Master M1 de *Sciences de la Matière* 2021-2022
École Normale Supérieure et Université Claude Bernard de Lyon
Intervenants: Eric Brillaux et Léo Mangeolle

# TD Quantification des Champs Libres

**TD 10:** *Champ Scalaire (6)*

**Répétition des concepts du cours**

Rappelons le théorème de Wick sous la forme

$$T(\phi_{\text{in}}(x)\,\phi^\dagger_{\text{in}}(y)) = \,:\phi_{\text{in}}(x)\,\phi^\dagger_{\text{in}}(y):\, + \contraction{}{\phi}{_{\text{in}}(x)\,}{\phi}\phi_{\text{in}}(x)\,\phi^\dagger_{\text{in}}(y)\,, \quad \text{avec} \quad \contraction{}{\phi}{_{\text{in}}(x)\,}{\phi}\phi_{\text{in}}(x)\,\phi^\dagger_{\text{in}}(y) = G_F(x-y)\,\mathbb{1}\,,$$

Expliquez les différents termes de cette équation. Comment cette relation aide-elle de calculer les valeurs moyenne (du vide) ?

**Exercise I: Interaction Cubique**

On considère trois champs scalaires réels $\phi_i(x)$ (pour $i \in \{1,2,3\}$) avec $\phi_i(x) = \phi_i^*(x)$ et l'action classique libre

$$S_0[\phi_i] = \frac{1}{2}\int d^4x \sum_{i=1}^{3}\big((\partial_\mu\phi_i(x))(\partial^\mu\phi_i(x)) - m^2\,\phi_i(x)\,\phi_i(x)\big)\ .$$

**1)** Écrire les équations du mouvement et leur solution générale.

**2)** Donner les moments conjugués $\Pi_i(x)$ des champs, les crochets de Poisson canoniques et l'expression du Hamiltonien.

**3)** Dans la théorie quantique, les champs réels et leurs moments conjugués deviennent des opérateurs hermitiques (c.à.d. $\phi_i^\dagger(x) = \phi_i$ et $\Pi_i^\dagger(x) = \Pi_i(x)$). Donner les relations de commutation à temps egaux des champs.

**4)** En considérant un Hamiltonien quantique obtenu en remplaçant dans l'expression de la théorie classique les champs classiques par des opérateurs, montrer que l'équation de Heisenberg implique pour les champs l'équation de Klein-Gordon à masse $m$.

**5)** On écrira la solution de l'équation precedente sous la forme

$$\phi_i(x) = \int \widetilde{d^3p}\,\Big[a_i(\vec{p})\,e^{-ipx} + a_i^\dagger(\vec{p})\,e^{ipx}\Big]\,\Big|_{p^0=\omega_{\vec{p}}}\,.$$

On admettra que les opérateurs $a_i(\vec{p})$ et $a_i^\dagger(\vec{p})$ satisfont les relations de commutation d'opérateurs d'annihilation et de création

$$[a_i(\vec{p}), a_j^\dagger(\vec{p}\,')] = 2\omega(\vec{p})\,\delta_{ij}\,\delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{p}\,')\,.$$

Proposer une base de l'espace de Hilbert. Donner l'énergie et l'impulsion de chaque état si on utilise l'ordre normal pour définir les opérateurs $P^\mu$.

**6)** Donner le commutateur à temps quelconques des champs.

**7)** Relier la fonction de Green a deux points $\langle 0|T\left(\phi_i(x)\,\phi_j(y)\right)|0\rangle$ à la fonction de Green de Feynman introduite dans le cours

$$G_F(x,y) = \frac{\theta(x^0-y^0)}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3p}{2\omega_{\vec p}}\, e^{-ip(x-y)}\Big|_{p^0=\omega_{\vec p}} + \frac{\theta(y^0-x^0)}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3p}{2\omega_{\vec p}}\, e^{ip(x-y)}\Big|_{p^0=\omega_{\vec p}}\,.$$

