EPREUVE DE MATHS DE 6H, ENS 2008

par

Laurent Berger

Remarques préliminaires

Dans tout ce problème, E est un $\mathbf{C}$-espace vectoriel hermitien, de dimension finie d (sauf au 1.6 où E est de dimension infinie), et dont on note $\langle\cdot|\cdot\rangle$ le produit scalaire et $\|\cdot\|$ la norme associée ; le produit scalaire est semi-linéaire à gauche et linéaire à droite. On note Id l'identité sur E.

Si f est un endomorphisme de E, alors on note f^* son adjoint. On dit que :

(1) f est *normal* si $f \circ f^* = f^* \circ f$;

(2) f est *unitaire* si $f \circ f^* = \mathrm{Id}$;

(3) f est *hermitien* si $f = f^*$.

En particulier, les endomorphismes unitaires ainsi que les endomorphismes hermitiens sont normaux ; par ailleurs, les endomorphismes unitaires sont des isométries.

Si $f \in \mathrm{End}(E)$, on définit le *Hausdorffien* de f, $\mathcal{H}(f) \subset \mathbf{C}$ par :

$$\mathcal{H}(f) = \{\langle x|f(x)\rangle,\ x \in E \text{ et } \|x\| = 1\}.$$

Attention au fait que l'on ne considère que les $x \in E$ tels que $\|x\| = 1$ (et **pas** $\|x\| \leq 1$).

L'objet des parties 1 à 4 du problème est d'étudier diverses propriétés de $\mathcal{H}(f)$. La partie 5, qui est indépendante des parties 1, 3 et 4, ne concerne pas le Hausdorffien ; on y démontre une inégalité due à von Neumann sur les contractions.

1. Premiers calculs

1.1. Montrer que si λ est une valeur propre d'un endomorphisme f de E, alors $\lambda \in \mathcal{H}(f)$.

1.2. Montrer que si λ et μ sont deux nombres complexes, alors :

$$\mathcal{H}(\lambda \cdot f + \mu \cdot \mathrm{Id}) = \{\lambda z + \mu,\ z \in \mathcal{H}(f)\}.$$

On suppose que $\dim(E) = 2$ et on fixe une base orthonormée de E.

1.3. Montrer que si $\mathrm{Mat}(f) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, alors $\mathcal{H}(f)$ est le segment $[0, 1]$.

1.4. Montrer que si $\mathrm{Mat}(f) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, alors $\mathcal{H}(f)$ est l'ensemble $\{z \in \mathbf{C},\ |z| \leq 1/2\}$.

1.5. Montrer que si E est de dimension finie et $f \in \mathrm{End}(E)$, alors $\mathcal{H}(f)$ est compact.

1.6. Soit E l'ensemble des suites $x = (x_1, x_2, \dots)$ de nombres complexes telles que la série $\sum_{j=1}^{+\infty} |x_j|^2$ converge. On munit E du produit scalaire $\langle x|y \rangle = \sum_{j=1}^{+\infty} \overline{x}_j y_j$. Soit $f \in \mathrm{End}(E)$ défini par $f : (x_1, x_2, \dots) \mapsto (x_2, x_3, \dots)$. Montrer que $\mathcal{H}(f) = \{z \in \mathbf{C},\ |z| < 1\}$.

2. Réduction de certains endomorphismes

Dans cette partie, on démontre quelques résultats sur la réduction des endomorphismes de E. On suppose que E est de dimension finie et on se fixe $f \in \mathrm{End}(E)$.

2.1. Montrer que si f est normal et si v est un vecteur propre de f de valeur propre λ, alors v est un vecteur propre de f^* de valeur propre $\overline{\lambda}$ (on pourra calculer $\|f^*(v) - \overline{\lambda} v\|$).

2.2. Montrer que si f est normal et v est un vecteur propre de f, alors $(\mathbf{C} \cdot v)^\perp$ est stable par f.

2.3. Montrer que si f est normal, alors il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de f est diagonale, et donc que les endomorphismes normaux sont exactement ceux qui sont diagonalisables en base orthonormée. On note $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ les valeurs propres de f.

2.4. Montrer que si f est normal, alors f est hermitien si et seulement si $\lambda_j \in \mathbf{R}$ pour tout j et f est unitaire si et seulement si on peut écrire $\lambda_j = e^{i\theta_j}$ avec $\theta_j \in \mathbf{R}$ pour tout j.

