on se place dans la situation $K=\mathbf{Q}_p$ pour simplifier les notations mais les résultats sont valables en général.

Si D est un (φ,N)-module filtré, soit $\mathrm{N}=(\mathscr{R}[\log(X)]\otimes_{K_0} D)^{N=0}$. Rappelons que pour $n\geqslant 0$, il existe des applications $\iota_n : f(X)\mapsto f(\zeta_{p^n}\exp(t/p^n)-1)$, définies sur les sous-ensembles de $\mathscr{R}$ où la formule converge, et à valeurs dans $F_n[\![t]\!]$. On pose $\mathcal{M}(D)=\{y\in \mathrm{N}[1/t]$ tels que $\iota_n(y)\in \mathrm{Fil}^0(F_n[\![t]\!]\otimes_{\mathbf{Q}_p} D)$ pour tout n pour lequel ι_n est définie$\}$. On montre alors que $\mathcal{M}(D)$ est un (φ,Γ)-module sur $\mathscr{R}$, de rang d, et que :

$$\mathscr{R}[\log(X),1/t]\otimes_{\mathscr{R}}\mathcal{M}(D)=\mathscr{R}[\log(X),1/t]\otimes_{K_0} D,$$

ce qui entraîne en particulier que l'action de $\mathrm{Lie}(\Gamma_K)$ sur $\mathcal{M}(D)[1/t]$ est unipotente. On peut étendre la construction $D\mapsto\mathcal{M}(D)$ au cas des (φ,N,G_K)-modules filtrés, et on a alors le théorème ci-dessous (cf. [**Ber04c**]).

Théorème 1.7.1. — *Le foncteur $D\mapsto\mathcal{M}(D)$ de la catégorie des (φ,N,G_K)-modules filtrés, dans la catégorie des (φ,Γ)-modules M sur $\mathscr{R}$ tels que l'action de* $\mathrm{Lie}(\Gamma_K)$ *sur $M[1/t]$ est potentiellement unipotente, est une équivalence de catégories.*

Pour construire l'inverse de ce foncteur, il faut vérifier que si l'on se donne un M comme ci-dessus, alors il existe D tel que $M=\mathcal{M}(D)$. Par hypothèse, il existe un (φ,N,G_K)-module filtré D tel que :

$$\mathscr{R}[\log(X),1/t]\otimes_{\mathscr{R}} M=\mathscr{R}[\log(X),1/t]\otimes_{K_0} D,$$

et il faut voir que M détermine une filtration sur D telle que $M\simeq\mathcal{M}(D)$. Cette filtration provient des diviseurs élémentaires de l'inclusion généralisée $\mathscr{R}[\log(X)]\otimes M\subset \mathscr{R}[\log(X)]\otimes D$.

La question se pose alors de déterminer les pentes (au sens du théorème 1.5.1) de $\mathcal{M}(D)$ en fonction de D. Si D est de dimension 1, alors on vérifie facilement que la pente de $\mathcal{M}(D)$ vaut $t_N(D)-t_H(D)$ et on en déduit le théorème ci-dessous (cf. [**Ber04c**]).

Théorème 1.7.2. — *Si D est un (φ, N, G_K)-module filtré, alors D est admissible si et seulement si $\mathcal{M}(D)$ est isocline de pente 0.*

Nous pouvons maintenant donner la démonstration du théorème 1.1.1 : si D est un (φ, N)-module filtré admissible, alors par le théorème 1.7.2 ci-dessus, le (φ,Γ)-module $\mathcal{M}(D)$ est étale et il lui correspond donc une représentation p-adique V. Il reste alors à vérifier que V est semistable et que $\mathrm{D}_{\mathrm{st}}(V) = D$.

CHAPITRE 2

FORMULES EXPLICITES POUR LES APPLICATIONS « EXPONENTIELLES »

L'objet de ce chapitre est de montrer comment on peut utiliser les résultats du chapitre précédent pour obtenir des descriptions explicites de l'exponentielle de Bloch-Kato et de sa duale. On commence par en rappeler les définitions puis par expliquer comment calculer la cohomologie galoisienne d'une représentation p-adique à partir de son (φ, Γ)-module. Les formules explicites proprement dites sont données au paragraphe 2.3 et comme application de ces formules, on donne une construction de l'exponentielle de Perrin-Riou via les (φ, Γ)-modules au paragraphe 2.4. Le dernier paragraphe contient une application au calcul des normes universelles.

2.1. La suite exacte fondamentale et l'exponentielle de Bloch-Kato

Les anneaux $\mathbf{B}_{\mathrm{cris}}$ et $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$ sont reliés par l'inclusion $\mathbf{B}_{\mathrm{cris}} \subset \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$ mais aussi par la « suite exacte fondamentale » :

$$0 \to \mathbf{Q}_p \to \mathbf{B}_{\mathrm{cris}}^{\varphi=1} \to \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}/\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{+} \to 0.$$

Si V est une représentation de G_K, on peut tensoriser cette suite exacte fondamentale par V et prendre les invariants sous l'action de G_K. L'application de connexion $(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}/\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{+} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{G_K} \to H^1(K, V)$ s'appelle l'exponentielle de Bloch-Kato (cf. [**BK90**]) et on la note $\exp_{K,V}$. Si l'on suppose que V est de de Rham (ce que nous faisons dans le reste de ce paragraphe), alors $(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}/\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{+} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{G_K} \simeq \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V)/\mathrm{Fil}^0\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V)$ et on obtient donc l'application $\exp_{K,V} : \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V) \to H^1(K, V)$. Son noyau contient $\mathrm{Fil}^0\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V)$ et son image est le noyau de l'application $H^1(K, V) \to H^1(K, \mathbf{B}_{\mathrm{cris}}^{\varphi=1} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)$, que l'on appelle $H^1_e(K, V)$. On appelle de manière analogue $H^1_f(K, V)$ et $H^1_g(K, V)$ les noyaux des applications de $H^1(K, V)$ dans $H^1(K, \mathbf{B}_{\mathrm{cris}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)$ et $H^1(K, \mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)$.

Si G est un groupe de Lie formel de hauteur finie sur $\mathcal{O}_K$, et si $V = \mathbf{Q}_p \otimes_{\mathbf{Z}_p} T$ où T est le module de Tate de G, alors V est de de Rham et $\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V)/\mathrm{Fil}^0\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V)$ s'identifie à l'espace tangent $\tan(G(K))$ de $G(K)$. On a alors un diagramme commutatif (cf. [**BK90**]) :

$$\begin{array}{ccc} \tan(G(K)) & \xrightarrow{\exp_G} & \mathbf{Q} \otimes_{\mathbf{Z}} G(\mathcal{O}_K) \\ {\scriptstyle =}\big\downarrow & & {\scriptstyle \delta_G}\big\downarrow \\ \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V)/\mathrm{Fil}^0\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V) & \xrightarrow{\exp_{K,V}} & H^1(K,V), \end{array}$$

où δ_G est l'application de Kummer, l'exponentielle $\exp_G$ est l'exponentielle habituelle, et l'exponentielle $\exp_{K,V}$ est celle de Bloch-Kato, ce qui motive la terminologie « exponentielle ».

Le cup-produit $\cup : H^1(K,V) \times H^1(K,V^*(1)) \to H^2(K,\mathbf{Q}_p(1)) \simeq \mathbf{Q}_p$ définit une dualité parfaite, que l'on peut utiliser (en dualisant deux fois) pour définir l'exponentielle duale de Bloch-Kato $\exp^*_{K,V^*(1)} : H^1(K,V) \to \mathrm{Fil}^0\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V)$. Kato a donné dans [**Kat93a**] une formule très commode pour $\exp^*_{K,V^*(1)}$, que nous rappelons à présent. L'application $x \mapsto [g \mapsto \log(\chi(g))x]$ est un isomorphisme de $\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V)$ dans $H^1(K,\mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)$ et l'exponentielle duale $\exp^*_{K,V^*(1)} : H^1(K,V) \to \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V)$ est la composée de l'application naturelle $H^1(K,V) \to H^1(K,\mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)$ avec l'inverse de cet isomorphisme. En particulier, le noyau de $\exp^*_{K,V^*(1)}$ est $H^1_g(K,V)$.

2.2. Cohomologie galoisienne et (φ,Γ)-modules

Nous rappelons dans ce paragraphe certains des résultats de Herr (ceux de [**Her98**]) : le calcul de la cohomologie d'une représentation V à partir de son (φ,Γ)-module $\mathrm{D}^\dagger(V)$. On suppose que le groupe Γ est procyclique (c'est presque toujours le cas) et on en note γ un générateur topologique. On montre facilement que la cohomologie du complexe suivant :

$$0 \to \mathrm{D}^\dagger(V) \xrightarrow[((\varphi-1)x,(\gamma-1)x)]{x\mapsto} \mathrm{D}^\dagger(V) \oplus \mathrm{D}^\dagger(V) \xrightarrow[(\gamma-1)x-(\varphi-1)y]{(x,y)\mapsto} \mathrm{D}^\dagger(V) \to 0$$

s'identifie fonctoriellement à celle V (il suffit essentiellement de vérifier que le H^0 du complexe est $\simeq H^0(K,V)$). Ceci donne un moyen de construire des cocyles à partir de $\mathrm{D}^\dagger(V)$, mais dans les applications il est plus commode de remplacer le complexe ci-dessus par un autre, où φ est remplacé par un certain opérateur ψ, dont nous donnons à présent la définition : comme $\mathscr{E}^\dagger$ est un $\varphi(\mathscr{E}^\dagger)$-espace vectoriel de dimension p, engendré par $(1+X)^0, (1+X)^1, \cdots, (1+X)^{p-1}$, on a $\mathrm{D}^\dagger(V) = \oplus_{i=0}^{p-1}(1+X)^i\varphi(\mathrm{D}^\dagger(V))$ ce qui fait que si $y \in \mathrm{D}^\dagger(V)$, alors il existe $y_0, \cdots, y_{p-1}$ uniquement déterminés tels que $y = \sum_{i=0}^{p-1}(1+X)^i\varphi(y_i)$. On pose alors $\psi(y) = y_0$ et on vérifie que $\psi : \mathrm{D}^\dagger(V) \to \mathrm{D}^\dagger(V)$ commute à Γ. En utilisant le fait (cf. [**CC98**]) que $1-\gamma : \mathrm{D}^\dagger(V)^{\psi=0} \to \mathrm{D}^\dagger(V)^{\psi=0}$ est bijectif, on montre que le complexe :

$$0 \to \mathrm{D}^\dagger(V) \xrightarrow[((\psi-1)x,(\gamma-1)x)]{x\mapsto} \mathrm{D}^\dagger(V) \oplus \mathrm{D}^\dagger(V) \xrightarrow[(\gamma-1)x-(\psi-1)y]{(x,y)\mapsto} \mathrm{D}^\dagger(V) \to 0$$

est quasi-isomorphe au précédent. Ceci nous permet de construire des cocyles dans le $H^1(K,V)$ à partir d'éléments de $\mathrm{D}^\dagger(V)^{\psi=1}$ (c'est la construction de [**CC99**]). Si $x \in \mathbf{Z}_p^\times$, notons $\log_p^0(x) = \log_p(x)/p^v$ où $v = \mathrm{val}(\log_p(x))$. Si $y \in \mathrm{D}^\dagger(V)^{\psi=1}$, alors on montre qu'il existe $b \in \mathbf{B}^\dagger \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$ tel que $(\gamma-1)(\varphi-1)b = (\varphi-1)y$ et la formule :

$$h^1_{K,V}(y) = \log_p^0(\chi(\gamma)) \left[\sigma \mapsto \frac{\sigma-1}{\gamma-1}y - (\sigma-1)b\right]$$

définit une application $h^1_{K,V} : \mathrm{D}^\dagger(V)^{\psi=1} \to H^1(K,V)$ qui ne dépend pas du choix de γ et dont le noyau est $(1-\gamma)\mathrm{D}^\dagger(V)^{\psi=1}$. On montre par ailleurs que l'application $h^1_{K,V}$ s'étend à $(\mathscr{R} \otimes_{\mathscr{E}^\dagger} \mathrm{D}^\dagger(V))^{\psi=1}$ (cf. [**Ber03**]).

