Master M1 de *Sciences de la Matière* 2021-2022

École Normale Supérieure et Université Claude Bernard de Lyon

Intervenants: Eric Brillaux et Léo Mangeolle

TD Quantification des Champs Libres

TD 3: *Groupe de Lorentz (2)*

Répétition des concepts du cours

Rappeler la forme d'une transformation de Lorentz en 4 dimensions qui correspond à *(i)* un boost de la vitesse β le long de la direction $(0,1,0,0)$; *(ii)* une rotation par l'angle θ autour de l'axe $(0,0,0,1)$.

Exercise I: Rotation de Wigner

On discute la rotation de Wigner $W(\Lambda,\wp)$ pour une choix particulier de Λ et $\wp$. Pour simplifier le calcul on se place dans 3 dimensions d'espace-temps et on considère

$$\wp = \begin{pmatrix} E \\ p \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{avec} \qquad E^2 - p^2 = m^2 ,$$

ou $p \in \mathbb{R}$ et $E, m \in \mathbb{R}_+$, et

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \cosh(\alpha) & 0 & \sinh(\alpha) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sinh(\alpha) & 0 & \cosh(\alpha) \end{pmatrix}, \qquad \text{avec} \qquad \alpha \in \mathbb{R} .$$

1) Verifier que Λ satisfait

$$\Lambda^T \cdot \eta \cdot \Lambda = \eta , \qquad \text{avec} \qquad \eta = \mathrm{diag}(1,-1,-1) .$$

Ce Λ peut être interprété comme une Lorentz boost dans une direction spatial. Quelle est la vitesse de cette boost?

2) Determiner les boosts de Lorentz $L(\wp)$ et $L(\Lambda \cdot \wp)$ qui, à partir de $\wp_R = (m,0,0)^T$, conduisent à $\wp$ et $\Lambda \cdot \wp$ respectivement.

3) On rappelle la définition

$$W(\Lambda,p) = L(\Lambda \cdot p)^{-1}\, \Lambda\, L(p) .$$

- **a)** Calculer la deuxième ligne $(W(\Lambda,p)^1{}_0\, , W(\Lambda,p)^1{}_1\, , W(\Lambda,p)^1{}_2)$ et verifier que $W(\Lambda,p)^1{}_0 = 0$.
- **b)** Exprimer $W(\Lambda,p)^1{}_1$ comme fonction de (E,m,α) et calculer sa variation en E de m jusqu'à ∞.
- **c)** Verifier que $(W(\Lambda,p)^1{}_1)^2 + (W(\Lambda,p)^1{}_2) = 1$.
- **d)** Ces résultats sont-ils compatible avec le fait que $W(\Lambda,p)$ est une rotation? Si oui, quelle est l'angle de la rotation?

Exercise II: Groupe de Rotation et Charges Conservées

On considère une particule non relativiste de masse $m > 0$ dans 3 dimensions, dont la dynamique est décrite par le lagrangien

$$\mathcal{L}(\vec{x}, \dot{\vec{x}}) = \frac{1}{2}\, m\, \dot{\vec{x}}^{\,2} - V(\vec{x}^{\,2})\,, \tag{1}$$

avec V une potentiel qui ne depends que de $\vec{x}^{\,2}$. Soit R une rotation independente du temps t et soit $\vec{x}_R = R \cdot \vec{x}$.

1) Montrer que les rotations sont symétries de ce modèle, c.à.d. $\mathcal{L}(\vec{x}_R\,, \dot{\vec{x}}_R) = \mathcal{L}(\vec{x}, \dot{\vec{x}})$.

2) Soit $\delta\vec{x}$ une variation infinitesimale (arbitraire) de $\vec{x}$. Montrer que

$$\delta\mathcal{L}(\vec{x}\,, \dot{\vec{x}}) = \mathcal{L}(\vec{x} + \delta\vec{x}, \dot{\vec{x}} + \delta\dot{\vec{x}}) - \mathcal{L}(\vec{x}, \dot{\vec{x}})\,,$$

s'écrit comme

$$\delta\mathcal{L}(\vec{x}, \dot{\vec{x}}) = \sum_{i=1}^{3} \delta x^i \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}^i} \right) + \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{3} \delta x^i\, \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}^i} \right).$$

3) On considère une rotation R infinitésimale (presque à l'identité):

$$\delta\vec{x} = \vec{x}_R - \vec{x} = \vec{\zeta} \wedge \vec{x}\,,$$

ou pour les composantes $(\delta\vec{x})^i$

$$\delta x^i = x_R^i - x^i = \sum_{j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk}\zeta^j x^k\,, \tag{2}$$

ou $\vec{\zeta}$ (independent du temps) est un paramètre infinitésimal. Montrer que $\vec{L} = \vec{x} \wedge (m\dot{\vec{x}}) = \vec{x} \wedge \vec{p}$ est conservée le long de la trajectoire de particule.

4) Une autre façon de trouver les charges conservées est de considerer une rotation infinitésimale dependent du temps $\vec{\zeta}(t)$, qui est zero pour de temps initial t_i et finale t_f. Montrer que sous une telle transformation

$$\delta S(t_i, f_f) = \int_{t_i}^{t_f} dt\, \delta\mathcal{L}(\vec{x}, \dot{\vec{x}})\,,$$

s'écrite

$$\delta S(t_i, f_f) = -\int_{t_i}^{t_f} dt\, \dot{\vec{\zeta}}(t) \cdot \vec{L}(t)\,.$$

En déduire que $\vec{L}$ est conservée le long du trajet de la particule.

5) Les coordonnées x^i et les impulsions p^i satisfont les crochets de Poisson $\{x^i, p^j\} = \delta_{ij}$. Montrer que la variation des coordonnées sous une transformation infinitésimale de rotation (independent du temps, (2)) s'écrite

$$\delta x^i = -\{\vec{\zeta} \cdot \vec{L}, x^i\}\,.$$

6) Montrer que les composantes de $\vec{L}$ satisfont les crochets de Poisson

$$\{L^i, L^j\} = \sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk} L^k\,.$$