Master M1 de *Sciences de la Matière* 2021-2022
École Normale Supérieure et Université Claude Bernard de Lyon
Intervenants: Eric Brillaux et Léo Mangeolle

TD Quantification des Champs Libres

TD 11: *Spineur de Dirac*

Répétition des concepts du cours

Rappelons $S^{\mu\nu} = -\frac{i}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$, où γ^μ sont les 4×4 Gamma-matrices qui satisfont la relation de Clifford $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}\,\mathbb{1}_{4\times 4}$. Montrer que $S^{\mu\nu}$ satisfait les mêmes relations de commutation que l'algèbre de Lie du groupe de Lorentz.

Exercise I: Vecteur de Pauli-Lubanski

On rappelle que le vecteur de Pauli-Lubansiki est défini par

$$W^\mu = \frac{1}{2}\,\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\,M_{\nu\rho}\,P_\sigma\,,$$

où $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ est le tenseur de Levi-Civita, complètement antisymétrique à quatre indices et $\epsilon^{0123} = 1$, et $M_{\nu\rho}$ et P_σ sont respectivement les générateurs des transformations de Lorentz et des translations. Quand on considère l'action sur un champ spineur de Dirac, ils ont l'expression suivante

$$P_\mu = -i\partial_\mu\,, \qquad \text{et} \qquad M_{\mu\nu} = -i(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu)\,\mathbb{1}_{4\times 4} + S_{\mu\nu}\,, \qquad \text{avec} \qquad S_{\mu\nu} = -\frac{i}{4}\,[\gamma_\mu, \gamma_\nu]\,.$$

1) En déduire que l'on peut écrire le vecteur de Pauli-Lubanski pour un spineur de Dirac sous la forme

$$W^\mu = -\frac{1}{4}\,\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\,\gamma_\nu\,\gamma_\rho\,\partial_\sigma\,.$$

2) Calculer l'action de l'opérateur $W^2 = \eta_{\mu\nu}\,W^\mu\,W^\nu$ sur un champ spineur $\psi(x)$ solution de l'équation de Dirac

$$(i\partial\!\!\!/ - m)\,\psi(x) = 0\,.$$

Indication: On peut utiliser la formule

$$\begin{aligned}\eta_{\mu\nu}\epsilon^{\mu\rho\sigma\tau}\,\epsilon^{\nu\kappa\lambda\zeta} = &-\eta^{\rho\kappa}\,\eta^{\sigma\lambda}\,\eta^{\tau\zeta} + \eta^{\rho\lambda}\,\eta^{\sigma\kappa}\,\eta^{\tau\zeta} - \eta^{\rho\zeta}\,\eta^{\sigma\kappa}\,\eta^{\tau\lambda} \\ &+ \eta^{\rho\zeta}\,\eta^{\sigma\lambda}\,\eta^{\tau\kappa} - \eta^{\rho\lambda}\,\eta^{\sigma\zeta}\,\eta^{\tau\kappa} + \eta^{\rho\kappa}\,\eta^{\sigma\zeta}\,\eta^{\tau\lambda}\,.\end{aligned}$$

Exercise II: Conjugaison de Charge

La matrice de conjugaison de charge dans l'espace des spineurs satisfait

$$C\,\gamma^\mu\,C^{-1} = -(\gamma^\mu)^T\,, \qquad \text{et} \qquad C^T = C^{-1} = C^\dagger = -C\,.$$

1) Montrer que l'on a

$$C\, S^{\mu\nu}\, C^{-1} = -(S^{\mu\nu})^T\,, \qquad \text{pour} \qquad S^{\mu\nu} = -\frac{i}{4}\,[\gamma^\mu, \gamma^\nu]\,.$$

En déduire que, pour une transformation infinitésimale

$$C \cdot S(\Lambda) \cdot C^{-1} = (S(\Lambda)^{-1})^T\,.$$

On admettra que cette relation reste vraie pour une transformation finie.

2) Soit χ un spineur à quatre composantes, et $\bar{\chi} = \chi^\dagger \cdot \gamma^0$. On définit la transformation de conjugaison de charge dans l'espace des spineurs par

$$\chi^C = C \cdot (\bar{\chi})^T\,.$$

Montrer que l'on a

$$\begin{aligned}
&(\overline{\gamma^\mu \cdot \chi})^T = (\gamma^\mu)^T \cdot \bar{\chi}^T && \text{qu'implique} \quad (\gamma^\mu \cdot \chi)^C = -\gamma^\mu \cdot \chi^C\,, && (1)\\
&(\overline{S(\Lambda) \cdot \chi})^T = (S(\Lambda)^{-1})^T \cdot (\bar{\chi})^T && \text{qu'implique} \quad (S(\Lambda) \cdot \chi)^C = S(\Lambda) \cdot \chi^C\,, && (2)\\
&(\overline{\chi^C})^T = C^T \cdot \chi\,, && \text{qu'implique} \quad (\chi^C)^C = \chi\,. && (3)
\end{aligned}$$

3) Déduire de (1) que si $\psi(x)$ est solution de l'équation de Dirac, alors son conjugué de charge $\psi^C(x)$ est lui aussi solution de l'équation de Dirac.