Rappelons que la cohomologie d'Iwasawa de V est définie par $H^1_{Iw}(K,V) = \mathbf{Q}_p \otimes_{\mathbf{Z}_p} H^1_{Iw}(K,T)$ où T est un réseau de V stable par G_K et $H^1_{Iw}(K,T) = \varprojlim_n H^1(K_n,T)$ est la limite projective pour les applications « corestriction ». On voit facilement que l'on a $\mathrm{cor}_{K_{n+1}/K_n} \circ h^1_{K_{n+1},V} = h^1_{K_n,V}$ et donc que l'on a une application $\mathrm{D}^\dagger(V)^{\psi=1} \to H^1_{Iw}(K,V)$. Le théorème ci-dessous est dû à Fontaine (non-publié ; une démonstration en est donnée dans [**CC99**]).

Théorème 2.2.1. — *L'application* $\mathrm{D}^\dagger(V)^{\psi=1} \to H^1_{Iw}(K,V)$ *définie ci-dessus est un isomorphisme. On a aussi un isomorphisme naturel* $\mathrm{D}^\dagger(V)/(\psi-1) \simeq H^2_{Iw}(K,V)$.

2.3. Formules explicites pour exp et exp*

Dans ce paragraphe, nous donnons des formules explicites pour l'exponentielle de Bloch-Kato et pour sa duale. On suppose à partir de maintenant que $K = \mathbf{Q}_p$ (mais les formules que l'on donne sont valides pour une extension non-ramifiée K de $\mathbf{Q}_p$ si l'on remplace $\mathscr{R}$ et ses sous-anneaux par les anneaux appropriés).

Si $y \in K_n(\!(t)\!) \otimes_K \mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V)$, alors on appelle $\partial_V(y) \in K_n \otimes_K \mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V)$ le coefficient de t^0. Ensuite, si $i \in \mathbf{Z}$, alors on appelle ∇_i l'opérateur donné par $\log(\gamma)/\log_p(\chi(\gamma)) - i$. Il ne dépend pas du choix de γ suffisamment petit et agit sur $\mathscr{R}$ par $\nabla_i : f(X) \mapsto \log(1+X)(1+X)df/dX - if(X)$ ce qui fait que si $i \geqslant 1$, alors $\nabla_{i-1} \circ \cdots \nabla_0(\mathscr{R}) \subset t^i\mathscr{R}$. Enfin, on note $\mathscr{R}^+$ l'anneau des séries $f(X) = \sum a_i X^i \in \mathscr{R}$ telles que $a_i = 0$ pour $i \leqslant -1$, ce qui fait que $\mathscr{R}^+$ est l'anneau des fonctions holomorphes sur le disque unité. On a les formules suivantes pour l'exponentielle de Bloch-Kato (cf. [**Ber03**]).

Théorème 2.3.1. — *Si V est une représentation cristalline de G_K, si $h \geqslant 1$ est tel que* $\mathrm{Fil}^{-h}\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V) = \mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V)$ *et si* $y \in (\mathscr{R}^+ \otimes_K \mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V))^{\psi=1}$*, alors :*

$$h^1_{K_n,V}(\nabla_{h-1} \circ \cdots \circ \nabla_0(y)) = (-1)^{h-1}(h-1)! \begin{cases} \exp_{K_n,V}(p^{-n}\partial_V(\varphi^{-n}(y))) & si\ n \geqslant 1, \\ \exp_{K,V}((1-p^{-1}\varphi^{-1})\partial_V(y)) & si\ n = 0. \end{cases}$$

On a aussi les formules ci-dessous pour l'exponentielle duale de Bloch-Kato (cf. [**Ber03**], mais c'est un cas particulier d'une formule de [**CC99**]).

Théorème 2.3.2. — *Si V est une représentation cristalline, et si $y \in (\mathscr{R} \otimes_{\mathscr{E}^\dagger} \mathrm{D}^\dagger(V))^{\psi=1}$ est tel que $y \in (\mathscr{R}^+[1/t] \otimes_K \mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V))^{\psi=1})$, alors :*

$$\exp^*_{K_n,V^*(1)}(h^1_{K_n,V}(y)) = \begin{cases} p^{-n}\partial_V(\varphi^{-n}(y)) & \text{si } n \geqslant 1, \\ (1-p^{-1}\varphi^{-1})\partial_V(y) & \text{si } n = 0. \end{cases}$$

Comme corollaire de ces deux théorèmes, on trouve les formules suivantes (cf. [**Ber03**] ; ici e_j est une base de $\mathbf{Q}_p(j)$ et on s'arrange pour que $e_j \otimes e_k = e_{j+k}$).

Théorème 2.3.3. — *Si V est une représentation cristalline, si $h \geqslant 1$ est tel que $\mathrm{Fil}^{-h}\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V) = \mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V)$ et si $y \in (\mathscr{R}^+ \otimes_K \mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V))^{\psi=1}$, alors pour tout $j \in \mathbf{Z}$ tel que $h + j \geqslant 1$, on a :*

$$\begin{aligned} h^1_{K_n,V(j)}(\nabla_{h-1} \circ \cdots \circ \nabla_0(y) \otimes e_j) &= (-1)^{h+j-1}(h+j-1)! \\ &\times \begin{cases} \exp_{K_n,V(j)}(p^{-n}\partial_{V(j)}(\varphi^{-n}(\partial^{-j}y \otimes t^{-j}e_j))) & \text{si } n \geqslant 1, \\ \exp_{K,V(j)}((1-p^{-1}\varphi^{-1})\partial_{V(j)}(\partial^{-j}y \otimes t^{-j}e_j)) & \text{si } n = 0, \end{cases} \end{aligned}$$

tandis que si $h + j \leqslant 0$, alors on a :

$$\begin{aligned} &\exp^*_{K_n,V^*(1-j)}(h^1_{K_n,V(j)}(\nabla_{h-1} \circ \cdots \circ \nabla_0(y) \otimes e_j)) = \\ &\qquad \frac{1}{(-h-j)!} \begin{cases} p^{-n}\partial_{V(j)}(\varphi^{-n}(\partial^{-j}y \otimes t^{-j}e_j)) & \text{si } n \geqslant 1, \\ (1-p^{-1}\varphi^{-1})\partial_{V(j)}(\partial^{-j}y \otimes t^{-j}e_j) & \text{si } n = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Remarquons que la notation « ∂^{-j} » est un peu abusive si $j \geqslant 1$, car l'application ∂ n'est pas injective, mais on vérifie que cela ne crée pas de problème dans les formules ci-dessus.

2.4. L'exponentielle de Perrin-Riou

L'application principale du théorème 2.3.3 est de donner une construction de l'exponentielle de Perrin-Riou via les (φ, Γ)-modules. Commençons par rappeler la définition de cette application « exponentielle de Perrin-Riou » (qui est construite dans [**Per94b**]).

Soit $\Lambda = \mathbf{Z}_p[[\Gamma]]$ l'algèbre d'Iwasawa de Γ et $\mathcal{H}(\Gamma) = \mathbf{Q}_p[\Gamma_{\mathrm{tors}}] \otimes_{\mathbf{Q}_p} \mathcal{H}(\Gamma_1)$ où $\mathcal{H}(\Gamma_1) = \{f(\gamma_1 - 1)$ avec $\gamma_1 \in \Gamma_1$ et f holomorphe sur le disque unité$\}$. Pour tout $k \in \mathbf{Z}$, on définit une application $\Delta_k : \mathscr{R}^+ \otimes_K \mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V) \to \mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V)/(1-p^k\varphi)\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V)$ par la formule $\Delta_k(f) = (\partial^k f)(0) \mod (1-p^k\varphi)\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V)$. Si on écrit $\Delta = \oplus_{k\in\mathbf{Z}}\Delta_k$, alors pour tout $f \in (\mathscr{R}^+ \otimes_K \mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V))^{\Delta=0}$, l'équation $(1-\varphi)g(X) = f(X)$ a une solution dans $\mathscr{R}^+ \otimes_{\mathbf{Q}_p} \mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V)$ et on en déduit une application $\Xi_{n,V} : (\mathscr{R}^+ \otimes_K \mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V))^{\Delta=0} \to K_n \otimes_K \mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V)/\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V)^{\varphi=1}$ définie par $f \mapsto p^{-n}g^{\sigma^{-n}}(\zeta_{p^n} - 1)$.

Le résultat principal de Perrin-Riou est la construction, pour une représentation cristalline V de G_K, d'une famille (indexée par $h \in \mathbf{Z}$) d'applications :

$$\Omega_{V,h} : \mathcal{H}(\Gamma) \otimes_{\mathbf{Q}_p} \mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V) \to \mathcal{H}(\Gamma) \otimes_{\Lambda} H^1_{Iw}(K,V)/V^{H_K},$$

qui interpolent les exponentielles de Bloch-Kato. Plus précisément, si $h, j \gg 0$, alors le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
\big(\mathcal{H}(\Gamma) \otimes_{\mathbf{Q}_p} \mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V(j))\big)^{\Delta=0} \arrow[r, "\Omega_{V(j),h}"] \arrow[d, "\Xi_{n,V(j)}"'] & \mathcal{H}(\Gamma) \otimes_{\Lambda} H^1_{Iw}(K,V(j))/V(j)^{H_K} \arrow[d, "\mathrm{pr}_{K_n,V(j)}"'] \\
K_n \otimes_K \mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V) \arrow[r, "(h+j-1)!\times", "\exp_{K_n,V(j)}"'] & H^1(K_n, V(j))
\end{tikzcd}$$

est commutatif.

