Master M1 de *Sciences de la Matière* 2021-2022

École Normale Supérieure et Université Claude Bernard de Lyon
Intervenants: Eric Brillaux et Léo Mangeolle

TD Quantification des Champs Libres

TD 4: *Créateurs et Annihilateurs*

Répétition des concepts du cours

Soit un système de mécanique analytique dont la dynamique est décrite par le lagrangien $\mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i)$ qui dépend des coordonnées généralisées $q_{i=1,\ldots,n}(t)$ et des vitesses généralisées $q_{i=1,\ldots,n}(t)$ (mais qui ne dépend pas explicitement du temps t).

(i) Rappelez les équations du mouvement (équations d'Euler Lagrange).

(ii) Définissez les moments conjugués $p_{i=1,\ldots,n}$ et rappelez l'hamiltonien du système.

(iii) Dérivez les équations de Hamilton

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}\,, \qquad \text{et} \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}\,.$$

(iv) Rappelez la définition des crochets de Poisson .

Exercise I: Changement de référentiel galiléen
On considère une particule libre non relativiste de masse m en 3 dimensions, dont la fonction d'onde satisfait l'équation de Schrödinger

$$i\,\frac{\partial}{\partial t}\,\psi(\vec{x}, t) = -\frac{1}{2m}\,\Delta\,\psi(\vec{x}, t)\,,$$

(on rappelle que on utilise des unités avec $\hbar = 1 = c$). On considère un changement de référentiel galiléen de vitesse $\vec{v}$. On donne les lois de transformations des coordonnées et de la fonction d'onde

$$t' = t\,, \qquad \vec{x}\,' = \vec{x} - \vec{v}t\,, \qquad \psi'(\vec{x}\,', t') = e^{i\left(\frac{1}{2}m\vec{v}^{\,2}t - m\vec{v}\cdot\vec{x}\right)}\,\psi(\vec{x}, t)\,.$$

1) Montrer que l'on a

$$\frac{\partial}{\partial t'} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}\cdot\vec{\nabla}\,, \qquad \vec{\nabla}\,' = \vec{\nabla}\,, \qquad \text{avec} \qquad (\vec{\nabla}\,')_i = \frac{\partial}{\partial x'^i}\,.$$

2) Montrer que $\psi'(\vec{x}\,', t')$ est aussi solution de l'équation de Schrödinger

$$i\,\frac{\partial}{\partial t'}\,\psi'(\vec{x}\,', t') = -\frac{1}{2m}\,\Delta'\,\psi'(\vec{x}\,', t')\,, \qquad \text{avec} \qquad \Delta' = \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x'^i}\frac{\partial}{\partial x'^i} = \vec{\nabla}\,'\cdot\vec{\nabla}\,'\,.$$

Exercise II: Oscillateurs complexes

On considère un ensemble de N oscillateurs complexes (Q_i, Q_i^*) dont la dynamique est déterminée par le Lagrangien

$$\mathcal{L}(Q_i\,, Q_i^*\,, \dot{Q}_i\,, \dot{Q}_i^*) = \sum_{i=1}^{N} \left(\dot{Q}_i^*\, \dot{Q}_i - \omega_i^2\, Q_i^*\, Q_i \right)\,, \qquad \text{avec} \qquad \omega_i \in \mathbb{R}_+ \;\; \forall i = 1, \ldots, N\,.$$

1) Montrer qu'une solution quelconque des équations du mouvement peuvent s'écrire

$$\begin{aligned} Q_i(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\omega_i}}\, \left(a_i\, e^{-i\omega_i t} + b_i^*\, e^{i\omega_i t}\right)\,, \\ Q_i^*(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\omega_i}}\, \left(b_i\, e^{-i\omega_i t} + a_i^*\, e^{i\omega_i t}\right)\,, \qquad \forall i = 1, \ldots, N\,. \end{aligned} \tag{1}$$

2) On note (Π_i, Π_i^*) les variables canoniquement conjuguées respectives de (Q_i, Q_i^*)

$$\Pi_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}_i}\,, \qquad \text{et} \qquad \Pi_i^* = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}_i^*}\,, \qquad \forall\, i = 1, \ldots, N\,.$$

Donner l'expression du Hamiltonien en fonction des variables $(Q_i\,, Q_i^*\,, \Pi_i\,, \Pi_i^*)$ de l'espace de phases. Pour une solution (1) des équations du mouvement, écrire l'expression de $(\Pi_i(t), \Pi_i^*(t))$.

