Master M1 de *Sciences de la Matière* 2021-2022
École Normale Supérieure et Université Claude Bernard de Lyon
Intervenants: Eric Brillaux et Léo Mangeolle

TD Quantification des Champs Libres

TD 1: *Notions de Base*

Répétition des concepts du cours

1) Soit φ_r (avec $r = 1, \ldots, n$) une collection de n champs classiques avec la densité lagrangienne $\mathcal{L}(\varphi_r, \partial_\mu \varphi_r)$. Montrer les équations d'Euler Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_r} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi_r)} \right) = 0\,, \qquad \forall r = 1, \ldots, n\,.$$

2) On rappelle la presentation concrete des générateurs de translation et de transformations de Lorentz

$$P_\mu = -i\partial_\mu\,, \qquad M_{\mu\nu} = -i(x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu)\,.$$

Verifier qu'elles satisfont l'algèbre de Poincaré.

Exercise I:
Soit $\phi(x)$ un champ réel dépendant de $x \in \mathbb{R}^d$ (avec composants réelles $x^{i=1,\ldots,d}$) et $\Gamma[\phi]$ une fonctionnelle quelconque du champ. La dérivée fonctionnelle de Γ par rapport à $\phi(x)$ est obtenue en considérant une variation $\phi \to \phi + \delta\phi$ à support compact, et en écrivant la variation de la fonctionnelle sous la forme

$$\Gamma[\phi + \delta\phi] - \Gamma[\phi] = \int_{\mathbb{R}^d} d^d x\, \delta\phi(x)\, \frac{\delta \Gamma}{\delta \phi(x)} + \mathcal{O}(\delta\phi^2)\,.$$

Calculer la dérivée fonctionnelle $\frac{\delta\Gamma}{\delta\phi(x)}$ pour les fonctionnelles suivantes

1) $\Gamma[\phi] = \int d^d x\, \frac{1}{2}\, (\phi(x))^2$

2) $\Gamma[\phi] = \int d^d x\, \frac{1}{2}\, \eta^{ij}\, (\partial_i \phi(x))(\partial_j \phi(x))$ avec $\eta^{ij} = \eta^{ji}$ (independent de ϕ) et $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$

3) $\Gamma[\phi] = \phi(z)$ avec $z \in \mathbb{R}^d$ fix.

4) $\Gamma[\phi] = \int d^d x \int d^d y\, \frac{1}{2}\, \phi(x)\, G(x,y)\, \phi(y)$ avec $G(x,y) = G(y,x)$ une fonction $G : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ (independent de ϕ).

Exercise II:
On considére une systéme quantique avec des opérateurs q_i et p_i (pour $i = 1, \ldots, n$) sur une

espace de Hilbert $\mathcal{H}$. Le théorème de Stone-von Neumann assure que pour n fini, il n'y a qu'une représentation irréductible des relations de commutation canoniques $[q_i, p_j] = i\,\delta_{ij}\,\mathbb{1}$ avec $\mathbb{1}$ l'opérateur identité sur $\mathcal{H}$. Un autre point de vue est que si on trouve un autre ensemble d'opérateurs Q_i et P_i, qui satisfont les mêmes relations de commutation $[Q_i, P_j] = i\,\delta_{ij}\,\mathbb{1}$, il existe une transformation unitaire U de l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$ qui relie (q_i, p_j) et (Q_i, P_j)

$$Q_i = U\,q_i\,U^{-1}\,, \qquad \text{et} \qquad P_i = U\,p_i\,U^{-1}\,, \qquad \forall i = 1, \ldots, n\,.$$

1) On considère d'abord le case $n = 1$ et introduit les opérateurs d'annihilation et de creation

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(q_1 + ip_1)\,, \qquad \text{et} \qquad a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(q_1 - ip_1)\,.$$

a) Montrer que $[a, a^\dagger] = \mathbb{1}$

b) On définit sur ce système la transformation linéaire (pour $\theta \in \mathbb{R}$)

$$a(\theta) = \cosh(\theta)\,a + \sinh(\theta)\,a^\dagger\,, \qquad \text{et} \qquad a^\dagger(\theta) = \sinh(\theta)\,a + \cosh(\theta)\,a^\dagger\,. \tag{1}$$

