Master M1 de *Sciences de la Matière* 2021-2022
École Normale Supérieure et Université Claude Bernard de Lyon
Intervenants: Eric Brillaux et Léo Mangeolle

TD Quantification des Champs Libres

TD 5: *Champ Scalaire (1)*

Répétition des concepts du cours

On rappelle l'action d'un champ scalaire classique, complexe, massif et libre ϕ (et son conjugué ϕ^*)

$$S[\phi,\phi^*] = \int_{\mathbb{R}^{1,3}} d^4x\, \mathcal{L}(\phi,\phi^*;\partial_\mu\phi,\partial_\mu\phi^*)\,, \qquad \text{avec} \qquad \mathcal{L} = (\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi^*) - m^2\,\phi\phi^*\,.$$

(i) Vérifier explicitement que

$$\phi(x_\mu) = \int \widetilde{d^3p}\,\left[a(\vec{p})e^{-ipx} + b^*(\vec{p})e^{ipx}\right]\Big|_{p^0=\omega_{\vec{p}}}\,, \qquad \text{avec} \qquad \omega_{\vec{p}} = \sqrt{\vec{p}^{\,2}+m^2}\,,$$

est une solution des équations du mouvement pour toutes fonctions $a, b : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}$.

(ii) Calculez l'hamiltonien H de la théorie et l'exprimer en termes de a, a^* et b, b^*.

Exercise I: Invariance de Lorentz
Soient k et k' des quadrivecteurs qui satisfont

$$k^2 = \eta_{\mu\nu}k^\mu k^\nu = m^2\,, \qquad \text{et} \qquad k'^2 = \eta_{\mu\nu}k'^\mu k'^\nu = m^2\,, \qquad \text{avec} \qquad m \in \mathbb{R}_+\,,$$

et

$$k^0 = \omega_{\vec{k}} = \sqrt{\vec{k}^{\,2}+m^2} > 0\,. \qquad \text{et} \qquad k'^0 = \omega_{\vec{k}\,'} = \sqrt{\vec{k}'^2+m^2} > 0\,.$$

Soit la distribution

$$D(\vec{k},\vec{k}\,') = k^0\,\delta^{(3)}(\vec{k}-\vec{k}\,')\,.$$

Le but de cet exercice est de montrer que $D(\vec{k},\vec{k}\,')$ est invariant sous les transformations de Lorentz, c.à.d. pour $\Lambda \in SO^\uparrow(1,3)$

$$D(\vec{k}\,,\vec{k}\,') = D(\overrightarrow{\Lambda\cdot k},\overrightarrow{\Lambda\cdot k'})\,,$$

ou $\overrightarrow{\Lambda\cdot k}$ est la partie spatiale du quadrivecteur $\Lambda\cdot k$.

On admettra que si l'on fait dans $\mathbb{R}^d$ un changement de variable inversible $x^i \to y^i$ (pour $i = 1,\ldots,d$) alors on a

$$\delta^{(d)}(y-y') = \frac{1}{|\mathrm{det}J|}\,\delta^{(d)}(x-x')\,, \qquad \text{avec} \qquad J^i{}_j = \frac{\partial y^i}{\partial x^j}\,.$$

1) Montrer que la distribution

$$D(\overrightarrow{\Lambda \cdot k}, \overrightarrow{\Lambda \cdot k'}) = (\Lambda \cdot k)^0 \, \delta^{(3)}(\overrightarrow{\Lambda \cdot k} - \overrightarrow{\Lambda \cdot k'}) \, ,$$

est singulière aux mêmes points que la distribution $D(\vec{k}\,, \vec{k}\,')$, c.à.d. lorsque $\vec{k} = \vec{k}\,'$.

2) On introduit la matrice J de taille 3×3 dont les éléments de matrice sont donnés par

$$J^i{}_j = \frac{\partial (\Lambda \cdot k)^i}{\partial k^j} \, ,$$

et l'on note $\Delta(\vec{k}) = \det(J)$. Montrer que l'on a

$$D(\overrightarrow{\Lambda \cdot k}, \overrightarrow{\Lambda \cdot k'}) = \frac{(\Lambda \cdot k)^0}{|\Delta(\vec{k})|} \, \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}\,') \, .$$

3) Pour calculer $\Delta(\vec{k})$, montrer successivement les équations suivantes

