Master M1 de *Sciences de la Matière* 2021-2022
École Normale Supérieure et Université Claude Bernard de Lyon
Intervenants: Eric Brillaux et Léo Mangeolle

TD Quantification des Champs Libres

TD 6: *Champ Scalaire (2)*

Répétition des concepts du cours

Soit ϕ un champ scalaire classique, complexe, massif et Π son conjugué, avec crochet de Poisson canonique

$$\{\phi(\vec{x},t), \Pi(\vec{y},t)\} = \delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})\,.$$

De plus, on rappelle

$$a(\vec{p}) = \int \frac{d^3x}{(2\pi)^{3/2}}\, e^{ipx}\, \left[\omega_{\vec{p}}\, \phi(\vec{x},t) + i\, \Pi^*(\vec{x},t)\right]\Big|_{p^0=\omega_{\vec{p}}}\,, \qquad \text{avec} \qquad \omega_{\vec{p}} = \sqrt{\vec{p}^{\,2}+m^2}\,.$$

(i) Calculer le crochet de Poisson $\{a(\vec{p}), a^*(\vec{p}\,')\}$ pour $\vec{p}, \vec{p}\,' \in \mathbb{R}^3$

(ii) Verifier que'une transformation de Lorentz $p \longrightarrow k = \Lambda\cdot p$ est une transformation canonique.

Exercise I: Champ Scalaire de Masse Nulle
À d dimensions d'espace-temps (1 dimension de temps et $(d-1)$ dimensions d'espace), on considère un champ complexe $\phi(x)$ (et son conjugué $\phi^*(x)$) dont la dynamique classique est déterminée par l'action

$$S[\phi,\phi^*] = \int d^dx\, (\partial_\mu\phi^*(x))\, (\partial^\mu\phi(x))\,. \tag{1}$$

1) Donner les équations du mouvement.

2) Rappeler l'expression du tenseur énergie-impulsion $T_{\mu\nu}$.

3) Montrer que le tenseur

$$S_{\mu\nu} = \partial^\rho S_{\rho\mu\nu}\,, \qquad \text{avec} \qquad S_{\rho\mu\nu} = \eta_{\rho\nu}\,(\phi^*\,\partial_\mu\phi + \phi\,\partial_\mu\phi^*) - \eta_{\mu\nu}\,(\phi^*\,\partial_\rho\phi + \phi\,\partial_\rho\phi^*)\,, \tag{2}$$

est conservé pour toute configuration des champs, c.à.d. satisfait $\partial^\mu S_{\mu\nu} = 0$, même si le champ ϕ n'est pas solution de l'équation de Klein-Gordon à masse nulle. Le tenseur $S_{\mu\nu}$ est appelé un terme d'amélioration. On vérifiera que $S_{\mu\nu}$ est un tenseur symétrique.

4) En déduire que tout combinaison linéaire

$$\hat{T}_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} + \alpha\, S_{\mu\nu}\,,$$

où α est un paramètre réel, est un tenseur conservé lorsque les équations du mouvement sont satisfaites. La valeur de l'impulsion

$$\hat{P}_\mu = \int d^{d-1}x\, \hat{T}_{0\mu}\,,$$

est-elle modifiée par le terme d'amélioration?

5) Existe-t-il une valeur de α telle que la trace du tenseur énergie-impulsion modifié

$$\hat{T}^\mu{}_\mu = \eta^{\mu\nu}\, \hat{T}_{\mu\nu}\,,$$

s'annule lorsque les équations du mouvement sont satisfaites?

6) Montrer que l'action (1) est invariante sous les transformations

$$x^\mu \longrightarrow x'^\mu = \lambda\, x^\mu\,, \qquad \text{et} \qquad \phi'(x') = \lambda^{\frac{2-d}{2}}\, \phi(x)\,,$$

où $\lambda \in \mathbb{R}_+$. Ces transformations sont appelées dilatations.

7) Calculer le courant de Noether D^μ associé aux dilatations. Montrer que, lorsque les équations du mouvement sont satisfaites, il peut s'écrire

$$D_\mu = x^\nu\, \hat{T}_{\mu\nu} + \frac{d-2}{2(d-1)}\, \partial^\rho (x^\nu\, S_{\rho\mu\nu})\,.$$

Exercise II: Conjugaison de Charge

On considère un champ scalaire complexe libre de masse m (avec $m \in \mathbb{R}_+$), et les opérateurs de création $a^\dagger(\vec{p})$, $b^\dagger(\vec{p})$ et d'annihilation $a(\vec{p})$, $b(\vec{p})$. On introduit un opérateur linéaire U_λ par

$$U_\lambda = \exp\left((2\pi)^{3/2} i\lambda \int \widetilde{d^3p}\, \big((a^\dagger(\vec{p}) - b^\dagger(\vec{p}))(a(\vec{p}) - b(\vec{p})) \big) \right)\,, \quad \text{avec} \quad \begin{array}{l} \lambda \in \mathbb{R}\,, \\ \widetilde{d^3p} = \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2} 2\omega_{\vec{p}}}\,, \end{array}$$

avec $\omega_{\vec{p}} = \sqrt{\vec{p}^{\,2} + m^2}$.