L'application « transformée de Mellin inverse » $f(\gamma) \mapsto f(\gamma)\cdot(1+X)$ permet d'identifier $\mathcal{H}(\Gamma) \otimes_{\mathbf{Q}_p} \mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V)$ avec $(\mathscr{R}^+)^{\psi=0} \otimes_K \mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V)$ et l'isomorphisme du théorème 2.2.1 permet d'identifier $\mathcal{H}(\Gamma) \otimes_{\Lambda} H^1_{Iw}(K,V)$ et $(\mathscr{R}^+ \otimes_{\mathscr{E}^+} \mathrm{D}^{\dagger}(V))^{\psi=1}$ où $\mathscr{E}^+ = \mathbf{Q}_p \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathbf{Z}_p[\![X]\!]$. En utilisant le théorème 2.3.3, on montre alors le résultat ci-dessous (cf. [**Ber03**]).

Théorème 2.4.1. — *Si V est une représentation cristalline de G_K et si $h \geqslant 1$ est tel que* $\mathrm{Fil}^{-h}\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V) = \mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V)$, *alors l'application :*

$$\Omega_{V,h} : ((\mathscr{R}^+)^{\psi=0} \otimes_K \mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V))^{\Delta=0} \to (\mathscr{R}^+ \otimes_{\mathscr{E}^+} \mathrm{D}^{\dagger}(V))^{\psi=1}/V^{H_K}$$

qui à $f \in ((\mathscr{R}^+)^{\psi=0} \otimes_K \mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V))^{\Delta=0}$ associe $\nabla_{h-1} \circ \cdots \circ \nabla_0((1-\varphi)^{-1}f)$ est bien définie et coïncide avec l'exponentielle de Perrin-Riou.

Ceci implique de manière plus ou moins immédiate la loi de reciprocité explicite conjecturée par Perrin-Riou et démontrée dans [**Col98**] par Colmez ; voir [**Ber03**] pour une démonstration utilisant le théorème ci-dessus.

2.5. Représentations de de Rham et normes universelles

La dernière application des idées de ce chapitre est le calcul des normes universelles d'une représentation de de Rham. Soit V une représentation de G_K ; on a défini au paragraphe 2.1 l'espace $H^1_g(K,V) \subset H^1(K,V)$, et si l'on suppose que V est de de Rham (ce que l'on fait à partir de maintenant), alors $H^1_g(K,V)$ paramétrise les extensions de $\mathbf{Q}_p$ par V qui sont elles-mêmes de de Rham. Par construction de la cohomologie d'Iwasawa de V, on a des applications $\mathrm{pr}_{K_n,V} : H^1_{Iw}(K,V) \to H^1(K_n,V)$ et l'ensemble $H^1_{Iw}(K,V)_g$ des « normes universelles » est l'ensemble des $y \in H^1_{Iw}(K,V)$ tels que pour tout $n \geqslant 0$, on ait $\mathrm{pr}_{K_n,V}(y) \in H^1_g(K_n,V)$.

Si $\mathrm{Fil}^1 V$ est la plus grande sous-représentation de V dont tous les poids de Hodge-Tate sont $\geqslant 1$, alors $\mathrm{Fil}^1 V$ est de de Rham et on vérifie que $H^1_{Iw}(K, \mathrm{Fil}^1 V)_g = H^1_{Iw}(K, \mathrm{Fil}^1 V)$. Le théorème ci-dessous (cf. [**Ber05a**]) avait été conjecturé par Nekovář (cf. [**Per00**]).

Théorème 2.5.1. — *Si V est une représentation de de Rham, alors $H^1_{Iw}(K, \mathrm{Fil}^1 V) \subset H^1_{Iw}(K, V)_g$ et le quotient est un $\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel de dimension finie.*

Nous allons maintenant expliquer la démonstration de ce théorème (qui est assez proche de la démonstration proposée dans le cas cristallin par Perrin-Riou dans [**Per00**]). Par dévissage, on se ramène à montrer que si $k \geqslant 0$ et si V est une représentation de de Rham telle que $\mathrm{Fil}^{-k} V = V$ et $\mathrm{Fil}^{1-k} V = 0$, alors $H^1_{Iw}(K, V)_g$ est un $\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel de dimension finie. Soit $\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V)$ l'équation différentielle associée à V dans le théorème 1.4.2. La composition de $\otimes \mathbf{Q}_p(k)$ et de l'inclusion de $\mathrm{D}^\dagger(V(k))$ dans $\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V(k))$ nous donnent une application de $\mathrm{D}^\dagger(V)$ dans $\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V(k))$ et par le théorème 2.3.2, on a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
H^1_{Iw}(K, V) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, equal] & \mathrm{D}^\dagger(V)^{\psi=1} \arrow[r] \arrow[d, "h^1_{K_n,V}"] & \mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V(k)) \arrow[d, "f \mapsto \partial^k_{V(k)} f(\zeta_{p^n}-1)"] \\
H^1_{Iw}(K, V) \arrow[r, "\mathrm{pr}_{K_n,V}"] & H^1(K_n, V) \arrow[r, "\exp^*_{K_n,V^*(1)}"] & K_n \otimes_K \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V).
\end{tikzcd}$$

Etant donné que $H^1_g(K_n, V)$ est le noyau de $\exp^*_{K_n,V^*(1)}$, on déduit du diagramme ci-dessus que si $y \in \mathrm{D}^\dagger(V)^{\psi=1}$, alors y provient de $H^1_{Iw}(K, V)_g$ si et seulement si $\partial^k_{V(k)} y \in t \cdot \mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V(k))$ (puisqu'une fonction nulle en tous les $\zeta_{p^n} - 1$ est divisible par $\log(1+X) = t$).

Pour terminer la preuve, on montre que si l'on se donne un Γ-module $\mathrm{D}^\dagger$ sur $\mathscr{E}^\dagger$ et un (∂, Γ)-module N sur $\mathscr{R}$ tels que $\mathrm{D}^\dagger \subset N$, $\mathrm{D}^\dagger \cap t \cdot N = 0$, et que si $y \in \mathrm{D}^\dagger$ est tel que $\partial^k y \in t \cdot N$, alors y est dans le sous-module de $\mathbf{Q}_p \otimes_{\mathbf{Z}_p} \Lambda$-torsion de $\mathrm{D}^\dagger$; il s'agit d'une variante du lemme de Wronski. Comme le sous-module de $\mathbf{Q}_p \otimes_{\mathbf{Z}_p} \Lambda$-torsion de $H^1_{Iw}(K, V)$ est de dimension finie, on a terminé.

CHAPITRE 3

MODULES DE WACH

Dans tout ce chapitre, on suppose que K est une extension non ramifiée de $\mathbf{Q}_p$ et on se donne une représentation V de G_K dont la restriction à K_n est cristalline pour un entier $n \geqslant 0$. On dit qu'une telle représentation est cristabelline.

3.1. Modules de Wach des représentations cristabellines

Dans ce paragraphe, on explique comment les résultats du paragraphe 1.4 peuvent être utilisés pour montrer que le (φ, Γ)-module d'une représentation cristabelline admet une base dans laquelle les matrices de φ et de $\gamma \in \Gamma$ sont très particulières : c'est la théorie des modules de Wach. Pour simplifier les notations, on suppose que $K = \mathbf{Q}_p$.

Si V est une représentation cristabelline, alors on définit $n(V) = \min\{n \geqslant 0$ tels que la restriction de V à K_n est cristalline$\}$ et $m(V) = \min\{m \geqslant 1$ tels qu'il existe un caractère fini η de Γ tel que la restriction de $V \otimes \eta$ à K_m est cristalline$\}$.

Rappelons que pour $n \geqslant 0$, on pose $\Gamma_n = \mathrm{Gal}(K_\infty/K_n)$. Si $j \geqslant 1$, posons $Q_j(X) = ((1+X)^{p^j}-1)/((1+X)^{p^{j-1}}-1)$ ce qui fait que $Q_j(X)$ est le polynôme minimal de $\zeta_{p^j}-1$. Rappelons par ailleurs que $\mathscr{E}^+ = K \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_K[\![X]\!]$.

Un module de Wach (effectif) est un (φ, Γ)-module N sur $\mathscr{E}^+$ (c'est-à-dire un $\mathscr{E}^+$-module libre de rang fini, muni d'un frobenius semi-linéaire et d'une action continue de Γ par des applications semi-linéaires et commutant à φ), qui vérifie les trois conditions suivantes :

(1) il existe $n \geqslant 0$ tel que Γ_n agit trivialement sur N/XN ;

(2) φ est étale, c'est-à-dire (par exemple) que $\mathscr{E}^\dagger \otimes_{\mathscr{E}^+} N$ est un φ-module étale ;

(3) il existe $m \geqslant 1$ et $t_1, \cdots, t_m \geqslant 0$ tels que $(\det \varphi) = (Q_1(X)^{t_1} \cdots Q_m(X)^{t_m})$.

Si N est un module de Wach effectif, alors $\mathscr{E}^\dagger \otimes_{\mathscr{E}^+} N$ est un (φ, Γ)-module étale sur $\mathscr{E}^\dagger$ et provient donc d'une représentation $V = V(N)$. Le théorème ci-dessous (cf. **[Ber04a,**

BB06]) donne quelques propriétés de cette représentation (rappelons que l'on dit qu'une représentation de Hodge-Tate est effective si ses poids sont $\leqslant 0$).

Théorème 3.1.1. — *Si N est un module de Wach effectif, alors $V = V(N)$ est une représentation cristabelline effective, et toute représentation cristabelline effective s'obtient ainsi.*

Avant d'expliquer la démonstration de ce théorème, faisons quelques remarques :

- On peut prendre $n = n(V)$ et $m = m(V)$ dans les (1) et (3) de la définition ci-dessus ;
- Le $(\varphi, \mathrm{Gal}(K_n/\mathbf{Q}_p))$-module N/XN est naturellement isomorphe à $\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V)$;
- Si de plus V est cristalline, alors on définit une filtration sur N par la formule $\mathrm{Fil}^j N = \{y \in N,\ \varphi(y) \in Q_1(X)^j N\}$ et le φ-module filtré N/XN est isomorphe à $\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V)$;
- On a $V(X \cdot N) = V(-1)$ ce qui permet d'étendre naturellement la notion de module de Wach et de représentation associée au cas non-effectif.

