Master M1 de *Sciences de la Matière* 2021-2022
École Normale Supérieure et Université Claude Bernard de Lyon
Intervenants: Eric Brillaux et Léo Mangeolle

TD Quantification des Champs Libres

TD 8: *Champ Scalaire (4)*

Répétition des concepts du cours

Soit ϕ un champ scalaire libre quantique.

(i) Rappeler le T-produit $T[\phi(x)\,\phi^\dagger(y)]$.

On rappelle l'ordre normal des opérateurs

(i) Soient (a, b) des opérateurs d'annihilation et $(a^\dagger, b^\dagger)$ des opérateurs de creation. Donner l'expression explicit de $:a(\vec{p})\,a^\dagger(\vec{k})\,a(\vec{q}):$

(ii) Rappeler le Hamiltonien normalement ordonné du champ scalaire libre.

Exercise I: Fonction de Green de Feynman
Soit ϕ un champ scalaire, réelle libre de masse m qui satisfait l'équation de Klein-Gordon $(\Box + m^2)\phi = 0$. Soit $G(x)$ une fonction de Green d'opérateur de Klein Gordon

$$(\Box + m^2)\, G(x) = -i\delta^{(4)}(x)\,.$$

1) Soit $\widetilde{G}$ la transformée de Fourier de G

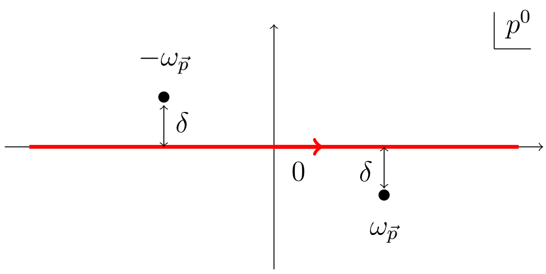
$$G(x) = \int_{\mathbb{R}^{1,3}} \frac{d^4p}{(2\pi)^2}\, e^{-ipx}\, \widetilde{G}(p)\,. \tag{1}$$

Montrer que

$$\widetilde{G}(p) = \frac{i}{(2\pi)^2}\,\frac{1}{p^2 - m^2}\,.$$

et conclure que $\widetilde{G}(p)$ a des pôles en $p^0 = \pm\omega_{\vec{p}} = \pm\sqrt{\vec{p}^{\,2} + m^2}$.

2) On pose de calculer l'intégrale sur p^0 en (1) par le théorème des résidus. Pour traiter les pôles, on utilise la prescription de Feynman et déplace les pôles comme suit



$$-\omega_{\vec{p}} \longrightarrow -\omega_{\vec{p}} + i\delta\,,$$
$$\omega_{\vec{p}} \longrightarrow \omega_{\vec{p}} - i\delta$$

avec δ un paramètre infinitésimal. Montrer que grace à cette prescription, la fonction de Green peut être écrite sous la forme suivante

$$G_F(x) := i \lim_{\epsilon \to 0^+} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ipx}}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \,. \tag{2}$$

3) Calculer l'intégrale sur p^0 dans (2).

4) La solution générale de l'équation de Klein-Gordon peut être écrite sous la forme suivante

$$\phi(x) = \int \widetilde{d^3p} \, \left[a(\vec{p})e^{-ipx} + a^\dagger(\vec{p})e^{ipx}\right] \bigg|_{p^0 = \omega_{\vec{p}}} , \qquad \text{avec} \qquad \omega_{\vec{p}} = \sqrt{\vec{p}^{\,2} + m^2} \,,$$

où les opérateurs de création $a^\dagger(\vec{p})$ et d'annihilation $a(\vec{p})$ satisfont les relations de commutation

$$[a(\vec{p}), a(\vec{p}\,')] = 0 = [a^\dagger(\vec{p}), a^\dagger(\vec{p}\,')] \,, \qquad \text{et} \qquad [a(\vec{p}), a^\dagger(\vec{p}\,')] = 2\omega_{\vec{p}} \, \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}\,') \,.$$

Montrer que G_F peut être écrit sous la forme

$$G_F(x) = \langle 0 | T\left(\phi(x)\, \phi(0)\right) | 0 \rangle \,.$$

Exercise II: Opérateur Composite
Dans la théorie quantique du champ scalaire complexe libre de masse m (avec $m \in \mathbb{R}_+$), on étudie l'opérateur

$$\mathcal{O}(x) = \, :\phi(x)\, \phi^\dagger(x): \tag{3}$$

1) Donner l'expression de cet opérateur en terme d'opérateur de création et annihilation.