3) Pour une solution (1) des équations du mouvement, exprimer le Hamiltonien en fonction des variables complexes (a_i, b_i) et leurs complexes conjuguées.

4) Pour une solution (1) des équations du mouvement, exprimer les variables complexes (a_i, b_i) (et leurs complexes conjuguées) en fonction de (Q_i, Π_i) (et des complexes conjuguées).

5) À partir des expressions trouvées dans la question précédente, montrer que les variables complexes (a_i, b_i) et leurs complexes conjuguées satisfont les crochets de Poisson

$$\{a_i, a_j^*\} = -i\delta_{ij}\,, \qquad \{b_i, b_j^*\} = -i\delta_{ij}\,, \qquad \{a_i, b_j\} = \{a_i, b_j^*\} = 0\,.$$

6) À partir des expressions de la question précédente, calculer le crochet de Poisson

$$\Delta_{ij}(t, t') = \{Q_i(t), Q_j^*(t')\}\,.$$

Verifier que la fonction $\Delta_{ij}(t, t')$ satisfait l'équation différentielle

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_i^2 \right) \Delta_{ij}(t, t') = 0\,, \qquad \forall i, j = 1, \ldots, N\,.$$

et les conditions aux limite

$$\Delta_{ij}(t, t')\big|_{t=t'} = 0\,, \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{\partial}{\partial t}\, \Delta_{ij}(t, t') \right)\bigg|_{t=t'} = -\delta_{ij}\,.$$

7) On considère la distribution

$$G_{ij}(t,t') = \theta(t-t')\,\Delta_{ij}(t,t')\,.$$

Montrer successivement les équations

$$\frac{\partial}{\partial t}\,G_{ij}(t,t') = -\delta_{ij}\,\theta(t-t')\,\cos(\omega_i(t-t'))\,,$$
$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_i^2\right)\,G_{ij}(t,t') = -\delta(t-t')\,\delta_{ij}\,.$$

8) Montrer que le modèle étudié dans cet exercice est invariant sous les transformations de phase

$$Q_i \longrightarrow e^{i\alpha}\,Q_i\,, \qquad \text{et} \qquad Q_i^* \longrightarrow e^{-i\alpha}\,Q_i^*\,, \qquad \text{avec} \qquad \alpha \in \mathbb{R}\,. \tag{2}$$

9) Pour une solution (1) des équations du mouvement, comment se transforment les coefficients (a_i, b_i) sous les transformations (2)?

10) Quelle est la variation des (Q_i, Q_i^*) sous une transformation de phase infinitésimale? Montrer que la charge de Noether associée à la symétrie (2) s'écrit

$$\mathcal{Q} = i\sum_{i=1}^{N}\left(Q_i^*\,\dot{Q}_i - \dot{Q}_i^*\,Q_i\right)\,.$$

Donner l'expression de $\mathcal{Q}$ comme fonction dans l'espace des phases, d'abord en terms des coordonnées $(Q_i\,, Q_i^*\,, \Pi_i\,, \Pi_i^*)$, puis en termes des coordonnées $(a_i,\, a_i^*\,, b_i\,, b_i^*)$.

11) Montrer que la variation infinitésimale des (Q_i, Q_i^*) peut s'écrire

$$\delta Q_i = \{\alpha\,\mathcal{Q}, Q_i\}\,, \qquad \delta Q_i^* = \{\alpha\,\mathcal{Q}, Q_i^*\}\,.$$

12) On définit l'opération de 'conjugaison de charge' C agissant sur une fonction quelconque F sur l'espace des phases par

$$C: \qquad F \longrightarrow F^C\,, \qquad \text{avec} \qquad F^C(Q_i\,, Q_i^*\,, \Pi_i\,, \Pi_i^*) = F(Q_i^*\,, Q_i\,, \Pi_i^*\,, \Pi_i)\,.$$

a) Montrer que C est une transformation canonique.

b) Calculer $\mathcal{H}^C$ et $\mathcal{Q}^C$.

c) Quelle est l'action de la conjugaison de charge sur les variables (a_i, b_i)?