2.5. On ne suppose plus f normal. Montrer qu'il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de f est triangulaire supérieure. Montrer qu'alors f est normal si et seulement si cette matrice est diagonale.

3. Le Hausdorffien en dimension 2

Dans toute cette partie, on suppose que $\dim(E) = 2$ et on se fixe $f \in \mathrm{End}(E)$. Un *disque elliptique* est l'ensemble des points de $\mathbf{R}^2$ contenus à l'intérieur d'une ellipse (y compris l'ellipse elle-même). Une ellipse est dite *dégénérée* si elle est réduite à un segment. Un disque elliptique est donc l'image d'un disque fermé par une transformation affine du plan $\mathbf{R}^2$. Dans la suite, on identifie $\mathbf{C}$ avec $\mathbf{R}^2$ ce qui permet de parler de disques elliptiques contenus dans $\mathbf{C}$.

3.1. Montrer que si f est normal, alors $\mathcal{H}(f)$ est un segment, dont on précisera les extrémités.

3.2. On suppose qu'il existe une base orthonormée de E dans laquelle $\mathrm{Mat}(f) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{smallmatrix}\right)$ avec $a, b \in \mathbf{C}$. Soit $x \in E$ de norme 1 et de coordonnées x_1, x_2 dans cette base. En écrivant :

$$\begin{cases} a = a_0 e^{i\alpha} \\ b = b_0 e^{i\beta} \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = r_1 e^{i(\phi + (\alpha - \beta)/2)} \\ x_2 = r_2 e^{i(\theta + \phi)}, \end{cases}$$

montrer que $\mathcal{H}(f)$ est un disque elliptique de centre 0 et dont les axes sont de longueurs $||a| \pm |b||$.

3.3. On suppose que $\mathrm{Tr}(f) = 0$. Construire une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de f est de la forme $\left(\begin{smallmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{smallmatrix}\right)$ avec $a, b \in \mathbf{C}$.

Indication : on pourra distinguer les cas suivants :

(1) les deux valeurs propres de f sont égales ;

(2) f est normal ;

(3) il existe une base v, w de E telle que v et w sont de norme 1, $\langle v|w \rangle \neq 0$, et $\mathrm{Mat}(f) = \left(\begin{smallmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{smallmatrix}\right)$. On montrera que dans ce cas, il existe $\alpha \in \mathbf{C}$ de norme 1 tel que si l'on pose $u = v + \alpha w$, alors $\langle u | f(u) \rangle = 0$.

3.4. Montrer que si $f \in \mathrm{End}(E)$, alors $\mathcal{H}(f)$ est un disque elliptique, et que ce disque elliptique est dégénéré si et seulement si f est normal. Dans quels cas $\mathcal{H}(f)$ est-il un vrai disque ?

3.5. Montrer que si $f \in \mathrm{End}(E)$, alors les foyers de $\mathcal{H}(f)$ sont les valeurs propres de f.

4. Hausdorffien et convexité

On dit qu'une partie $\mathcal{C}$ d'un $\mathbf{R}$-espace vectoriel V est *convexe* si pour tous $x, y \in \mathcal{C}$ et $\lambda \in [0,1]$, on a $\lambda x + (1-\lambda)y \in \mathcal{C}$. Si P est une partie d'un espace vectoriel V, son *enveloppe convexe* est l'ensemble :

$$\mathrm{Conv}(P) = \left\{ \sum_{j=1}^{n} \alpha_j p_j,\ n \geq 1,\ \{p_1, \ldots, p_n\} \subset P,\ \alpha_j \geq 0 \text{ et } \sum_{j=1}^{n} \alpha_j = 1 \right\}.$$

En d'autres termes, c'est l'ensemble des *combinaisons convexes* de points de P.

Si $\mathcal{C}$ est une partie du plan complexe identifié à $\mathbf{R}^2$, alors on dit que $\mathcal{C}$ est un *convexe polygonal* s'il existe n points $v_1, \ldots, v_n$ tels que $\mathcal{C} = \mathrm{Conv}(\{v_1, \ldots, v_n\})$. On dit qu'un point $s \in \mathcal{C}$ est un *sommet* de $\mathcal{C}$ s'il n'est pas combinaison convexe de deux points distincts de $\mathcal{C}$ (on pourra faire un dessin ; remarquer qu'un sommet de $\mathcal{C}$ est nécessairement l'un des v_j).

