Master M1 de *Sciences de la Matière* 2021-2022
École Normale Supérieure et Université Claude Bernard de Lyon
Intervenants: Eric Brillaux et Léo Mangeolle

TD Quantification des Champs Libres

TD 2: *Groupe de Lorentz (1)*

Répétition des concepts du cours

1) Soit $\mathcal{T}_{\Lambda,a}$ une element du groupe de Poincaré, qui permet le développement au premier ordre

$$\mathcal{T}_{\Lambda,a} = \mathbb{1} + i\left(-a^\mu P_\mu + \frac{1}{2}\,\omega^{\mu\nu} M_{\mu\nu}\right), \qquad \text{avec} \qquad \mathbb{1} = \mathcal{T}_{\mathbb{1}_{4\times4},0}\,.$$

Déterminer l'algèbre des générateurs.

2) On rappelle le vecteur de Pauli-Lubanski $W_\mu = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\tau} M^{\nu\rho} P^\tau$. En utilisant l'algèbre de Poincaré, calculer

$$[W_\mu, P_\nu]\,, \qquad\qquad [W_\mu, M_{\rho\sigma}]\,,$$

et verifier que $W^2 = W_\mu W^\mu$ est une opérateur de Casimir du groupe de Poincaré.

3) Tracer les branches des hyperboles de type $M^2 = (p^0)^2 - (p^1)^2$ et rappeler que deux points sont reliés par transformations de Lorentz (en 2 dimensions).

Exercise I: Morphisme entre $SL(2,\mathbb{C})$ et le groupe de Lorentz
Une base de l'espace vectoriel des matrices hermitiques 2×2 est donnée par les matrices

$$\sigma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Soit $a = (a^0\,, a^1\,, a^2\,, a^3)^T \in \mathbb{R}^4$. On lui associe la matrice hermitique

$$m(a) = \eta_{\mu\nu}\, a^\mu\, \sigma^\mu = a^\mu\, \sigma_\mu = a^0\, \mathbb{1}_{2\times2} - \vec{a}\cdot\vec{\sigma}\,.$$

1) On rappelle que les matrices de Pauli satisfont les identités

$$\{\sigma^i, \sigma^j\} = \sigma^i\,\sigma^j + \sigma^j\,\sigma^i = 2\,\delta^{ij}\,\mathbb{1}_{2\times2}\,, \qquad \forall i,j = 1,2,3\,,$$
$$-(\sigma^i)^T = \epsilon\cdot\sigma^i\cdot\epsilon^{-1}\,, \qquad \text{avec} \qquad \epsilon = i\sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On définit

$$\widetilde{m}(a) = \epsilon\cdot(m(a))^T\cdot\epsilon^{-1}\,.$$

Montrer que l'on a

$$\widetilde{m}(a) = a^0\,\mathbb{1}_{2\times2} + \vec{a}\cdot\vec{\sigma}\,, \qquad \text{et} \qquad \widetilde{m}(a)\cdot m(a) = a^\mu a_\mu\,\mathbb{1}_{2\times2}\,.$$

2) On considère le groupe $SL(2,\mathbb{C})$: soit

$$M_{n\times n}(K) = \{\text{matrices inversibles } n\times n \text{ avec coeffs. dans } \mathbb{C}\}$$

on définit

$$SL(n,\mathbb{C}) = \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{C}) | \det A = 1\} \ .$$

Donc $SL(2,\mathbb{C})$ est le groupe des matrices complexes 2×2 de déterminant 1 (avec comme loi de composition le simple produit des matrices). Soit $g \in SL(2,\mathbb{C})$, montrer que

$$g^{-1} = \epsilon \cdot g^T \cdot \epsilon^{-1} \ .$$

3) Le groupe $SL(2,\mathbb{C})$ agit sur les matrices hermitiques 2×2 par

$$g \in SL(2,\mathbb{C}) : \qquad m(a) \longrightarrow m(a_g) = g \cdot m(a) \ \cdot g^\dagger \ .$$

a) Vérifier que l'on a $\widetilde{m}(a_g) = (g^\dagger)^{-1} \cdot \widetilde{m}(a) \cdot g^{-1}$.

b) En déduire que la transformation qui fait passer de a à a_g conserve le carré lorentzien

$$(a_g)^\mu \, (a_g)_\mu = a^\mu a_\mu \ .$$

c) Le résultat precedent a pour conséquence que le quadrivecteur a_g est relié au quadrivecteur a par une transformation de Lorentz qu'on notera $\Lambda(g)$. On admettera que ce dernier appartient a $SO^\uparrow(1,3)$, *c.à.d.* $\det(\Lambda(g)) = 1$ et ${\Lambda(g)^0}_0 \geq 1$. On a donc construit une application

$$\begin{aligned} \Lambda : \qquad SL(2,\mathbb{C}) &\longrightarrow SO^\uparrow(1,3) \\ g &\longmapsto \Lambda(g) \ . \end{aligned}$$