**8)** Montrer que l'on a

$$\langle 0|a_i(\vec p)\,\phi_j(x)|0\rangle = \frac{\delta_{ij}\,e^{ipx}}{(2\pi)^{3/2}}\Bigg|_{p^0=\omega_{\vec p}}\,,$$

$$\langle 0|a_i(\vec p)\,:\phi_j(x)\,\phi_k(y):\,a_\ell^\dagger(\vec k)|0\rangle = \frac{\delta_{ij}\,\delta_{k\ell}}{(2\pi)^3}\,e^{ipx-iky} + \frac{\delta_{ik}\,\delta_{j\ell}}{(2\pi)^3}\,e^{ipy-ikx}\Bigg|_{\substack{p^0=\omega_{\vec p}\\ k^0=\omega_{\vec k}}}\,.$$

**9)** On suppose désormais qu'on ajoute à l'action classique un terme d'interaction cubique

$$S[\phi_i] = S_0[\phi_i] + S_{\text{int}}[\phi_i]\,, \qquad \text{avec} \qquad S_{\text{int}}[\phi_i] = -g\int d^4x\,\phi_1(x)\,\phi_2(x)\,\phi_3(x)\,,$$

où $g$ est une constante réelle. Le modèle obtenu est-il toujours invariant sous le groupe de Poincaré? l'énergie et l'impulsion sont-elles conservées?

**10)** On admet que, comme pour l'interaction avec une source classique, les champs tendent vers des champs libres de masse $m$ entrants lorsque $t\to-\infty$, sortant lorsque $t\to\infty$. On admet que la matrice de diffusion reliant états entrants et sortants s'écrit

$$\hat S = T\exp\left(-i\int_{-\infty}^{\infty} H_{\text{int}}(t)\right) = T\exp\left(-ig\int_{-\infty}^{\infty} d^4x\phi_{1,\text{in}}(x)\,\phi_{2,\text{in}}(x)\,\phi_{3,\text{in}}(x)\right)\,.$$

On s'intéresse à l'amplitude de transition

$${}_{\text{out}}\langle \vec p_1;\vec p_2;\vec p_3|0\rangle_{\text{in}} = {}_{\text{in}}\langle \vec p_1;\vec p_2;\vec p_3|\hat S|0\rangle_{\text{in}}\,,$$

avec l'état

$$|\vec p_1;\vec p_2;\vec p_3\rangle_{\text{out}} = a^\dagger_{1,\text{out}}(\vec p_1)\,a^\dagger_{2,\text{out}}(\vec p_2)\,a^\dagger_{3,\text{out}}(\vec p_3)|0\rangle_{\text{out}}\,.$$

On développe $\hat S$ en puissance de la constante de couplage $g$. Montrer que cette amplitude de transition s'annulle à l'ordre 0 et à l'ordre 1 en $g$. En admettant que l'énergie et l'impulsion sont conservés, peut-on conclure à tous les ordres en $g$. Sous ces mêmes conditions, pourrait-on avoir une amplitude de transition non nulle entre un état entrant à une particule et un état sortant à plusieurs particules?

**11)** On s'intéresse à l'amplitude ${}_{\text{out}}\langle \vec p_1;\vec p_2;|\vec k_1;\vec k_2;\rangle_{\text{in}}$ et l'on supposera $\vec k_1\neq\vec p_1$ et $\vec k_2\neq\vec p_2$, mais la conservation de l'impulsion impose $\vec p_1+\vec p_2=\vec k_1+\vec k_2$.

**a)** Peut-on montrer sans grand calcul que cette amplitude de transition est nulle aux ordres 0 et 1 en $g$?

**b)** À l'ordre $g^2$, utilise le théorème de Wick, pour obtenir l'expression

$$-\frac{g^2}{(2\pi)^3}\int d^2x\int d^4y\,\left(e^{i(p_1+p_2)x-i(k_1+k_2)y} + e^{i(p_1-k_2)x+i(p_2-k_1)y}\right)\,G_F(x,y)\,.$$

Proposer une representation graphique de cette expression.