Passons maintenant à la démonstration du théorème. Le fait que $V(N)$ est cristabelline est dû à Wach (c'est l'un des principaux résultats de [**Wac96**]). On montre qu'il existe une section Γ-équivariante de la projection $\mathscr{R}^+ \otimes_{\mathscr{E}^+} N \to N/XN$ ce qui fait que $(\mathscr{R}^+ \otimes_{\mathscr{E}^+} N)^{\Gamma_n}$ est de dimension $d = \dim V$ et donc que $(\mathscr{R}[1/t] \otimes_{\mathscr{E}^\dagger} \mathrm{D}^\dagger(V))^{\Gamma_n}$ est aussi de dimension d, ce qui implique par le théorème 1.4.1 que la restriction de V à K_n est cristalline. Le fait que l'on ait en fait pas à inverser t implique par ailleurs que V est effective.

Pour montrer l'implication réciproque, il y a plusieurs étapes. La première est de montrer qu'une représentation cristabelline est « de hauteur finie », c'est-à-dire qu'il existe un (φ, Γ)-module M sur $\mathscr{E}^+$ tel que $\mathrm{D}^\dagger(V) = \mathscr{E}^\dagger \otimes_{\mathscr{E}^+} M$. Ceci est démontré dans [**Col99**], nous allons voir la démonstration qui se trouve dans [**BB06**]. On utilise l'opérateur ψ du paragraphe 2.2. Cet opérateur a tendance à diminuer les dénominateurs et de fait, on montre que $(\mathscr{R}[1/t] \otimes_K \mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V))^{\psi=1} = (\mathscr{R}^+[1/t] \otimes_K \mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V))^{\psi=1}$. Cherbonnier et Colmez ont montré dans [**CC99**] que $\mathrm{D}^\dagger(V)^{\psi=1}$ contient une base de $\mathrm{D}^\dagger(V)$ sur $\mathscr{E}^\dagger$ et on en déduit que $\mathrm{D}^\dagger(V)$ a une base contenue dans $\mathrm{D}^\dagger(V) \cap \mathscr{R}^+[1/t] \otimes_K \mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V)$. Il n'est pas difficile de montrer que (quitte à modifier légèrement cette base), le $\mathscr{E}^+$-module qu'elle engendre est stable par φ et Γ. On appelle alors $\mathrm{D}^+(V)$ le plus grand (φ, Γ)-module M sur $\mathscr{E}^+$ tel que $\mathrm{D}^\dagger(V) = \mathscr{E}^\dagger \otimes_{\mathscr{E}^+} M$. Il existe alors un anneau $\mathbf{B}^+ \subset \mathbf{B}$ tel que $\mathrm{D}^+(V) = (\mathbf{B}^+ \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{H_K}$ (cf. [**Fon90**]).

La deuxième étape est de modifier $\mathrm{D}^+(V)$ pour obtenir un module de Wach. La construction que nous venons de donner montre que $\mathrm{D}^+(V) \subset \mathscr{R}^+[1/t] \otimes_K \mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V)$. Soit $\{e_i\}$ une base de $\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V)$ ce qui fait que tout élément $y \in \mathrm{D}^+(V)$ peut s'écrire

$y = \sum f_i \otimes e_i$ avec $f_i \in \mathscr{R}^+[1/t]$. On pose alors $N = \{y \in \mathrm{D}^+(V)$ tels que l'on a $y = \sum f_i \otimes e_i$ où f_i n'a pas de pôle en $0\}$. Ceci fait de N un (φ, Γ)-module sur $\mathscr{E}^+$ qui a la propriété supplémentaire qu'il existe $h \geqslant 0$ tel que $X^h \cdot \mathrm{D}^+(V) \subset N$. Le fait que N satisfait le (1) de la définition suit du fait que si une fonction $f \in \mathscr{R}^+[1/t]$ n'a pas de pôle en 0, alors $\gamma(f) - f$ a un zéro en 0, et le (2) suit du fait que sous la même hypothèse, $\varphi(f)$ n'a pas de pôle en 0 non plus. On peut montrer (cf. [**Ber04a**]) qu'un N satisfaisant $X^h \cdot \mathrm{D}^+(V) \subset N$ ainsi que le (1) de la définition est uniquement déterminé par V, et on le note alors $\mathrm{N}(V)$: c'est le module de Wach de V.

La troisième (et dernière) étape consiste à vérifier le (3) et à montrer que l'on peut prendre $m = m(V)$. Nous allons montrer que l'on peut prendre $m = \max(n(V), 1)$ et il suffit ensuite de remarquer que $\mathrm{N}(V(\eta)) = \mathrm{N}(V)(\eta)$. Le point crucial est le calcul des diviseurs élémentaires de l'inclusion $\mathscr{R}^+ \otimes_K \mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V) \subset \mathscr{R}^+ \otimes_{\mathscr{E}^+} \mathrm{N}(V)$. Ce sont des idéaux de $\mathscr{R}^+$ stables par Γ et donc engendrés par des éléments $\delta_1, \cdots, \delta_d$ tels qu'il existe des $\beta_{k,i}$ satisfaisant :

$$\delta_i = X^{\beta_{0,i}} \left(\frac{Q_1(X)}{p}\right)^{\beta_{1,i}} \cdot \left(\frac{Q_2(X)}{p}\right)^{\beta_{2,i}} \cdots$$

Comme Γ_n agit trivialement sur $\mathscr{R}^+ \otimes_K \mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V)/X$ et sur $\mathscr{R}^+ \otimes_{\mathscr{E}^+} \mathrm{N}(V)/X$, on voit que $\beta_{0,i} = 0$ pour tout i. Afin de calculer $\beta_{k,i}$ pour $k \geqslant 1$, on utilise les applications « de localisation » $\iota_k = \varphi^{-k} : \mathbf{B}^+ \to \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ (que l'on peut prolonger à $\mathscr{R}^+$ par la formule $f(X) \mapsto f(\zeta_{p^k} \exp(t/p^k) - 1)$). En composant cette application avec $\theta : \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+ \to \mathbf{C}_p$, on trouve une application $\theta \circ \iota_k : \mathrm{N}(V)/Q_k(X)\mathrm{N}(V) \to \mathrm{D}_{\mathrm{sen}}(V) \subset (\mathbf{C}_p \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{H_K}$ qui commute à Γ et dont on montre qu'elle est injective. Si l'on appelle $h_1, \cdots, h_d$ les opposés des poids de Hodge-Tate de V, alors $\mathrm{D}_{\mathrm{sen}}(V) \simeq \oplus_{i=1}^d K_\infty(-h_i)$ en tant que représentations de Γ, tandis qu'un calcul facile de diviseurs élémentaires montre que $\mathrm{N}(V)/Q_k(X)\mathrm{N}(V) \simeq \oplus_{i=1}^d K_k(-\beta_{k,i})$ en tant que représentations de $\Gamma_{\max(k,n(V))}$. On déduit de cela que si $k \leqslant n(V) - 1$, alors $\beta_{k,i} \in \{h_1, \cdots, h_d\}$ tandis que si $k \geqslant n(V)$, alors l'application $K_\infty \otimes_{K_k} \mathrm{N}(V)/Q_k(X)\mathrm{N}(V) \to \mathrm{D}_{\mathrm{sen}}(V)$ est toujours injective, et donc que $\beta_{k,i} = h_i$ pour tout i. Pour conclure, il faut voir que comme $\varphi^*(\mathscr{R}^+ \otimes_K \mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V)) = \mathscr{R}^+ \otimes_K \mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V)$, on a $\det \varphi = \delta_1 \cdots \delta_d / \varphi(\delta_1 \cdots \delta_d)$ ce qui fait que $t_k = \sum \beta_{k,i} - \sum \beta_{k-1,i}$ et donc que $t_k = 0$ dès que $k \geqslant \max(n(V), 1) + 1$.

3.2. Aspects entiers des représentations cristallines

L'un des avantages de la théorie des modules de Wach est que si N est un tel module, et si V est la représentation cristabelline qui lui correspond, alors on a une bijection entre les $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^+ = \mathcal{O}_K[\![X]\!]$-réseaux de N stables par φ et Γ et les $\mathbf{Z}_p$-réseaux de V stables par G_K. On appelle $\mathrm{N}(T)$ le module de Wach entier associé à un réseau T. Ceci permet d'aborder la théorie entière des représentations crista(be)llines, notamment dans des situations qui ne sont pas couvertes par la théorie de Fontaine-Laffaille. On suppose dans ce paragraphe que la représentation V est cristalline, mais il est très probable que les résultats et les méthodes présentés s'étendent au cas des représentations cristabellines.

La première application concerne les limites de sous-quotients de représentations cristallines. On commence par montrer que les modules de Wach « varient continûment ». Si $r \geqslant 1$, on pose $\alpha(r) = \inf_{\gamma \in \Gamma} \sum_{j=1}^{r} \mathrm{val}(\chi(\gamma)^j - 1)$. Par exemple, si $r \leqslant p-2$, alors $\alpha(r) = 0$. On montre alors que si T_1 et T_2 sont deux réseaux de deux représentations cristallines V_1 et V_2 à poids de Hodge-Tate dans $[-r;0]$, et si $n \geqslant \alpha(r)$ est tel que $T_1/p^n = T_2/p^n$, alors $\mathrm{N}(T_1)$ et $\mathrm{N}(T_2)$ ont même image dans $(\mathbf{A}^+/p^{n-\alpha(r)} \otimes_{\mathbf{Z}_p} T_i)^{H_K}$. Comme corollaire de cela, on a le théorème ci-dessous (cf. [**Ber04a**]), qui démontre une conjecture de Fontaine (cf. [**Fon96**]).