1) Montrer que U_λ est un opérateur unitaire. Donner l'action de U_λ sur le vide $|0\rangle$.

2) On rappelle les commutateurs

$$[a(\vec{p}), a^\dagger(\vec{p}\,')] = 2\omega_{\vec{p}}\, \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}\,')\, \mathbb{1}\,, \qquad \text{et} \qquad [b(\vec{p}), b^\dagger(\vec{p}\,')] = 2\omega_{\vec{p}}\, \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}\,')\, \mathbb{1}\,.$$

Montrer que les opérateurs

$$a^\dagger_\lambda(\vec{p}) = U_\lambda\, a^\dagger(\vec{p})\, U_\lambda^{-1}\,, \qquad \text{et} \qquad b^\dagger_\lambda(\vec{p}) = U_\lambda\, b^\dagger(\vec{p})\, U_\lambda^{-1}\,,$$

satisfont les équations différentielles

$$\frac{d}{d\lambda}\, a^\dagger_\lambda(\vec{p}) = i\, (a^\dagger_\lambda(\vec{p}) - b^\dagger_\lambda(\vec{p}))\,, \qquad \text{et} \qquad \frac{d}{d\lambda}\, b^\dagger_\lambda(\vec{p}) = -i\, (a^\dagger_\lambda(\vec{p}) - b^\dagger_\lambda(\vec{p}))\,.$$

3) Intégrer ces équations.

4) Existe-t-il une valeur de λ telle que l'on puisse identifier U_λ avec l'opérateur de conjugaison de charge U_C qui satisfait

$$U_C\, a^\dagger(\vec{p})\, U_C^{-1} = b^\dagger(\vec{p})\,, \qquad \text{et} \qquad U_C\, b^\dagger(\vec{p})\, U_C^{-1} = a^\dagger(\vec{p})\,?$$

Exercise III: Produit Scalaire

On considère l'espace de Fock introduit dans la théorie quantique du champ scalaire libre, notamment les états

$$|\vec{p}_1,\ldots,\vec{p}_n;\vec{q}_1,\ldots,\vec{q}_m\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}\sqrt{m!}}\, a^\dagger(\vec{p}_1)\ldots a^\dagger(\vec{p}_n)\, b^\dagger(\vec{q}_1)\ldots b^\dagger(\vec{q}_m)|0\rangle\,, \qquad \forall \vec{p}_i,\vec{q}_j \in \mathbb{R}^3\,.$$

1) Montrer que

$$\langle \vec{k}_1\ldots,\vec{k}_n;|\vec{p}_1,\ldots,\vec{p}_m;\rangle = 0\,, \qquad \text{si} \qquad m\neq n\,.$$

2) Calculer les produits scalaires

$$\langle \vec{k}_1,\vec{k}_2;|\vec{p}_1,\vec{p}_2;\rangle\,, \qquad \text{et} \qquad \langle \vec{k}_1;\vec{p}_1|\vec{k}_2;\vec{p}_2;\rangle\,.$$

3) Sans trop de calculs, proposez une expression pour le produit scalaire général

$$\langle \vec{k}_1,\ldots,\vec{k}_m;\vec{p}_1,\ldots,\vec{p}_n|\vec{k}_1{}',\ldots,\vec{k}_m{}';\vec{p}_1{}',\ldots,\vec{p}_n{}'\rangle\,.$$

4) Calculer les relations de commutation des opérateurs de création et annihilation avec l'opérateur

$$N = (2\pi)^{3/2}\int \widetilde{d^3p}\,\left(a^\dagger(\vec{p})\,a(\vec{p}) + b^\dagger(\vec{p})\,b(\vec{p})\right)\,.$$

Quelle est l'interprétation de cet opérateur ?

5) De même, donner l'interprétation de l'opérateur

$$P_{(2;0)} = \int \frac{d^3p_1}{2\omega_{\vec{p}_1}} \int \frac{d^3p_2}{2\omega_{\vec{p}_2}}\, |\vec{p}_1,\vec{p}_2;\rangle\langle\vec{p}_1,\vec{p}_2;|\,.$$