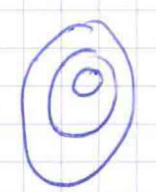
Méca Q

Aspect ondulatoire de la matière

• Expérience de Davisson et Germer (1927)

$\} \to e^-$ $\underset{D}{|\overset{U}{\longleftrightarrow}|}$ $\vec{V}_{e^-}$ $\quad V_{e^-} = \sqrt{\frac{2eU}{m}}$ $\quad |$ graphite $\to$



$i = \frac{\lambda D}{a}$ ↗ qd U ↘

↳ U ↘ $\to \lambda$ ↗

Tache d'Airy = diffraction par 1 trou

↳ e^- = onde avec longueur d'onde effective $\lambda \sim \frac{1}{p}$

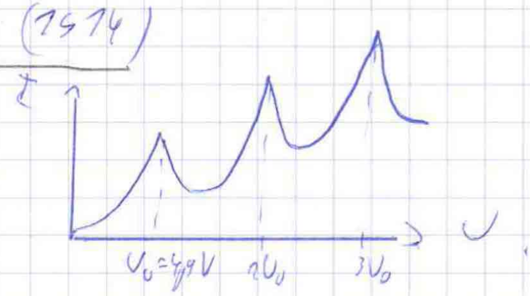
• Expérience de Shimizu, Shimizu et Takuma (1992)

Atomes froids de Néon $\to$ 2 fentes $\to$ figures d'interférence // fentes d'Young

↳ - description probabiliste $\to$ pas de trajectoire
- caractère ondulatoire émergent avec [illegible] statistique (beaucoup d'atomes)
probabilité (beaucoup de répétitions)

• Expérience de Franck et Hertz (1914)

$\} \xrightarrow{e^-}$ Vapeur Hg $\quad \lambda = 253{,}7\,nm$



↳ L'énergie de la matière confinée est quantifiée

1er postulat de la MQ : 1) Description quantique de particule masse $m \to \Psi(\underline{r}, t)$
= champ scalaire complexe et représente l'amplitude de proba de présence en $\underline{r}$ et t.

2) Proba de présence dans volume $d\underline{r}$ autour de $\underline{r}$

↳ $dP(\underline{r},t) = d\underline{r}\; p(\underline{r},t)$ ← densité de proba

$= d\underline{r}\; |\Psi(\underline{r},t)|^2$

↳ Normalisation $\int d\underline{r} \, |\psi(\underline{r},t)|^2 = 1$ $\quad [\psi] = \frac{1}{[d\underline{r}]^{1/2}} = L^{-d/2}$

↳ Si psi sol. ψ et $e^{i\lambda}\psi$ ⇒ défini à une phase globale près

Moyenne $\langle x \rangle = \int x |\psi(x,t)|^2 dx$ Variance $\Delta x^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$ Écart type $\Delta x = \sqrt{\Delta x^2}$

↳ indétermination

2nd postulat de la MQ : Pour une particule de masse m évoluant dans un champ d'énergie potentielle $V(\underline{r},t)$, la fct° d'onde vérifie l'éq de Schrödinger dépendante du temps :

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}(\underline{r},t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi(\underline{r},t) + V(\underline{r},t)\psi(\underline{r},t)$$

($\hbar$ = moment cinétique $\simeq 1{,}054 \cdot 10^{-34}$ J.s)

↳ Linéaire ⟶ Principe de superposition ψ_1 et ψ_2 sol° $\rightarrow \lambda_1\psi_1 + \lambda_2\psi_2$ sol°

↳ Ref du potentiel donne seul lieu à un ≠ de phase

Courant de proba : $\underline{J} = -i\frac{\hbar}{2m}\left[\psi^* \underline{\nabla}\psi - \psi\underline{\nabla}\psi^*\right]$

Équation de conservation de la proba

$$\frac{d}{dt}\int |\psi(\underline{r},t)|^2 d\underline{r} = -\int d\underline{r} \, \underline{\nabla} \cdot \underline{J}(\underline{r},t)$$

- Équation de Schrödinger stationnaire

↳ $\psi(\underline{r},t) = \psi(\underline{r})\, g(t)$ $\quad g(t) = e^{i\alpha(t)}$