Théorème 3.2.1. — *Si T est un réseau d'une représentation p-adique V de G_K, et s'il existe $b \geqslant a \in \mathbf{Z}$ et deux suites $\{U_i\}_i$ et $\{T_i\}_i$ de réseaux de représentations V_i de G_K, cristallines à poids de Hodge-Tate dans $[a;b]$ et vérifiant $T/p^i \simeq T_i/U_i$, alors V est cristalline à poids de Hodge-Tate dans $[a;b]$.*

La deuxième application concerne le calcul de la réduction modulo p de certaines représentations cristallines. Soit L une extension finie de $\mathbf{Q}_p$ qui est ici le corps de coefficients des représentations que l'on considère. La théorie des modules de Wach s'étend sans modification aux représentations L-linéaires, en considérant les représentations $\mathbf{Q}_p$-linéaires sous-jacentes. Si k est un entier $\geqslant 2$ et $a_p \in \mathfrak{m}_L$ on définit le φ-module filtré D_{k,a_p} par $D_{k,a_p} = Le \oplus Lf$ où :

$$\begin{cases} \varphi(e) = p^{k-1} f \\ \varphi(f) = -e + a_p f \end{cases} \quad \text{et} \quad \mathrm{Fil}^i D_{k,a_p} = \begin{cases} D_{k,a_p} & \text{si } i \leqslant 0, \\ Le & \text{si } 1 \leqslant i \leqslant k-1, \\ 0 & \text{si } i \geqslant k. \end{cases}$$

Ce φ-module filtré est admissible, et il existe donc une représentation cristalline V_{k,a_p} de $G_{\mathbf{Q}_p}$ telle que $\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V_{k,a_p}^*) = D_{k,a_p}$ (on passe au dual pour que les notations soient compatibles avec celles de [**Bre03b**] et [**BLZ04**] ; remarquons tout de même que l'on a $V_{k,a_p}^* = V_{k,a_p}(1-k)$). Toute représentation cristalline absolument irréductible de dimension 2 de $G_{\mathbf{Q}_p}$ est d'ailleurs la tordue par un caractère cristallin d'une V_{k,a_p} avec $k \geqslant 2$. Si T_{k,a_p} est un $\mathcal{O}_L$-réseau de V_{k,a_p} stable par $G_{\mathbf{Q}_p}$, alors la semi-simplifiée de $k_L \otimes_{\mathcal{O}_L} T_{k,a_p}$ ne dépend pas du choix du réseau et nous la notons $\overline{V}_{k,a_p}$. La question se pose alors de donner une formule pour $\overline{V}_{k,a_p}$ en termes de k et a_p (dans [**Bre03b**], une formule conjecturale est donnée pour $\overline{V}_{k,a_p}$ quand $2p \geqslant k \geqslant p+1$). Quand $k \leqslant p$, le calcul de $\overline{V}_{k,a_p}$ suit immédiatement de la théorie de Fontaine-Laffaille (cf. [**FL82**]). On peut calculer $\overline{V}_{k,a_p}$

quand $k \geqslant p+1$ et pour certaines valeurs de a_p en construisant « à la main » le module de Wach associé à V_{k,a_p} et en le réduisant modulo p : c'est ce qui est fait dans [**BLZ04**]. On obtient alors le théorème ci-dessous.

Théorème 3.2.2. — *Si* $\mathrm{val}(a_p) > \lfloor (k-2)/(p-1) \rfloor$, *alors* $\overline{V}_{k,a_p} = \overline{V}_{k,0}$.

Le calcul de $\overline{V}_{k,0}$ se fait sans difficulté. Notons que la condition « $\mathrm{val}(a_p) > \lfloor (k-2)/(p-1) \rfloor$ » n'est pas optimale. Par exemple, si $k = p+1$, alors le théorème est vrai dès que $\mathrm{val}(a_p) > 0$. Le principe de la démonstration du théorème est de construire le module de Wach associé à V_{k,a_p} ce qui se fait comme suit : on définit deux séries λ_+ et λ_- par les formules :

$$\lambda_+ = \frac{Q_2(X)}{p} \times \frac{Q_4(X)}{p} \times \frac{Q_6(X)}{p} \times \cdots \qquad \text{et} \qquad \lambda_- = \frac{Q_1(X)}{p} \times \frac{Q_3(X)}{p} \times \frac{Q_5(X)}{p} \times \cdots$$

On vérifie alors que si l'on écrit $a_p(\lambda_-/\lambda_+)^{k-1} = \sum_{i \geqslant 0} \alpha_i X^i$, alors $\mathrm{val}(\alpha_i) \geqslant 0$ pour $i \in \{0, \cdots, k-2\}$ et on pose alors $\alpha = \alpha_0 + \alpha_1 X + \cdots + \alpha_{k-2} X^{k-2}$ ainsi que $g_\pm = \lambda_\pm / \gamma(\lambda_\pm)$; on définit une matrice $P \in \mathrm{M}_2(\mathcal{O}_L[\![X]\!])$ et, pour tout $\gamma \in \Gamma$, une matrice $G_\gamma^{(k-1)} \in \mathrm{Id} + X \cdot \mathrm{M}_2(\mathcal{O}_L[\![X]\!])$ par les formules :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ Q_1(X)^{k-1} & \alpha \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad G_\gamma^{(k-1)} = \begin{pmatrix} g_+^{k-1} & 0 \\ 0 & g_-^{k-1} \end{pmatrix}$$

Il s'agit alors de vérifier que si $\gamma \in \Gamma$, alors il existe une unique matrice $G_\gamma \in \mathrm{M}_2(\mathcal{O}_L[\![X]\!])$ telle que :

(1) $P\varphi(G_\gamma) = G_\gamma \gamma(P)$;

(2) $G_\gamma \equiv G_\gamma^{(k-1)} \mod X^{k-1} \cdot \mathrm{M}_2(\mathcal{O}_L[\![X]\!])$,

ce qui permet (presque) de construire le module de Wach de V_{k,a_p} et en tout cas de vérifier que les modules de Wach de V_{k,a_p} et $V_{k,0}$ ont même réduction modulo p dès que $\mathrm{val}(a_p) > \lfloor (k-2)/(p-1) \rfloor$. On peut bien sûr pousser ces calculs et en déduire $\overline{V}_{k,a_p}$ pour diverses autres valeurs de k et a_p.

Pour terminer ce paragraphe, mentionnons une troisième application, plus mystérieuse (pour le moment). Si T est un réseau de V stable par G_K, alors l'image de $\mathrm{N}(T)$ dans $\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V)$ en est un $\mathcal{O}_K$-réseau canoniquement déterminé et que l'on note donc $\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(T)$. On peut montrer que le déterminant de l'isomorphisme de comparaison entre $\mathbf{B}_{\mathrm{cris}} \otimes_{\mathbf{Z}_p} T$ et $\mathbf{B}_{\mathrm{cris}} \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(T)$ appartient à $t^{t_H(V)} \mathcal{O}^*_{\widehat{\mathbf{Q}}_p^{\mathrm{nr}}}$. Quels réseaux de $\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V)$ obtient t'on de cette manière ? Si la longueur de la filtration est $\leqslant p-1$, alors on obtient tous les réseaux fortement divisibles de $\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V)$, mais au-delà de cette borne, je ne sais pas ce qui se passe.

3.3. La conjecture $\delta_{\mathbf{Z}_p}$

Donnons maintenant une application un peu différente de la théorie des modules de Wach aux structures entières des représentations cristallines : l'intégralité de l'exponentielle de Perrin-Riou. Pour cela, revenons aux notations et résultats du paragraphe 2.4. Perrin-Riou a proposé une conjecture relative au déterminant de ses applications $\Omega_{V,h}$. Posons :

$$\delta(\Omega_V) = \prod_{j\geqslant 1-h} (\nabla_{-j})^{-\dim_{\mathbf{Q}_p}\mathrm{Fil}^j\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V)} \\ \times \Omega_{V,h}\left[\det_\Lambda(\Lambda\otimes_{\mathbf{Q}_p}\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V))\otimes_\Lambda \det_\Lambda^{-1} H^1_{Iw}(K,V)\otimes_\Lambda \det_\Lambda H^2_{Iw}(K,V)\right].$$

Perrin-Riou a montré dans [**Per94b**] que $\delta(\Omega_V)$ ne dépend pas de h, et que $\delta(\Omega_V)\in \mathbf{Q}_p\otimes_{\mathbf{Z}_p}\Lambda$; elle a de plus conjecturé que $\delta(\Omega_V)$ est une unité de $\mathbf{Q}_p\otimes_{\mathbf{Z}_p}\Lambda$. Ceci a été montré par Colmez dans [**Col98**], qui a en fait montré la conjecture Réc(V), conjecture qui affirme que pour les accouplements naturels sur $H^1_{Iw}(K,V)\times H^1_{Iw}(K,V^*(1))$ et sur $\mathcal{H}(\Gamma)\otimes_{\mathbf{Q}_p}\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V)\times\mathcal{H}(\Gamma)\otimes_{\mathbf{Q}_p}\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V^*(1))$, l'adjoint de $\Omega_{V,h}$ est (essentiellement) l'inverse de $\Omega_{V^*(1),1-h}$. Cela implique que $\delta(\Omega_V)\delta(\Omega_{V^*(1)})^\iota$ est une unité de $\mathbf{Q}_p\otimes_{\mathbf{Z}_p}\Lambda$, et donc de même pour $\delta(\Omega_V)$ et $\delta(\Omega_{V^*(1)})$. Soient T un réseau de V et M un réseau de $\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V)$, tels que le déterminant de l'isomorphisme de comparaison entre $\mathbf{B}_{\mathrm{cris}}\otimes_{\mathbf{Z}_p}T$ et $\mathbf{B}_{\mathrm{cris}}\otimes_{\mathcal{O}_K}M$ appartienne à $t^{t_H(V)}\mathcal{O}^*_{\widehat{\mathbf{Q}}_p^{\mathrm{nr}}}$ (on peut prendre $M=\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(T)$ par exemple). Posons :

$$\delta_{\mathbf{Z}_p}(\Omega_V) = \prod_{j\geqslant 1-h} (\ell_{-j})^{-\dim_{\mathbf{Q}_p}\mathrm{Fil}^j\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V)} \\ \times \Omega_{V,h}\left[\det_\Lambda(\Lambda\otimes_{\mathbf{Z}_p}M)\otimes_\Lambda \det_\Lambda^{-1} H^1_{Iw}(K,T)\otimes_\Lambda \det_\Lambda H^2_{Iw}(K,T)\right].$$

La « conjecture $\delta_{\mathbf{Z}_p}(V)$ » de Perrin-Riou est alors que $\delta_{\mathbf{Z}_p}(\Omega_V)\in\Lambda^*$ et on a le théorème ci-dessous qui est démontré dans [**BB05**].

Théorème 3.3.1. — *Si V est une représentation cristalline, alors la conjecture $\delta_{\mathbf{Z}_p}(V)$ est vraie.*

La démonstration de ce théorème utilise la construction de l'exponentielle de Perrin-Riou donnée par Benois à partir du module de Wach de V, ce qui permet de suivre l'intégralité tout au long des constructions. On peut d'ailleurs relier la conjecture $\delta_{\mathbf{Z}_p}(V)$ (rebaptisée $C_{Iw}(K_\infty/K,V)$) aux conjectures $C_{EP}(L/K,V)$ de Fontaine et Perrin-Riou et des techniques de descente en théorie d'Iwasawa permettent de montrer le théorème ci-dessous (cf. aussi [**BB05**]).

Théorème 3.3.2. — *La conjecture $C_{EP}(L/K,V)$ est vraie pour toute extension finie L de K contenue dans K_∞.*

CHAPITRE 4

LE PROGRAMME DE LANGLANDS p-ADIQUE

L'objet de ce chapitre est de donner une très courte introduction à la partie du programme de Langlands p-adique à laquelle j'ai contribué, puis d'expliquer ces contributions.