Quelle est l'algèbre des opérateurs $a(\theta)$ et $a^\dagger(\theta)$?

c) On définit la transformation

$$U(\theta) = \exp\left(\frac{\theta}{2}(a^2 - (a^\dagger)^2)\right)\,, \qquad \text{avec} \qquad \theta \in \mathbb{R}\,.$$

Montrer que $U(\theta)$ est une transformation unitaire.

d) Soit

$$b(\theta) = U(\theta)\,a\,U^{-1}(\theta)\,, \qquad \text{et} \qquad b^\dagger(\theta) = U(\theta)\,a^\dagger\,U^{-1}(\theta)\,.$$

Montrer que les opérateurs $b(\theta)$ et $b^\dagger(\theta)$ satisfont les équations différentielles

$$\frac{d}{d\theta}\,b(\theta) = b^\dagger(\theta)\,, \qquad \text{et} \qquad \frac{d}{d\theta}\,b^\dagger(\theta) = b(\theta)\,.$$

En intégrant ces équations, montrer que la transformation unitaire $U(\theta)$ réalise la transformation (1), c.à.d.

$$a(\theta) = U(\theta)\,a\,U^{-1}(\theta)\,, \qquad \text{et} \qquad a^\dagger(\theta) = U(\theta)\,a^\dagger\,U^{-1}(\theta)\,.$$

2) On note $|0\rangle$ le vide des opérateurs $(a, a^\dagger)$ (c.à.d. $a|0\rangle = 0$) et $|\theta\rangle = U(\theta)|0\rangle$. On cherche a calculer $\langle 0|\theta\rangle$.

a) Montrer que $|\theta\rangle$ est le vide des opérateurs $(a(\theta), a^\dagger(\theta))$.

b) Montrer l'équation différentielle

$$\frac{d}{d\theta}\,\langle 0|\theta\rangle = -\frac{1}{2}\,\langle 0|U(\theta)\,(a^\dagger)^2|0\rangle = \frac{1}{2}\,\langle 0|a^2\,U(\theta)|0\rangle\,.$$

c) En utilisant le résultat precedent montrer

$$\frac{d}{d\theta}\,\langle 0|\theta\rangle = -\frac{1}{2}\,\frac{\sinh(\theta)}{\cosh(\theta)}\,\langle 0|\theta\rangle\,.$$

d) En déduire

$$\langle 0|\theta\rangle = \frac{1}{\sqrt{\cosh(\theta)}}\,.$$

3) On a maintenant un ensemble de N oscillateurs $(a_i, a_i^\dagger)$. On rappelle que l'espace de Hilbert $\mathcal{H}^N$ est le produit tensoriel des N espaces de Hilbert associés à chaque oscillateur. En particulier, le vide $|0\rangle^N$ es le produit tensoriel des N vecteurs vide associés à chaque oscillateur. On suppose que l'on fait la même transformation sur chacun des oscillateurs

$$a_i(\theta) = \cosh(\theta)\, a_i + \sinh(\theta)\, a_i^\dagger\,, \qquad \text{et} \qquad a_i^\dagger(\theta) = \sinh(\theta)\, a_i + \cosh(\theta)\, a_i^\dagger\,,$$

et on note $|\theta\rangle^N$ le vide des N oscillateurs $(a_i(\theta), a_i^\dagger(\theta))$.

a) Que vaut le produit scalaire ${}^N\langle 0|\theta\rangle^N$? Que vaut sa limite lorsque N tends vers l'infini?

b) Toujours dans la limite $N \to \infty$, soit $|\psi\rangle^\infty$ un état dont le nombre d'occupation, c.à.d. la valeur propre de l'opérateur $\mathcal{N} = \sum_{i=1}^{\infty} a_i^\dagger\, a_i$, est fini. Que vaut le produit scalaire ${}^\infty\langle\psi|\theta\rangle^\infty$? Interpreter le résultat.