2) Calculer la fonction de Green

$$\mathcal{G}(x,y) = \langle 0 | T\left(\mathcal{O}(x)\, \mathcal{O}(y)\right) | 0 \rangle \,.$$

3) On rappelle que la fonction de Green de Feynman peut s'écrire

$$G_F(x,y) = \int \widetilde{d^3p} \left[\theta(x^0 - y^0)\, e^{-ip(x-y)} + \theta(y^0 - x^0)\, e^{ip(x-y)}\right] \big|_{p^0 = \omega_{\vec{p}}} \,.$$

Montrer que l'on a

$$\mathcal{G}(x,y) = \frac{1}{(2\pi)^3}\, G_F(x,y)\, G_F(y,x) \,. \tag{4}$$

4) On rappelle que la fonction de Green de Feynman peut s'écrire

$$G_F(x,y) = \int \widetilde{d^3p} \left[\theta(x^0 - y^0)\, e^{-ip(x-y)} + \theta(y^0 - x^0)\, e^{ip(x-y)}\right] \big|_{p^0 = \omega_{\vec{p}}} \,.$$

Montrer que l'on a

$$\mathcal{G}(x,y) = \frac{1}{(2\pi)^3}\, G_F(x,y)\, G_F(y,x) \,. \tag{5}$$

5) En utilisant l'expression de la fonction de Green de Feynman comme transformée de Fourier quadridimensionnelle

$$G_F(x,y) = i\int \frac{d^4p}{(2\pi)^2}\,\frac{e^{-ip(x-y)}}{p^2-m^2+i\epsilon}\,,$$

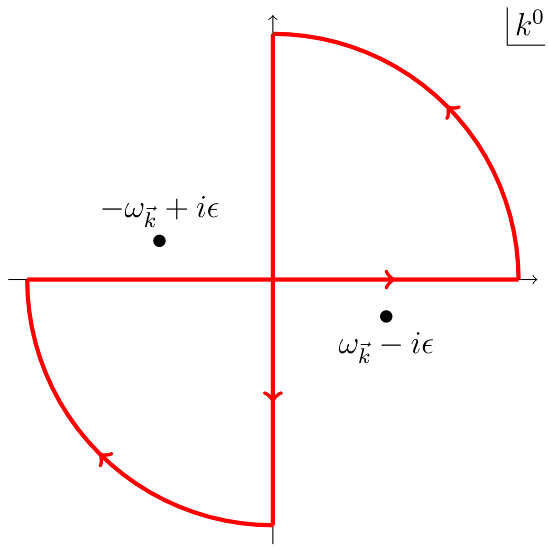
montrer que l'on peut écrire

$$\phi(x,y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^2}\, e^{-ip(x-y)}\, F_m(p)\,,$$

avec

$$F_m(p) = -\int \frac{d^4k}{(2\pi)^2}\,\frac{1}{(k^2-m^2+i\epsilon)((p-k)^2-m^2+i\epsilon)}\,.$$

6) On cherche à évaluer $F_m(p=0)$. On remplace dans l'expression de $F_m(0)$ l'intégrale de k^0 sur l'axe réel par une intégrale dans le plan complexe le long le chemin suivante



On admettra que l'intégrale sur les grands quarts de cercle tend vers 0 lorsque leur rayon tend vers l'infini. En déduire qu'on peut remplacer, dans l'intégrale qui définit $F_m(0)$, la variable k^0 par une variable $i\,k^4$ et donc

$$k^2 = (k^0)^2 - \sum_{i=1}^{3}(k^i)^2 \qquad \longrightarrow \qquad -\,k_E^2 = -(k^0)^2 - \sum_{i=1}^{3}(k^i)^2 \tag{6}$$

où $k_E = (k^1,k^2,k^3,k^4)$ est une vecteur à quatre composantes euclidien. Montrer alors

$$F_m(0) = -i\int \frac{d^4k_E}{(2\pi)^2}\,\frac{1}{(k_E^2+m^2)^2}\,. \tag{7}$$

7) Montrer que l'intégrale (7) est infinie. Il s'agit la d'une exemple de singularité dite ultraviolette. On introduit une deuxième masse M. Montrer que la quantité $F_m(0) - F_M(0)$ est bien définie.