4.1. Soit F un sous-espace vectoriel de E ; c'est un espace hermitien pour le produit scalaire induit. On note π_F la projection orthogonale sur F, ce qui fait que si $f \in \mathrm{End}(E)$, alors $\pi_F \circ f|_F \in \mathrm{End}(F)$. Montrer que $\mathcal{H}(\pi_F \circ f|_F) \subset \mathcal{H}(f)$.

4.2. Montrer que si $f \in \mathrm{End}(E)$, alors $\mathcal{H}(f)$ est convexe.

Indication : si $z_1 = \langle x_1 | f(x_1) \rangle$ et $z_2 = \langle x_2 | f(x_2) \rangle$ sont deux points de $\mathcal{H}(f)$, considérer l'espace vectoriel F engendré par x_1 et x_2.

4.3. On suppose que E est la somme directe orthogonale de deux sous-espaces E_1 et E_2, que $f_1 \in \mathrm{End}(E_1)$ et $f_2 \in \mathrm{End}(E_2)$ et que $f \in \mathrm{End}(E)$ est définie par $f(x_1, x_2) = (f_1(x_1), f_2(x_2))$ si $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$. Montrer que $\mathcal{H}(f) = \mathrm{Conv}(\mathcal{H}(f_1) \cup \mathcal{H}(f_2))$.

En déduire que si $f \in \mathrm{End}(E)$ est normal, alors $\mathcal{H}(f)$ est l'enveloppe convexe des valeurs propres de f. Donner un exemple qui montre que cette propriété n'est pas vraie si f n'est pas normal.

4.4. Montrer que si s est un sommet d'un convexe polygonal $\mathcal{C}$, et que si $\mathcal{E}$ est un disque elliptique tel que $\mathcal{E} \subset \mathcal{C}$ et $s \in \mathcal{E}$, alors $\mathcal{E}$ est nécessairement dégénéré (on utilisera le fait que par un point d'une ellipse non dégénérée, il ne passe qu'une seule droite tangente à l'ellipse).

4.5. Soit $f \in \mathrm{End}(E)$ un endomorphisme tel que $\mathcal{H}(f)$ est un convexe polygonal et soit $\lambda = \langle x | f(x) \rangle$ un sommet de $\mathcal{H}(f)$ avec x de norme 1.

(1) Soient y un vecteur de E de norme 1 et orthogonal à x et $F = \mathrm{Vect}(x, y)$. Montrer que $\pi_F \circ f|_F$ est normal et que x en est un vecteur propre ;

(2) Montrer que x est un vecteur propre de f, de valeur propre λ.

4.6. Montrer que si $0 < \varepsilon \leq 1$, et si dans une base orthonormée de E on a :

$$\operatorname{Mat}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

alors $\mathcal{H}(f)$ est l'enveloppe convexe des valeurs propres de f, mais f n'est pas normal.

4.7. Montrer que si $\dim(E) \leq 4$ et si $f \in \operatorname{End}(E)$ est tel que $\mathcal{H}(f)$ est l'enveloppe convexe des valeurs propres de f, alors f est normal.

4.8. Montrer que si $f \in \operatorname{End}(E)$ vérifie $\operatorname{Tr}(f) = 0$, alors il existe une base orthonormée de E dans laquelle la diagonale de $\operatorname{Mat}(f)$ est nulle.

5. L'inégalité de von Neumann

Dans cette partie, on suppose que E est de dimension finie. On se donne $f \in \operatorname{End}(E)$ et on suppose que f est une *contraction*, c'est-à-dire que $\|f(x)\| \leq \|x\|$ pour tout $x \in E$. Le but de cette partie est de montrer *l'inégalité de von Neumann* qui dit que pour tout polynôme $P(X) \in \mathbf{C}[X]$, on a :

$$\|P(f)(x)\| \leq \sup_{\substack{\lambda \in \mathbf{C} \\ |\lambda| \leq 1}} |P(\lambda)| \cdot \|x\|.$$

5.1. Montrer que si f est normal, alors f est une contraction si et seulement si ses valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_d$ vérifient $|\lambda_j| \leq 1$ pour tout j. En déduire l'inégalité de von Neumann pour f normal.