4) On rappelle que les solutions à énergie positive et négative de l'équation de Dirac sont déterminées par les spineurs $u^i(\vec{p})$ et $v^i(\vec{p})$ (pour $i = 1, 2$), eux-mêmes reliés à leur valeur à impulsion nulle par

$$\begin{aligned}
u^i(\vec{p}) &= S(p) \cdot u^i(\vec{0})\,, && \text{avec} \quad p^0 = \omega_{\vec{p}} = \sqrt{\vec{p}^{\,2} + m^2}\,,\\
v^i(\vec{p}) &= S(p) \cdot v^i(\vec{0})\,, && \text{avec} \quad m\, S(p) \cdot \gamma^0 = \not{p} \cdot S(p)\,.
\end{aligned}$$

$S(p)$ est la matrice dans l'espace des spineurs associée au boost $L(p)$ qui fait passer de la quadri-impulsion au repos $(m, \vec{0})$ à l'impulsion p. On rappelle que les solutions à impulsion nulle sont données par

$$u^1(\vec{0}) = \begin{bmatrix} 1\\0\\0\\0 \end{bmatrix}, \quad u^2(\vec{0}) = \begin{bmatrix} 0\\1\\0\\0 \end{bmatrix}, \quad v^1(\vec{0}) = \begin{bmatrix} 0\\0\\1\\0 \end{bmatrix}, \quad v^2(\vec{0}) = \begin{bmatrix} 0\\0\\0\\1 \end{bmatrix}.$$

En utilisant l'équation (2) et la forme explicite de la matrice de conjugaison de charge, $C = i\gamma^0 \cdot \gamma^2$, déterminer les spineurs conjugués de charge $(u^i(\vec{p})^C)$ et $(v^i(\vec{p})^C)$.

Exercise III:

On rappelle que le développement de l'opérateur spineur de Dirac sur les solutions de l'équation de Dirac s'écrit

$$\psi_\alpha(x) = 2m \int \widetilde{d^3p} \sum_{i=1}^{2} \Big(b_i(\vec{p})\, u^i_\alpha(\vec{p})\, e^{-ipx} + d^\dagger_i(\vec{p})\, v^i_\alpha(\vec{p})\, e^{ipx} \Big)\Big|_{p^0=\omega_{\vec{p}}}\,, \quad \text{avec} \quad \omega_{\vec{p}} = \sqrt{\vec{p}^{\,2} + m^2}\,,$$

et que les opérateurs de création et d'annihilation satisfont les relations d'anticommutation

$$\{b_i(\vec{p}), b_j^\dagger(\vec{p}\,')\} = \{d_i(\vec{p}), d_j^\dagger(\vec{p}\,')\} = \frac{\omega_{\vec{p}}}{m}\,\delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{p}\,')\,\mathbb{1}\,.$$

On admettra de plus que l'on peut construire les opérateurs de projection

$$\sum_{i=1}^{2} u_\alpha^i(\vec{p})\,\bar{u}_\beta^i(\vec{p}) = \frac{1}{2m}\,(\not{p} + m\,\mathbb{1}_{4\times 4})_{\alpha\beta}\,, \qquad \text{et} \qquad \sum_{i=1}^{2} v_\alpha^i(\vec{p})\,\bar{v}_\beta^i(\vec{p}) = \frac{1}{2m}\,(\not{p} - m\,\mathbb{1}_{4\times 4})_{\alpha\beta}\,.$$

1) Calculer l'anticommutateur à temps quelconques

$$\Delta_{\alpha\beta}(x,y) = \{\psi_\alpha(x), \bar{\psi}_\beta(y)\}\,.$$

2) Calculer l'action de l'opérateur de Dirac sur l'anticommutateur à temps quelconques

$$\left(i\gamma_{\alpha\beta}\,\frac{\partial}{\partial x^\mu} - m\,\delta_{\alpha\beta}\right)\,\Delta_{\beta\gamma}(x,y)\,.$$

3) Que vaut $\Delta_{\alpha\beta}(x,y)\big|_{x^0=y^0}$?

4) Soit Λ la matrice d'une transformation de Lorentz. Montrer que l'on a

$$\Delta_{\alpha\beta}(\Lambda\cdot x, \Lambda\cdot y) = S(\Lambda)_{\alpha\gamma}\,\Delta_{\gamma\delta}(x,y)\,S(\Lambda)^{-1}_{\delta\beta}\,.$$

5) Calculer $\Delta_{\alpha\beta}(x,y)$ si les deux points sont séparés par un intervalle de genre espace, c.à.d. $(x-y)^2 < 0$.