4.1. Le programme de Langlands p-adique

Le programme de Langlands p-adique, initié par Breuil, est la recherche d'une correspondance éventuelle entre certaines (classes de) représentations p-adiques ou modulo p de G_K de dimension n et certaines (classes de) représentations p-adiques ou modulo p de $\mathrm{GL}_n(K)$. Le cas sur lequel on sait le plus de choses à présent est celui où $K = \mathbf{Q}_p$ et $n = 2$. On sait alors associer à une représentation V de $G_{\mathbf{Q}_p}$ de dimension 2 une représentation $\mathrm{B}(V)$ de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ ayant de bonnes propriétés quand V est à coefficients dans une extension finie de $\mathbf{F}_p$ (cf. [**Bre03a**]) ou bien quand V est à coefficients dans une extension finie de $\mathbf{Q}_p$ et est trianguline (cf. [**Bre03b, Col04b, Col05a**]). Rappelons qu'une représentation V est dite trianguline si $\mathscr{R} \otimes_{\mathscr{E}^\dagger} \mathrm{D}^\dagger(V)$ est une extension successive de (φ, Γ)-modules de rang 1 sur $\mathscr{R}$.

Nous allons nous concentrer sur les cas « modulo p » et « cristabellin ». Dans les deux cas, Breuil a construit la représentation $\mathrm{B}(V)$ et pour montrer que cette représentation a de bonnes propriétés, il faut montrer que « l'isomorphisme de Colmez » – que nous allons décrire – est vrai. Appelons $(\varprojlim_\psi \mathrm{D}(V))^b$ l'ensemble des suites bornées pour la topologie faible $v = (v_0, v_1, \cdots)$ d'éléments de $\mathrm{D}(V)$, telles que $\psi(v_{i+1}) = v_i$. On choisit un caractère η de $\mathbf{Q}_p^\times$ et on munit $(\varprojlim_\psi \mathrm{D}(V))^b$ d'une action du groupe $\mathrm{B}_2(\mathbf{Q}_p) = \left(\begin{smallmatrix} \star & \star \\ 0 & \star \end{smallmatrix}\right)$ de la manière suivante :

$$\left(\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} \star v\right)_i = \eta^{-1}(x) v_i; \qquad \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \star v\right)_i = \gamma_a^{-1}(v_i), \text{ où } \chi(\gamma_a) = a\,;$$
$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p^j \end{pmatrix} \star v\right)_i = v_{i-j} = \psi^j(v_i); \qquad \left(\begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \star v\right)_i = (1+X)^{p^i z} v_i.$$

L'isomorphisme de Colmez est alors le fait que les semi-simplifiées des restrictions à $\mathrm{B}_2(\mathbf{Q}_p)$ de $\mathrm{B}(V)^*$ et de $(\varprojlim_\psi \mathrm{D}(V))^b$ sont isomorphes (pour un choix approprié du caractère central η). Dans ce court chapitre, nous allons voir ce qui est connu pour les représentations cristabellines (qui sont triangulines de manière plus ou moins évidente) et pour les représentations modulo p. Le cas des représentations triangulines non cristabellines a été traité par Colmez (cf. [**Col04b, Col05a**]).

4.2. Représentations cristabellines de dimension 2

Soient $k \geqslant 2$ et $\alpha \neq \beta$ deux caractères localement constants $\alpha, \beta : \mathbf{Q}_p^\times \to L^\times$, qui vérifient $-(k-1) < \mathrm{val}(\alpha(p)) \leqslant \mathrm{val}(\beta(p)) < 0$ et $\mathrm{val}(\alpha(p)) + \mathrm{val}(\beta(p)) = -(k-1)$ et qui sont triviaux sur $1+p^n\mathbf{Z}_p$ pour un $n \geqslant 1$. On pose $\alpha_p = \alpha(p)^{-1}$ et $\beta_p = \beta(p)^{-1}$, ce qui fait que α_p et β_p appartiennent à l'idéal maximal de $\mathcal{O}_L$. On note $D(\alpha,\beta)$ le $(\varphi, G_{\mathbf{Q}_p})$-module filtré défini par $D(\alpha,\beta) = L \cdot e_\alpha \oplus L \cdot e_\beta$ où (ici $G(\cdot)$ est une somme de Gauss) :

$$\begin{cases} \varphi(e_\alpha) & = \alpha_p^{-1} e_\alpha \\ \varphi(e_\beta) & = \beta_p^{-1} e_\beta \end{cases} \quad \text{et si } g \in \Gamma, \text{ alors :} \quad \begin{cases} g(e_\alpha) & = \alpha(\chi(g)) e_\alpha \\ g(e_\beta) & = \beta(\chi(g)) e_\beta \end{cases}$$

et

$$\mathrm{Fil}^i(L_n \otimes_L D(\alpha,\beta)) = \begin{cases} L_n \otimes_L D(\alpha,\beta) & \text{si } i \leqslant -(k-1)\,; \\ L_n \cdot (e_\alpha + G(\beta\alpha^{-1}) \cdot e_\beta) & \text{si } -(k-2) \leqslant i \leqslant 0\,; \\ 0 & \text{si } i \geqslant 1. \end{cases}$$

Soit V la représentation cristabelline de $G_{\mathbf{Q}_p}$ telle que $\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V) = D(\alpha,\beta)$. En utilisant le module de Wach $\mathrm{N}(V)$, on montre le résultat ci-dessous (cf. [**BB06**]) qui est l'ingrédient technique principal pour montrer l'isomorphisme de Colmez pour V.

Théorème 4.2.1. — *Si $(w_{\alpha,n})_{n\geqslant 0}$ et $(w_{\beta,n})_{n\geqslant 0}$ sont deux suites d'éléments de $\mathscr{R}^+$, alors la suite $(w_{\alpha,n} \otimes e_\alpha + w_{\beta,n} \otimes e_\beta)_{n\geqslant 0} \in \varprojlim \mathscr{R}^+ \otimes_L \mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V)$ appartient à $(\varprojlim_\psi \mathrm{D}(V))^b$ si et seulement si :*

(i) pour tout $n \geqslant 0$, $w_{\alpha,n}$ est d'ordre $\mathrm{val}(\alpha_p)$ et $w_{\beta,n}$ est d'ordre $\mathrm{val}(\beta_p)$, et les deux suites $(\|w_{\alpha,n}\|_{\mathrm{val}(\alpha_p)})_{n\geqslant 0}$ et $(\|w_{\beta,n}\|_{\mathrm{val}(\beta_p)})_{n\geqslant 0}$ sont bornées ;

(ii) pour tout $m \geqslant m(V)$, et pour tout $n \geqslant 0$, on a $\varphi^{-m}(w_{\alpha,n} \otimes e_\alpha + w_{\beta,n} \otimes e_\beta) \in \mathrm{Fil}^0(L_m[\![t]\!] \otimes_L \mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V))$, c'est-à-dire $\varphi^{-m}(w_{\alpha,n})\alpha_p^m - G(\alpha\beta^{-1})\varphi^{-m}(w_{\beta,n})\beta_p^m \in t^{k-1}L_m[\![t]\!]$;

(iii) pour tout $n \geqslant 0$, on a $\psi(w_{\alpha,n+1}) = \alpha_p^{-1} w_{\alpha,n}$ et $\psi(w_{\beta,n+1}) = \beta_p^{-1} w_{\beta,n}$.

Ce théorème permet d'identifier $(\varprojlim_\psi \mathrm{D}(V))^b$ à un espace de mesures sur $\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)$ et ensuite à $\mathrm{B}(V)^*$. Le corollaire principal de l'isomorphisme de Colmez est que $\mathrm{B}(V)$ est non-nul, topologiquement irréductible et admissible (cf. [**BB06**]).

4.3. La correspondance modulo p

On note ω la réduction modulo p du caracère cyclotomique χ, et pour $y \in k_L^\times$ on note μ_y le caractère non-ramifié de $G_{\mathbf{Q}_p}$ qui envoie Frob_p^{-1} (c'est-à-dire l'inverse du frobenius arithmétique) sur y. On normalise le corps de classes pour que $p \in \mathbf{Q}_p^\times$ s'envoie sur Frob_p^{-1} ce qui permet de voir μ_y comme le caractère non-ramifié de $\mathbf{Q}_p^\times$ qui envoie p sur y. On note enfin ω_2 le caractère fondamental de Serre de niveau 2. Si $r \in \{0, \dots, p-1\}$ et si $\eta : \mathbf{Q}_p^\times \to k_L^\times$ est un caractère continu, que l'on identifie à un caractère continu de $G_{\mathbf{Q}_p}$ via le corps de classes, soit $\rho(r, \eta)$ l'unique représentation irréductible de $G_{\mathbf{Q}_p}$ dont la restriction à l'inertie est $(\omega_2^{r+1} \oplus \omega_2^{p(r+1)}) \otimes \eta$ et dont le déterminant est $\omega^{r+1}\eta^2$. On pose par ailleurs :

$$\pi(r, \lambda, \chi) = \left(\frac{\mathrm{ind}_{\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p)\mathbf{Q}_p^\times}^{\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)} \mathrm{Sym}^r k_L^2}{T - \lambda} \right) \otimes (\chi \circ \det),$$

où $\lambda \in \overline{\mathbf{F}}_p$ et T est un certain opérateur de Hecke. Le premier théorème (cf. [**Ber05b**]) est que l'isomorphisme de Colmez est vérifié pour les k_L-représentations de dimension 2 de $G_{\mathbf{Q}_p}$ (ici $[p-3-r]$ est l'unique entier appartenant à $\{0, \dots, p-2\}$ et qui est congruent à $p-3-r$ modulo $p-1$).

Théorème 4.3.1. — *Si $V = \rho(r, \eta)$, alors $(\varprojlim_\psi \mathrm{D}(V))^b = \pi(r, 0, \eta)$ et si $V = (\mu_\lambda \omega^{r+1} \oplus \mu_{\lambda^{-1}}) \otimes \eta$, alors les semi-simplifiées de $(\varprojlim_\psi \mathrm{D}(V))^b$ et de $\pi(r, \lambda, \eta) \oplus \pi([p-3-r], \lambda^{-1}, \omega^{r+1}\eta)$ sont isomorphes.*

Une conséquence immédiate de ce théorème est que les deux correspondances définies par Breuil en caractéristisque 0 (dans [**Bre03b**]) et en caractéristique p (dans [**Bre03a**]) sont compatibles. Le fait que l'on puisse construire les représentations $\pi(r, \lambda, \eta)$ à partir de (φ, Γ)-modules permet d'étudier leur restriction au Borel et on trouve les deux théorèmes ci-dessous (cf. [**Ber05b**]).