5.2. Soit $f \in \operatorname{End}(E)$ inversible. Montrer qu'il existe $h \in \operatorname{End}(E)$ hermitien à valeurs propres ≥ 0 (on dit que h est *positif*) tel que $f^* \circ f = h^2$. En déduire qu'il existe u unitaire et h hermitien positif tels que $f = uh$, et que u et h sont alors uniques.

5.3. Montrer que si f n'est pas inversible, alors il existe toujours u unitaire et h hermitien positif tels que $f = uh$. Indication : on pourra considérer la décomposition de $f + \varepsilon \cdot \operatorname{Id}$ en $u_\varepsilon h_\varepsilon$ et montrer que l'ensemble des endomorphismes unitaires est compact.

5.4. Dans les notations de la question 5.3, montrer que f est une contraction si et seulement si les valeurs propres $\mu_1, \ldots, \mu_d$ de h vérifient $|\mu_j| \leq 1$ pour tout j.

5.5. Soit $Q(X) \in \mathbf{C}[X]$ un polynôme à coefficients complexes. Montrer que quels que soient $z_0 \in \mathbf{C}$ et $r \geq 0$, on a :

$$Q(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Q(z_0 + re^{i\theta}) d\theta.$$

5.6. Soient $Q_1(X), \ldots, Q_d(X) \in \mathbf{C}[X]$ des polynômes à coefficients complexes. Montrer que quels que soient $z_0 \in \mathbf{C}$ et $r \geq 0$, on a :

$$|Q_1(z_0)|^2 + \cdots + |Q_d(z_0)|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |Q_1(z_0 + re^{i\theta})|^2 + \cdots + |Q_d(z_0 + re^{i\theta})|^2 d\theta.$$

En déduire que :

$$\sup_{\substack{z \in \mathbf{C} \\ |z| \leq 1}} |Q_1(z)|^2 + \cdots + |Q_d(z)|^2 = \sup_{\substack{z \in \mathbf{C} \\ |z| = 1}} |Q_1(z)|^2 + \cdots + |Q_d(z)|^2.$$

Montrer enfin que si les Q_i sont des polynômes en plusieurs variables, $Q_i(X_1, \ldots, X_n) \in \mathbf{C}[X_1, \ldots, X_n]$, alors :

$$\sup_{\substack{z_1, \ldots, z_n \in \mathbf{C} \\ |z_j| \leq 1 \ \forall j}} |Q_1(z_1, \ldots, z_n)|^2 + \cdots + |Q_d(z_1, \ldots, z_n)|^2$$
$$= \sup_{\substack{z_1, \ldots, z_n \in \mathbf{C} \\ |z_j| = 1 \ \forall j}} |Q_1(z_1, \ldots, z_n)|^2 + \cdots + |Q_d(z_1, \ldots, z_n)|^2.$$

5.7. On se donne désormais une base orthonormée de E. Si u et w sont deux endomorphismes unitaires et si $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_d) \in \mathbf{C}^d$, soit $f_\mu = uwd_\mu w^*$ où :

$$\mathrm{Mat}(d_\mu) = \begin{pmatrix} \mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_d \end{pmatrix}.$$

Montrer que si l'on fixe u et w unitaires, $x \in E$ et $P(X) \in \mathbf{C}[X]$, alors il existe des polynômes $Q_1, \cdots, Q_d \in \mathbf{C}[X_1, \ldots, X_d]$ tels que :

$$P(f_\mu)(x) = \begin{pmatrix} Q_1(\mu_1, \ldots, \mu_d) \\ \vdots \\ Q_d(\mu_1, \ldots, \mu_d) \end{pmatrix}.$$

En déduire que :

$$\sup_{\substack{\mu_1, \ldots, \mu_d \in \mathbf{C} \\ |\mu_j| \leq 1 \ \forall j}} \|P(f_\mu)(x)\| = \sup_{\substack{\mu_1, \ldots, \mu_d \in \mathbf{C} \\ |\mu_j| = 1 \ \forall j}} \|P(f_\mu)(x)\|.$$

5.8. Terminer la démonstration de l'inégalité de von Neumann.

FIN DU PROBLEME

Laurent Berger