↳ $\rho(\underline{r})$, $\langle x \rangle$, Δx, $\underline{J}(\underline{r})$ indep du temps

↳ $$\psi(\underline{r},t) = \psi(\underline{r}) e^{-i\frac{E}{\hbar}t}$$
$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi(\underline{r}) + V(\underline{r})\psi(\underline{r}) = E\psi(\underline{r}) \quad \text{“} H\psi = E\psi \text{”}$$

↳ éq aux valeurs propres $\quad E = \hbar\omega$ Relation de De Broglie - Planck - Einstein

⚠ Valable seul pour état stationnaire

$\rightarrow \psi(\underline{r}) \underset{|\underline{r}| \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ → ψ continue → $\underline{\nabla}\psi$ continue sauf aux discontinuités ∞

• Particule quantique libre

• $V = 0$ $\qquad \psi(x,t) = \underbrace{A e^{i(kx - \omega t)}}_{\text{OPPS}^+} + \underbrace{B e^{-i(kx + \omega t)}}_{\text{OPPS}^-}$

se propage selon $x\nearrow$

OPPS : onde plane progressive sinusoïdale

⚠ états stationnaires → OPPS

$$\frac{2mE}{\hbar^2} = \underline{k}^2 \qquad \boxed{\begin{aligned} E &= \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \\ \omega &= \frac{\hbar k^2}{2m} \end{aligned}}$$ → relation de dispersion de la particule libre

↳ $\underline{k}^2 > 0 \Rightarrow \underline{k}$ est réel (car $E > 0$) → propagation sans atténuation

↳ vitesse de phase $\quad \underline{v}_\varphi = \frac{\omega}{|\underline{k}|} \cdot \frac{\underline{k}}{\|\underline{k}\|}$

$$\boxed{\underline{v}_\varphi = \frac{\hbar \underline{k}}{2m}} = f(\underline{k}) \text{ ou } f(\omega)$$ → propagation DISPERSIVE

↳ vitesse de groupe $\quad \underline{v}_g = \underline{\nabla}_k \omega$

$$\boxed{\underline{v}_g = \frac{\hbar k}{m}}$$ $\quad \underline{v}_g = 2 v_\varphi \neq v_\varphi$ → propagation dispersive

↳ Analogie mécanique $\quad \underline{v}_g = \underline{V} \rightarrow \underline{p} = \hbar \underline{k} \qquad \boxed{\frac{h}{|\underline{p}|} = \lambda}$ Longueur d'onde de Broglie

⚠ que pour particule libre

↳ $\boxed{\underline{J} = \underline{v}_g \times \rho}$ "courant = vitesse de groupe × densité de proba"

↳ interférences → $\boxed{\lambda = \frac{h}{\sqrt{2\pi m k_B T}}}$ Longueur d'onde thermique de De Broglie

$m\nearrow$ ou $T\nearrow \Rightarrow \lambda \searrow$ Shrinque × 2 Tchune

• Paquets d'onde

$$\psi(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} \int_0^{+\infty} d\omega \, e^{i(kx - \omega t)} \, a(k,\omega) \, \underbrace{\delta\left(\omega - \frac{\hbar k^2}{2m}\right)}_{\text{vérifier relation de dispersion}}$$

⟹ Paquet d'onde, quasi-monochromatique

1er ordre $\Psi(x,t) = \underbrace{A(x - v_g(k_0)t)}_{\text{enveloppe}} \, \underbrace{e^{ik_0(x - v_g(k_0)t)}}_{\text{porteuse}}$

↳ glissement de Ψ — enveloppe : se déplace à v_g — porteuse : se déplace à v_φ

2e ordre $v_g(k') = v_g(k_0) + \frac{k'}{2}\frac{dv_g}{dk}(k_0)$

↳ étalement

- Principe d'indétermination de Heisenberg

Pour tt potentiel $\Delta x \, \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$ $\qquad \Delta x \, \Delta p_x \sim \hbar$

$\Delta x = 0 \to \Delta p_x = +\infty$ et $\Delta p_x = 0 \Rightarrow \Delta x = \infty$

↳ Stabilité de la matière $E = \frac{p^2}{2m} - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 d} = \frac{\hbar^2}{2md^2} - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 d}$