$$\begin{aligned} \Delta(\vec{k}) &= \det \begin{pmatrix} 1 & -\frac{k^1}{k^0} & -\frac{k^2}{k^0} & -\frac{k^3}{k^0} \\ 0 & \Lambda^1{}_0 \frac{k^1}{k^0} + \Lambda^1{}_1 & \Lambda^1{}_0 \frac{k^2}{k^0} + \Lambda^1{}_2 & \Lambda^1{}_0 \frac{k^3}{k^0} + \Lambda^1{}_3 \\ 0 & \Lambda^2{}_0 \frac{k^1}{k^0} + \Lambda^2{}_1 & \Lambda^2{}_1 \frac{k^2}{k^0} + \Lambda^2{}_2 & \Lambda^2{}_0 \frac{k^3}{k^0} + \Lambda^2{}_3 \\ 0 & \Lambda^3{}_0 \frac{k^1}{k^0} + \Lambda^3{}_1 & \Lambda^3{}_0 \frac{k^2}{k^0} + \Lambda^3{}_2 & \Lambda^3{}_0 \frac{k^3}{k^0} + \Lambda^3{}_3 \end{pmatrix} . \\ &= \det \begin{pmatrix} 1 & -\frac{k^1}{k^0} & -\frac{k^2}{k^0} & -\frac{k^3}{k^0} \\ \Lambda^1{}_0 & \Lambda^1{}_1 & \Lambda^1{}_2 & \Lambda^1{}_3 \\ \Lambda^2{}_0 & \Lambda^2{}_1 & \Lambda^2{}_2 & \Lambda^2{}_3 \\ \Lambda^3{}_0 & \Lambda^3{}_1 & \Lambda^3{}_2 & \Lambda^3{}_3 \end{pmatrix} = \det \left(\begin{pmatrix} \frac{1}{k^0} \, k_P^T \cdot \Lambda^{-1} \\ \vec{0} \quad \mathbb{1}_{3\times 3} \end{pmatrix} \cdot \Lambda \right) , \end{aligned}$$

ou $k_p^T = (k^0\,, -k^1\,, -k^2\,, -k^3)$.

4) En déduire

$$\Delta(\vec{k}) = \frac{(k_P^T \cdot \Lambda^{-1})_0}{k^0} \, .$$

Finalement, montrer que l'on a

$$(k_P^T \cdot \Lambda^{-1}) = (\Lambda \cdot k)^0 \, ,$$

et en déduire que la distribution $D(\vec{k}\,, \vec{k}\,')$ est invariante de Lorentz.

Exercise II: Champ non relativiste

À quatre dimensions d'espace-temps, on considère un champ complexe $\psi(\vec{x}, t)$ (et son conjuguée $\psi^*(\vec{x}, t)$) de masse m (avec $m \in \mathbb{R}_+$) dont la dynamique est déterminée par la densité lagrangienne

$$\mathcal{L}(\psi, \psi^*, \partial\psi, \partial\psi^*, \vec{x}) = i\, \psi^*(\vec{x}, t) \, \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{x}, t) - \frac{1}{2m} \, (\vec{\nabla}\psi^*(\vec{x}, t)) \cdot (\vec{\nabla}\psi(\vec{x}, t)) \, .$$

ou $\vec{\nabla}$ est le gradient par rapport aux 3 dimensions d'espace.

1) Donner les équations du mouvement et interpréter le résultat.

2) Calculer la partie imaginaire de $\mathcal{L}$, en déduire qu'on obtiendrait les mêmes équations du mouvement à partir de la densité lagrangienne réelle $\frac{1}{2}(\mathcal{L} + \mathcal{L}^*)$.

3) Montrer que la solution générale des équations du mouvement s'écrit

$$\psi(\vec{x}, t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}}\, a(\vec{k})\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{x} - \frac{i\vec{k}^2}{2m}\, t}\,, \tag{1}$$

avec $a : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}$.

Indication: Considérer une transformation de Fourier de $\psi(\vec{x}, t)$.

4) Montrer que ce modèle est invariant sous les transformations de symétrie

$$\psi(\vec{x}, t) \longrightarrow e^{i\alpha}\, \psi(\vec{x}, t)\,, \qquad \text{et} \qquad \psi^*(\vec{x}, t) \longrightarrow e^{-i\alpha}\, \psi^*(\vec{x}, t)\,, \qquad \text{avec} \qquad \alpha \in \mathbb{R}\,,$$

où α est une constante indépendante de $(\vec{x}, t)$. Calculer le courant de Noether associé à cette symétrie et interpréter le résultat. Verifier explicitement que le courant est conservé.

5) Espace des phases:

a) Montrer explicitement que $\psi(\vec{x}, t)$ et $\Pi(\vec{x}, t) = i\psi^*(\vec{x}, t)$ sont des variables canoniquement conjuguées. On admettra que $\psi(\vec{x}, t)$ et $\Pi(\vec{x}, t)$ à temps fixé et pour tout $\vec{x}$, forment un système de coordonnées de l'espace des phases. Comme à une facteur i près, ψ et ψ^* sont des variables canoniquement conjuguées l'une de l'autre, il n'y a pas lieu d'introduire une variable conjuguée pour ψ^*. Le seul crochet de Poisson non nul s'écrit alors

$$\{\psi(\vec{x}, t)\,, \psi^*(\vec{y}, t)\} = -i\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y})\,.$$

b) On peut aussi utiliser comme coordonnées de l'espace des phases la fonction complexe $a(\vec{k})$ introduit en (1) (et sa complexe conjuguée). Montrer que l'on a le crochet de Poisson

$$\{a(\vec{k})\,, a^*(\vec{k}\,')\} = -i\delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}\,')\,.$$

c) Donner l'expression du hamiltonien, en terme des (ψ, ψ^*) et (a, a^*).