Electromagnétisme

- $f(\mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ A) = 0$ → courbes d'isosurfaces
  ↳ pente $\vec{\nabla} f$

- gradient $\vec{\nabla} f$ divergence $\vec{\nabla}\cdot\vec{V}$ rotationnel $\vec{\nabla}\times\vec{V}$ laplacien $\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla} f)$

- Théorème de Green-Ostrogradski

$$\iiint_V \operatorname{div}\vec{A}\, d^3r = \oiint_S \vec{A}\cdot\vec{dS} \qquad \iiint_V \vec{\nabla}\cdot\vec{A}\, d^3r = \oiint \vec{A}\cdot\vec{dS}$$

- Théorème de Stokes

$$\iint_S \vec{\text{rot}}(\vec{A})\,\vec{dS} = \oint_C \vec{A}\,\vec{dl} \qquad \iint_S \vec{\nabla}\times\vec{A}\cdot\vec{dS} = \oint_C \vec{A}\,\vec{dl}$$

- Identités : $\vec{\text{rot}}(\vec{\text{grad}} f) = \vec{0}$ $\quad$ $\operatorname{div}(\vec{\text{rot}} f) = 0$

- Circulation : $\int \vec{V}\cdot\vec{dl}$

$$V = -\vec{\nabla}\underbrace{\varphi}_{\text{potentiel}} \quad \text{si} \quad \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \phi}{\partial y}$$

- Densité de charge $\rho(\vec{r},t) = \sum_\alpha q_\alpha\, \delta(\vec{r} - \vec{r}_\alpha(t))$
- Densité de courant $\vec{j}(\vec{r},t) = \sum_\alpha q_\alpha\, \vec{v}_\alpha(t)\, \delta(\vec{r} - \vec{r}_\alpha(t))$ $\Rightarrow I_S = \iint_S \vec{j}\cdot\vec{dS}$
- Conservation de la charge $\quad \boxed{\dfrac{\partial \rho(\vec{r},t)}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{j}(\vec{r},t) = 0}$

$$\frac{d}{dt}\iiint \rho(\vec{r},t)\, d^3\vec{r} + \oiint_S \vec{j}(\vec{r},t)\cdot\vec{dS} = 0$$

- Équations locales de Maxwell-Lorentz

- $\operatorname{div}\vec{E} = \dfrac{\rho(\vec{r},t)}{\varepsilon_0}$ Maxwell - Gauss
- $\operatorname{div}\vec{B} = 0$ Maxwell - Thomson
- $\vec{\text{rot}}(\vec{E}) = -\dfrac{\partial \vec{B}(\vec{r},t)}{\partial t}$ Maxwell - Faraday
- $\vec{\text{rot}}(\vec{B}) = \mu_0\,\vec{j}(\vec{r},t) + \mu_0\varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}(\vec{r},t)}{\partial t}$ Maxwell - Ampère

- Equation de Lorentz $m_\alpha \frac{d}{dt} \frac{\vec{v}_\alpha}{\sqrt{1-v_\alpha^2/c^2}} = q_\alpha \left(\vec{E}(\vec{r}_\alpha, t) + \vec{v}_\alpha \wedge \vec{B}(\vec{r}_\alpha, t) \right)$

- $\vec{E}$ et $\vec{B}$ continues si $\rho(\vec{r},t)$ et $\vec{j}(\vec{r},t)$ le sont aussi

- Conservation de l'énergie $\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} + \mathrm{div}(\vec{\Pi}) + \vec{j}\cdot\vec{E} = 0}$

flux d'énergie à travers surface — puissance EM fournie aux charges par le champ électrique

↳ vecteur de Poynting $\vec{\Pi}(\vec{r},t) = \frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0}$

↳ densité volumique d'énergie $u = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}$

démo $\vec{j}\cdot\vec{E}$ avec Maxwell Ampère

- densité volumique de quantité de mouvement du champ EM $\vec{g} = \varepsilon_0 (\vec{E}\wedge\vec{B})$
- " " du moment angulaire $\vec{r}\wedge\vec{g}$
- Potentiel vecteur $\vec{A}$ et potentiel scalaire ϕ

$$\vec{B} = \vec{\mathrm{rot}}(\vec{A}) \qquad (\text{peut } \mathrm{div}(\vec{B}) = 0)$$
$$\vec{E} = -\vec{\mathrm{grad}}(\phi) - \partial_t \vec{A} \qquad (\vec{\mathrm{rot}}(\vec{E}) = -\partial_t \vec{B} = \vec{0})$$

- Jauge (condition sur potentiels) de Lorentz : $\mathrm{div}(\vec{A}) + \frac{1}{c^2}\partial_t \phi = 0$
- Jauge de Coulomb $\mathrm{div}\,\vec{A} = 0$
- $\varepsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$

- Symétries et invariances $\rightarrow \vec{E}$
  - Invariance : toute transformation qui laisse $\rho(\vec{r})$ invariant $\rightarrow \vec{E}$ et $V(\vec{r})$ invariant
    - $\rho(\vec{r})$ à symétrie cylindrique $\rightarrow \rho, E, V$ indep de θ
    - $\rho(\vec{r})$ à symétrie sphérique $\rightarrow \rho, E, V$ indep de φ, θ
    - $\rho(\vec{r})$ invariant par translation $\rightarrow \rho, E, V$ indep de z
  - Symétrie : - inv reflexion % Π plan de symétrie $\vec{E}(M) \in \Pi$
    - - Π plan d'antisymétrie $\vec{E}(M) \perp \Pi$

- Théorème de Gauss $\oint_S \vec{E}\cdot\vec{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$ (ne pas oublier le principe de superposition)

- Energie potentielle $\mathcal{E}_{pot} = q' V_q(\vec{r})$

- $I_0 = \iiint \rho(\vec{r},t)\, d^3r$ $\quad$ $I_1 = \iiint \rho(\vec{r},t)\, \vec{r}\, d^3r$ $\quad$ $I_2 = \iiint \rho(\vec{r},t)\, \vec{r} \otimes \vec{r}\, d^3r$ ...

  charge totale — vecteur moment dipolaire — tenseur moment quadrupolaire

  ↳ VdW

- Condensateur $Q = CV$ $\rightarrow$ $\mathcal{E}_{pot} = \frac{1}{2} C V^2$

- <u>Symétries et invariances</u> $\rightarrow$ $\vec{B}$
  - Invariance $\rightarrow$ idem que $\vec{E}$
  - Symétrie :
    - plan de symétrie Π (Π.g.) $\quad \vec{B} \perp \Pi$
    - plan d'antisymétrie Π (Π.g.) $\quad \vec{B} \in \Pi$

- <u>Théorème d'Ampère</u>

$$\boxed{\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \iint \vec{j} \cdot d\vec{S}}$$

- Moment dipolaire magnétique $\vec{M}$ = premier terme non nul du développement multipolaire

  ↳ $E_{pot} = -\vec{M} \cdot \vec{B}$

- Inductance propre L : $\underline{\Phi = LI}$

$$W = \frac{\Phi^2}{2L}$$