Théorème 4.3.2. — *Si Π est une k_L-représentation lisse irréductible de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ admettant un caractère central, alors :*

(1) si Π est un caractère, ou la spéciale, ou supersingulière, alors sa restriction à $\mathrm{B}_2(\mathbf{Q}_p)$ est toujours irréductible ;

(2) si Π est une série principale, alors sa restriction à $\mathrm{B}_2(\mathbf{Q}_p)$ est une extension du caractère induisant $\chi_1 \otimes \chi_2$ par une représentation irréductible $\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}_2(\mathbf{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)} (\chi_1 \otimes \chi_2)_0$.

Théorème 4.3.3. — *Si Π_1 et Π_2 sont deux k_L-représentations lisses semi-simples et de longueur finie de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ (dont les composantes irréductibles admettent un caractère central) et dont les semi-simplifications des restrictions à $\mathrm{B}_2(\mathbf{Q}_p)$ sont isomorphes, alors Π_1 et Π_2 sont déjà isomorphes en tant que représentations de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$.*

Ces résultats ont été récemment retrouvés et étendus par Vignéras (cf. [**Vig06**]) et Paskunas (cf. [**Pas06**]) sans passer par la théorie des (φ, Γ)-modules.

BIBLIOGRAPHIE

[And02a] Y. André – *Représentations galoisiennes et opérateurs de Bessel p-adiques.* Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 52 (2002), no. 3, 779–808.

[And02b] Y. André – *Filtrations de Hasse-Arf et monodromie p-adique.* Invent. Math. 148 (2002), no. 2, 285–317.

[Ax70] J. Ax – *Zeros of polynomials over local fields—The Galois action.* J. Algebra 15 1970 417–428.

[BL94] L. Barthel, R. Livné – *Irreducible modular representations of* GL_2 *of a local field.* Duke Math. J. 75 (1994), no. 2, 261–292.

[BL95] L. Barthel, R. Livné – *Modular representations of* GL_2 *of a local field : the ordinary, unramified case.* J. Number Theory 55 (1995), no. 1, 1–27.

[Ben00] D. Benois – *Iwasawa theory of crystalline representations.* Duke Math. J. 104 (2000), no. 2, 211–267.

[BB05] D. Benois, L. Berger – *Théorie d'Iwasawa des représentations cristallines II.* Prépublication 2005.

[BN02] D. Benois, T. Nguyen Quang Do – *Les nombres de Tamagawa locaux et la conjecture de Bloch et Kato pour les motifs* $\mathbb{Q}(m)$ *sur un corps abélien.* Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 35 (2002), no. 5, 641–672.

[Ber02] L. Berger – *Représentations p-adiques et équations différentielles.* Invent. Math. 148 (2002), no. 2, 219–284.

[Ber03] L. Berger – *Bloch and Kato's exponential map : three explicit formulas.* Doc. Math. 2003, Extra Vol., 99–129.

[Ber04a] L. Berger – *Limites de représentations cristallines.* Compos. Math. 140 (2004), no. 6, 1473–1498.

[Ber04b] L. Berger – *An introduction to the theory of p-adic representations.* Geometric Aspects of Dwork Theory, 255–292, Walter de Gruyter, Berlin, 2004.

[Ber04c] L. Berger – *Équations différentielles p-adiques et* (φ, N)*-modules filtrés.* Prépublication 2004.

[Ber05a] L. Berger – *Représentations de de Rham et normes universelles.* Bull. SMF 133 (2005), no. 4, 601–618.

[Ber05b] L. Berger – *Représentations modulaires de* $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ *et représentations galoisiennes de dimension* 2. Prépublication 2005.

[BB06] L. Berger, C. Breuil – *Sur quelques représentations potentiellement cristallines de* $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$. Prépublication, 2006.

[BLZ04] L. Berger, H. Li, H. Zhu – *Construction of some families of* 2*-dimensional crystalline representations.* Math. Ann. 329 (2004), no. 2, 365–377.

[BK90] S. Bloch, K. Kato – *L-functions and Tamagawa numbers of motives.* The Grothendieck Festschrift, Vol. I, 333–400, Progr. Math., 86, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990.

[Br99a] C. Breuil – *Représentations semi-stables et modules fortement divisibles.* Invent. Math. 136 (1999), no. 1, 89–122.

[Br99b] C. Breuil – *Une remarque sur les représentations locales p-adiques et les congruences entre formes modulaires de Hilbert.* Bull. Soc. Math. France 127 (1999), no. 3, 459–472.

[Br00a] C. Breuil – *Groupes p-divisibles, groupes finis et modules filtrés.* Ann. of Math. (2) 152 (2000), no. 2, 489–549.

[Br00b] C. Breuil – *Integral p-adic Hodge theory.* Algebraic geometry 2000, Azumino (Hotaka), 51–80, Adv. Stud. Pure Math., 36, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2002.

[Bre03a] C. Breuil – *Sur quelques représentations modulaires et p-adiques de* $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ *I.* Compositio Math. 138 (2003), no. 2, 165–188.

[Bre03b] C. Breuil – *Sur quelques représentations modulaires et p-adiques de* $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ *II.* J. Institut Math. Jussieu 2, 2003, 23–58.

[Bre03c] C. Breuil – *Série spéciale p-adique et cohomologie étale complétée.* Prépublication 2003.

[Bre04a] C. Breuil – *Invariant* $\mathcal{L}$ *et série spéciale p-adique.* Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4) 37 (2004), no. 4, 559–610.

[BM02] C. Breuil, A. Mézard – *Multiplicités modulaires et représentations de* $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p)$ *et de* $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$ *en* $\ell = p$. Avec un appendice par Guy Henniart. Duke Math. J. 115 (2002), no. 2, 205–310.

[BM05] C. Breuil, A. Mézard – *Représentations semi-stables de* $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$*, demi-plan p-adique et réduction modulo p.* Prépublication, 2005.

[Bum98] D. Bump – *Automorphic forms and representations.* Cambridge Studies in Advanced Math. 55, Cambridge University Press, 1998.

[BF96] D. Burns, M. Flach – *Motivic L-functions and Galois module structure.* Math. Ann. 305 (1996), no. 1, 65–102.

[BF01] D. Burns, M. Flach – *Tamagawa numbers for motives with (non commutative) coefficients.* Doc. Math. 6 (2001), 501–570.

[BG03] D. Burns, C. Greither – *On the equivariant Tamagawa number conjecture for Tate motives.* Invent. Math. 153 (2003), no. 2, 303–359.

[BF04] D. Burns, M. Flach – *On the equivariant Tamagawa number conjecture for Tate motives II.* Preprint (2004).

[Che96] F. Cherbonnier – *Représentations p-adiques surconvergentes.* Thèse de l'Université d'Orsay, 1996.

[CC98] F. Cherbonnier, P. Colmez – *Représentations p-adiques surconvergentes.* Invent. Math. 133 (1998), no. 3, 581–611.

[CC99] F. Cherbonnier, P. Colmez – *Théorie d'Iwasawa des représentations p-adiques d'un corps local.* J. Amer. Math. Soc. 12, 1999, 241–268.

[Chr00] G. Christol – *About a Tsuzuki theorem.* p-adic functional analysis (Ioannina, 2000), 63–74, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., 222, Dekker, New York, 2001.

[CM97] G. Christol, Z. Mebkhout – *Sur le théorème de l'indice des équations différentielles p-adiques. II.* Ann. of Math. (2) 146 (1997), no. 2, 345–410.

[CM00] G. Christol, Z. Mebkhout – *Sur le théorème de l'indice des équations différentielles p-adiques. III.* Ann. of Math. (2) 151 (2000), no. 2, 385–457.

[CM01] G. Christol, Z. Mebkhout – *Sur le théorème de l'indice des équations différentielles p-adiques. IV.* Invent. Math. 143 (2001), no. 3, 629–672.

[CM02] G. Christol, Z. Mebkhout – *Équations différentielles p-adiques et coefficients p-adiques sur les courbes.* Cohomologies p-adiques et applications arithmétiques, II. Astérisque No. 279 (2002), 125–183.

[CR94] G. Christol, P. Robba – *Équations différentielles p-adiques. Applications aux sommes exponentielles.* Actualités Mathématiques, Hermann, Paris, 1994.

[CG96] J. Coates, R. Greenberg – *Kummer theory for abelian varieties over local fields.* Invent. Math. 124 (1996), no. 1-3, 129–174.

[Col98] P. Colmez – *Théorie d'Iwasawa des représentations de de Rham d'un corps local.* Ann. of Math. (2) 148 (1998), no. 2, 485–571.

[Col99] P. Colmez – *Représentations cristallines et représentations de hauteur finie.* J. Reine Angew. Math. 514 (1999), 119–143.

[Col00] P. Colmez – *Fonctions L p-adiques.* Séminaire Bourbaki, Vol. 1998/99. Astérisque No. 266 (2000), Exp. No. 851, 3, 21–58.

[Col01] P. Colmez – *Les conjectures de monodromie p-adiques.* Séminaire Bourbaki. Vol. 2001/2002. Astérisque No. 290 (2003), Exp. No. 897, vii, 53–101.

[Col02] P. Colmez – *Espaces de Banach de dimension finie.* Journal of the Inst. of Math. Jussieu (2002) 1(3), 331-439.

[Col03] P. Colmez – *Espaces Vectoriels de dimension finie et représentations de de Rham.* En préparation.

[Col04a] P. Colmez – *La conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer p-adique.* Séminaire Bourbaki, 2002/03. Astérisque No. 294 (2004), Exp. No. 919, 251–319.

[Col04b] P. Colmez – *Une correspondance de Langlands locale p-adique pour les représentations semi-stables de dimension* 2. Prépublication 2004.

[Col05a] P. Colmez – *Série principale unitaire pour* $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ *et représentations triangulines de dimension* 2. Prépublication 2005.

[Col05b] P. Colmez – *Fonctions d'une variable p-adique.* Prépublication 2005.

[CF00] P. Colmez, J-M. Fontaine – *Construction des représentations p-adiques semi-stables.* Inv. Math. 140, 2000, 1–43.

[Cr98] R. Crew – *Finiteness theorems for the cohomology of an overconvergent isocrystal on a curve.* Ann. Sci. École Norm. Sup. 31 (1998) 717–763.

[Dee01] J. Dee – Φ-Γ *modules for families of Galois representations.* J. Algebra 235 (2001), no. 2, 636–664.

[Del73] P. Deligne – *Les constantes des équations fonctionnelles des fonctions L.* Modular functions of one variable, II (Proc. Internat. Summer School, Univ. Antwerp, Antwerp, 1972), pp. 501–597. Lecture Notes in Math., Vol. 349, Springer, Berlin, 1973.

[Del87] P. Deligne – *Le déterminant de la cohomologie.* Current trends in arithmetical algebraic geometry (Arcata, Calif., 1985), 93–177, Contemp. Math., 67, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987.

[Edi92] B. Edixhoven – *The weight in Serre's conjectures on modular forms.* Invent. Math. 109 (1992), no. 3, 563–594.

