Master M1 de *Sciences de la Matière* 2021-2022
École Normale Supérieure et Université Claude Bernard de Lyon
Intervenants: Eric Brillaux et Léo Mangeolle

TD Quantification des Champs Libres

TD 7: *Champ Scalaire (3)*

Répétition des concepts du cours

Soit ϕ un champ scalaire quantique, complexe et massif. On rappel les états

$$|\vec{p}_1, \ldots, \vec{p}_n; \vec{q}_1, \ldots, \vec{q}_m\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}\sqrt{m!}}\, a^\dagger(\vec{p}_1) \ldots a^\dagger(\vec{p}_n)\, b^\dagger(\vec{q}_1) \ldots b^\dagger(\vec{q}_m)|0\rangle\,, \quad \forall \vec{p}_i, \vec{q}_j \in \mathbb{R}^3\,,$$

où $a^\dagger(\vec{p})$ et $b^\dagger(\vec{p})$ sont les opérateurs de création. Calculer

$$\langle \vec{p}_1, \vec{p}_2; |\vec{q}_1, \vec{q}_2; \rangle\,, \qquad \forall \vec{p}_{1,2}, \vec{q}_{1,2} \in \mathbb{R}^3\,.$$

Exercise I: États Cohérents

On considère des opérateurs de création $a_k^\dagger$ et d'annihilation a_k pour $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ avec les relations de commutation canoniques

$$[a_k, a_{k'}] = 0 = [a_k^\dagger, a_{k'}^\dagger]\,, \qquad [a_k, a_{k'}^\dagger] = \delta_{kk'}\,\mathbb{1}\,, \qquad \forall k, k' \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\,, \tag{1}$$

agissant dans l'escpace de Fock bosonique (avec $\mathbb{1}$ l'opérateur d'identité) engendré par les vecteurs

$$|n_1, n_2, \ldots\rangle = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n_k!}}\,(a_k^\dagger)^{n_k}|0\rangle\,, \qquad \forall n_k \in \mathbb{N}$$

où $|0\rangle$ est le vecteur vide annihilé par tous les opérateurs d'annihilation a_k.

1) Montrer que les opérateurs translatés

$$\tilde{a}_k = a_k + \lambda_k\,\mathbb{1}\,, \qquad \text{et} \qquad \tilde{a}_k^\dagger = a_k^\dagger + \lambda_k^*\,\mathbb{1}\,, \qquad \text{avec} \qquad \lambda_k \in \mathbb{C}\,,$$

satisfont les mêmes règles de commutation (1).

2) On introduit l'opérateur

$$\Lambda = \sum_{\ell=1}^{\infty} (\lambda_\ell^*\, a_\ell - \lambda_\ell\, a_\ell^\dagger)\,.$$

Montrer que l'on a

$$\tilde{a}_k = a_k + [\Lambda, a_k]\,, \qquad \tilde{a}_k^\dagger = a_k^\dagger + [\Lambda, a_k^\dagger]\,.$$

Trouver une transformation unitaire U telle que pour tout k

$$\tilde{a}_k = U\, a_k\, U^{-1}\,, \qquad \tilde{a}_k^\dagger = U\, a_k^\dagger\, U^{-1}\,.$$

3) Montrer que le vecteur $|\tilde{0}\rangle = U\,|0\rangle$ est annihilé par tous les opérateurs $\tilde{a}_k$. En déduire que l'état $|\tilde{0}\rangle$ est vecteur propre de chaque opérateur a_k avec la valeur propre $-\lambda_k$.

4) Calculer le produit scalaire $\langle 0|\tilde{0}\rangle$. Que devient ce produit scalaire lorsque tous les λ_k valent 1.

Exercise II: Fluctuations du Vide

Soit $\phi(x)$ un opérateur de champ scalaire complexe libre de masse m (avec $m \in \mathbb{R}_+$) en quatre dimensions d'espace-temps. Soit $f(x)$ une fonction complexe, et sa transformée de Fourier

$$\tilde{f}(k) = \int \frac{d^4x}{(2\pi)^2}\, f(x)\, e^{-ikx}\,.$$

On définit l'opérateur de champ 'moyenne' $\phi_f(x)$ par

$$\phi_f(x) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int d^4y\,\left[\phi^\dagger(y)\, f(y-x) + \phi(y)\, f^*(y-x)\right]\,.$$

1) Montrer que l'on a

$$\phi_f(x) = C(x) + C^\dagger(x)\,, \quad \text{avec} \quad C(x) = \int \widetilde{d^3p}\,\left[a^\dagger(\vec{p})\,\tilde{f}(-p) + b^\dagger(\vec{p})\,\tilde{f}^*(p)\right]\, e^{ipx}\Big|_{p^0=\omega_{\vec{p}}}\,,$$

avec $\omega_{\vec{p}} = \sqrt{\vec{p}^{\,2} + m^2}$.

2) Vérifier que le commutateur de $C^\dagger(x)$ et $C(x)$ s'écrit

$$[C^\dagger(x), C(x)] = K\,\mathbb{1}\,, \qquad \text{avec} \qquad K = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int \widetilde{d^3p}\,(|\tilde{f}(p)|^2 + |\tilde{f}(-p)|^2)\Big|_{p^0=\omega_{\vec{p}}}\,.$$

3) Le vecteur vide $|0\rangle$ de l'espace de Hilbert est défini par

$$\langle 0|0\rangle = 1\,, \qquad \text{et} \qquad a(\vec{k})|0\rangle = 0\,, \qquad \forall \vec{k} \in \mathbb{R}^3\,.$$

Calculer la distribution de probabilité de l'opérateur $\phi_f(x)$ dans le vide, qui est définie par

$$\rho_f(s) = \langle 0|\delta(\phi_f(x) - s)|0\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\alpha}{2\pi}\, e^{-i\alpha s}\,\langle 0|e^{i\alpha\phi_f(x)}|0\rangle\,.$$

Exercise III: Renversement du Temps

Soit $\phi(x)$ un opérateur de champ scalaire complexe libre. Son développement sur les opérateurs d'annihilation et de création s'écrit

$$\phi(x) = \int \widetilde{d^3p}\,\left[a(\vec{p})e^{-ipx} + b^\dagger(\vec{p})e^{ipx}\right]\Big|_{p^0=\omega_{\vec{p}}}\,, \qquad \text{avec} \qquad \begin{array}{l} \widetilde{d^3p} = \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}\,2\omega_{\vec{p}}}\,, \\ \omega_{\vec{p}} = \sqrt{\vec{p}^{\,2} + m^2}\,. \end{array}\,,$$

A la transformation de renversement du temps est associé un opérateur $\mathcal{T}$ anti-linéaire, anti-unitaire de l'espace de Hilbert qui agit sur l'opérateur de champ par

$$\mathcal{T}\,\phi(\vec{x},t)\,\mathcal{T}^{-1} = \phi(\vec{x},-t)\,.$$

Déterminer les opérateurs de création et d'annihilation transformés $\mathcal{T}\,a(\vec{p})\,\mathcal{T}^{-1}$ et $\mathcal{T}\,b(\vec{p})\,\mathcal{T}^{-1}$.

Indication: On rappelle que si A est un opérateur anti-linéaire, et λ un nombre complexe, on a $A\,\lambda = \lambda^*\,A$.