Montrer qu'il s'agit d'une morphisme de groupe, *c.à.d.* qu'il respecte le produit de groupe $SL(2,\mathbb{C})$

$$\Lambda(g_1 * g_2) = \Lambda(g_1) \cdot \Lambda(g_2) \ ,$$

ou $*$ est le produit de $SL(2,\mathbb{C})$ et $\cdot$ est le produit matriciel.

4) Soit $g \in SL(2,\mathbb{C})$. Verifier d'abord que $\Lambda(-g) = \Lambda(g)$. En déduire que l'application $g \to \Lambda(g)$ n'est pas une bijection de $SL(2,\mathbb{C})$ dans $SO^\uparrow(1,3)$.

5) On se restreint dans cette question à des transformations qui appartiennent au sous-groupe $SU(2)$ de $SL(2,\mathbb{C})$, *c.à.d.* que l'on considère des matrices g qui sont de déterminant $+1$, mais sont aussi unitaires $g^\dagger = g^{-1}$. Montrer que l'on a dans ce cas $a_g^0 = a^0$. Quel est le sous-groupe du groupe de Lorentz auquel appartient $\Lambda(g)$?

6) On considère la transformation de $SU(2)$

$$g_\alpha = \begin{pmatrix} e^{\frac{i\alpha}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{i\alpha}{2}} \end{pmatrix} , \qquad \text{avec} \qquad \alpha \in \mathbb{R} \ .$$

Montrer que

$$\Lambda(g_\alpha) = \Lambda_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

7) La transformation Λ_α est une rotation d'un angle α autour de l'axe 3, on peut donc se limiter pour les valeurs de α à l'intervalle $[0, 2\pi[$. Essayons d'inverser l'application qu'on a défini entre $SL(2,\mathbb{C})$ et $SO^\uparrow(1,3)$. On considère l'application d'une partie de $SO^\uparrow(1,3)$ vers une partie de $SL(2,\mathbb{C})$ définie par $g(\Lambda_g) = g_\alpha$. Montrer

a) $\lim_{\alpha\to 2\pi} g(\Lambda_\alpha) = -1\!\!1_{2\times 2}$.

b) $g(\Lambda_\alpha) * g(\Lambda_b) = \begin{cases} g(\Lambda_\alpha \cdot \Lambda_\beta) & \text{si} \quad \alpha+\beta < 2\pi\,, \\ -g(\Lambda_\alpha \cdot \Lambda_\beta) & \text{si} \quad \alpha+\beta \geq 2\pi\,. \end{cases}$

8) On considère les quatre matrices 4×4 appelées matrices de Dirac

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1\!\!1_{2\times 2} \\ 1\!\!1_{2\times 2} & 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{et} \qquad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \forall i = 1,2,3\,.$$

a) Vérifier qu'elles satisfont les relations d'anticommutation

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}\, 1\!\!1_{4\times 4}\,,$$

qu'est aussi appelé l'algèbre de Clifford.

Remarque: Il y a plusieurs façons d'écrire des matrices qui satisfont l'algèbre de Clifford. La représentation considérée ici est appelée représentation chirale des matrices de Dirac.

b) Montrer qu'on peut écrire une combinaison linéaire des matrices γ^μ sous la forme

$$a_\mu\, \gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & m(a) \\ \widetilde{m}(a) & 0 \end{pmatrix}.$$

c) On introduit la matrice diagonale par bloc

$$S(g) = \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & (g^\dagger)^{-1} \end{pmatrix}, \qquad \text{avec} \qquad g \in SL(2,\mathbb{C})\,.$$

Montrer que l'on a

$$S(g_1 * g_2) = S(g_1)\cdot S(g_2)\,, \qquad \text{et} \qquad \gamma^0 \cdot (S(g))^\dagger \cdot \gamma^0 = S(g)^{-1}\,.$$

d) Enfin, vérifier la relation

$$S(g)\cdot a_\mu \gamma^\mu \cdot S(g)^{-1} = (a_g)_\mu\, \gamma^\mu\,,$$

que l'on peut encore écrire

$$S(g)\cdot \gamma^\mu \cdot S(g)^{-1} = (\Lambda(g)^{-1})^\mu{}_\nu\, \gamma^\nu\,.$$