[Fon90] J.-M. Fontaine – *Représentations p-adiques des corps locaux I.* The Grothendieck Festschrift, Vol. II, 249–309, Progr. Math. 87, Birkhäuser Boston, Boston, MA 1990.

[Fon94a] J.-M. Fontaine – *Le corps des périodes p-adiques.* Astérisque No. 223 (1994), 59–111.

[Fon94b] J.-M. Fontaine – *Représentations p-adiques semi-stables.* Astérisque No. 223 (1994), 113–184.

[Fon94c] J.-M. Fontaine – *Représentations ℓ-adiques potentiellement semi-stables.* Astérisque No. 223 (1994), 321–347.

[Fon96] J.-M. Fontaine – *Deforming semistable Galois representations.* Elliptic curves and modular forms (Washington, DC, 1996). Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 94 (1997), no. 21, 11138–11141.

[Fon04a] J.-M. Fontaine – *Arithmétique des représentations galoisiennes p-adiques.* Cohomologies p-adiques et applications arithmétiques. III. Astérisque No. 295 (2004), xi, 1–115.

[Fon04b] J.-M. Fontaine – *Représentations de de Rham et représentations semi-stables.* Prépublication 2004-12 (Orsay).

[FL82] J.-M. Fontaine, G. Laffaille – *Construction de représentations p-adiques.* Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 15 (1982), no. 4, 547–608 (1983).

[FP94] J.-M. Fontaine, B. Perrin-Riou – *Autour des conjectures de Bloch et Kato ; cohomologie galoisienne et valeurs de fonctions L.* Motives (Seattle, WA, 1991), 599–706, Proc. Sympos. Pure Math., 55, Part 1, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994.

[FW79] J.-M. Fontaine, J.-P. Wintenberger – *Le "corps des normes" de certaines extensions algébriques de corps locaux.* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B 288 (1979), no. 6, A367–A370.

[FV81] J. Fresnel, M. van der Put – *Géométrie analytique rigide et applications.* Progress in Mathematics, 18. Birkhäuser, Boston, Mass., 1981. xii+215 pp.

[Haz74a] M. Hazewinkel – *On norm maps for one dimensional formal groups I : the cyclotomic* Γ*-extension.* J. Algebra 32 (1974), 89–108.

[Haz74b] M. Hazewinkel – *On norm maps for one dimensional formal groups. II. G-extensions of local fields with algebraically closed residue field.* J. reine angew Math. 268/269 (1974), 222–250.

[Haz77] M. Hazewinkel – *On norm maps for one dimensional formal groups. III.* Duke Math. J. 44 (1977), 305–314.

[Hel49] O. Helmer – *The elementary divisor theorem for certain rings without chain condition.* Bull. Amer. Math. Soc. 49, (1943). 225–236.

[Her98] L. Herr – *Sur la cohomologie galoisienne des corps* p*-adiques.* Bull. Soc. Math. France 126 (1998), 563–600.

[Her01] L. Herr – *Une approche nouvelle de la dualité locale de Tate.* Math. Ann. 320 (2001), no. 2, 307–337.

[Hyo95] O. Hyodo – $H^1_g = H^1_{st}$. Volume en l'honneur de Hyodo, 136 – 142.

[Kat93a] K. Kato – *Lectures on the approach to Iwasawa theory for Hasse-Weil L-functions via* B_{dR}. Arithmetic algebraic geometry (Trento, 1991), 50–163, Lecture Notes in Math., 1553, Springer, Berlin, 1993.

[Kat93b] K. Kato – *Lectures on the approach to Iwasawa theory for Hasse-Weil L-functions via* B_{dR}*, part II.* Preprint (1993).

[Kat93c] K. Kato – *Iwasawa theory and* p*-adic Hodge theory.* Kodai Math. J. 16 (1993), no. 1, 1–31.

[KKT96] K. Kato, M. Kurihara, T. Tsuji – *Local Iwasawa theory of Perrin-Riou and syntomic complexes.* Preprint (1996).

[Ked04] K. Kedlaya – *A* p*-adic local monodromy theorem.* Ann. of Math. (2) 160 (2004), no. 1, 93–184.

[KM76] F. Knudsen, D. Mumford – *The projectivity of the moduli space of stable curves I : Preliminaries on "det" and "Div".* Math. Scand. 39 (1976), no. 1, 19–55.

[Kri69] B. Kripke – *Finitely generated coherent analytic sheaves.* Proc. Amer. Math. Soc. 21 1969 530–534.

[Laf80] G. Laffaille – *Groupes* p*-divisibles et modules filtrés : le cas peu ramifié.* Bull. Soc. Math. France 108 (1980), no. 2, 187–206.

[Laz62] M. Lazard – *Les zéros des fonctions analytiques d'une variable sur un corps valué complet.* Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. 14 1962 47–75.

[Mar03] A. Marmora – *Irrégularité et conducteur de Swan p-adiques.* Doc. Math. 9 (2004), 413–433.

[Maz72] B. Mazur – *Rational points of abelian varieties with values in towers of number fields.* Invent. Math. 18 (1972), 183–266.

[Meb01] Z. Mebkhout – *Analogue p-adique du théorème de Turrittin et le théorème de la monodromie p-adique.* Invent. math. 148 (2002), 319–351.

[Nek95] J. Nekovář – *On p-adic height pairings.* Séminaire de Théorie des Nombres, Paris, 1990–91, 127–202, Progr. Math., 108, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1993.

[Nek02] J. Nekovář – *Selmer complexes.* Preprint (2002), à paraître dans Astérisque.

[Pas06] V. Paskunas – *On restriction of representations of* $\mathrm{GL}_2(F)$ *to a Borel subgroup.* Preprint (2006).

[Per92] B. Perrin-Riou – *Théorie d'Iwasawa et hauteurs p-adiques.* Invent. Math. 109 (1992), no. 1, 137–185.

[Per94a] B. Perrin-Riou – *Représentations p-adiques ordinaires.* Périodes p-adiques, (Bures-sur-Yvette, 1988), Astérisque 223 (1994) 185–220.

[Per94b] B. Perrin-Riou – *Théorie d'Iwasawa des représentations p-adiques sur un corps local.* Inv. Math. 115, 1994, 81–161.

[Per95] B. Perrin-Riou – *Fonctions L p-adiques des représentations p-adiques.* Astérisque No. 229 (1995), 198 pp.

[Per99] B. Perrin-Riou – *Théorie d'Iwasawa et loi explicite de réciprocité.* Doc. Math. 4 (1999), 219–273.

[Per00] B. Perrin-Riou – *Représentations p-adiques et normes universelles. I. Le cas cristallin.* J. Amer. Math. Soc. 13 (2000), no. 3, 533–551.

[Per01] B. Perrin-Riou – *Théorie d'Iwasawa des représentations p-adiques semi-stables.* Mém. Soc. Math. Fr. (N.S.) No. 84, (2001), vi+111 pp.

[Pol03] R. Pollack – *On the p-adic L-function of a modular form at a supersingular prime.* Duke Math. J. 118 (2003), no. 3, 523–558.

[Sch87] P. Schneider – *Arithmetic of formal groups and applications I : universal norm subgroups.* Invent. Math. 87 (1987), 587–602.

[Sch02] P. Schneider – *Nonarchimedean Functional Analysis.* Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2002. vi+156 pp.

[ST01] P. Schneider, J. Teitelbaum – *$U(\mathfrak{g})$-finite locally analytic representations* (with an appendix by D. Prasad). Representation Theory 5, 2001, 111–128.

[ST02a] P. Schneider, J. Teitelbaum – *Locally analytic distributions and p-adic representation theory, with applications to* GL_2. J. Amer. Math. Soc. 15, 2002, 443–468.

[ST02b] P. Schneider, J. Teitelbaum – *Banach space representations and Iwasawa theory.* Israel J. Math. 127, 2002, 359–380.

[ST03] P. Schneider, J. Teitelbaum – *Algebras of p-adic distributions and admissible representations.* Inv. Math. 153, 2003, 145–196.

[Sen72] S. Sen – *Ramification in p-adic Lie extensions.* Invent. Math. 17 (1972) 44–50.

[Sen73] S. Sen – *Lie algebras of Galois groups arising from Hodge-Tate modules.* Ann. of Math. 97 (1973) 160–170.

[Sen80] S. Sen – *Continuous cohomology and p-adic Galois representations.* Inv. Math. 62 (1980/81) 89–116.

[Ser64] J.-P. Serre – *Lie Algebras and Lie Groups.* Second edition. Lecture Notes in Mathematics, 1500. Springer-Verlag, Berlin, 1992.

[Ser68] J.-P. Serre – *Corps locaux.* Deuxième édition. Publications de l'Université de Nancago, No. VIII. Hermann, Paris, 1968. 245 pp.

[Ser89] J.-P. Serre – *Abelian ℓ-adic representations and elliptic curves.* With the collaboration of Willem Kuyk and John Labute. Second edition. Advanced Book Classics. Addison-Wesley Publishing Company, Advanced Book Program, Redwood City, CA, 1989. xxiv+184 pp.

[Tat65] J. Tate – *Fourier analysis in number fields and Hecke's zeta-function.* Algebraic Number Theory (Proc. Instructional Conf., Brighton, 1965) pp. 305–347 Thompson, Washington, D.C.

[Tat66] J. Tate – *p-divisible groups.* Proc. Conf. Local Fields (Driebergen, 1966) 158–183 Springer, Berlin.

[Tsj99] T. Tsuji – *p-adic étale cohomology and crystalline cohomology in the semi-stable reduction case.* Invent. Math. 137 (1999), 233–411.

[Tsj02] T. Tsuji – *Semi-stable conjecture of Fontaine-Jannsen : a survey.* Cohomologies p-adiques et applications arithmétiques, II. Astérisque No. 279, (2002), 323–370.

[Tsu98a] N. Tsuzuki – *Slope filtration of quasi-unipotent overconvergent F-isocrystals.* Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 48 (1998), 379–412.

[Tsu98b] N. Tsuzuki – *Finite local monodromy of overconvergent unit-root F-isocrystals on a curve.* Amer. J. Math. 120 (1998) 1165–1190.

[Vig06] M.-F. Vignéras – *Série principale modulo p de groupes réductifs p-adiques.* Prépublication 2006.

[Wac96] N. Wach – *Représentations p-adiques potentiellement cristallines.* Bull. Soc. Math. France 124, 1996, 375–400.

[Wac97] N. Wach – *Représentations cristallines de torsion.* Compositio Math. 108 (1997) 185–240.

[Win83] J.-P. Wintenberger – *Le corps des normes de certaines extensions infinies des corps locaux ; applications.* Ann. Sci. École Norm. Sup. 16 (1983), 59–89.