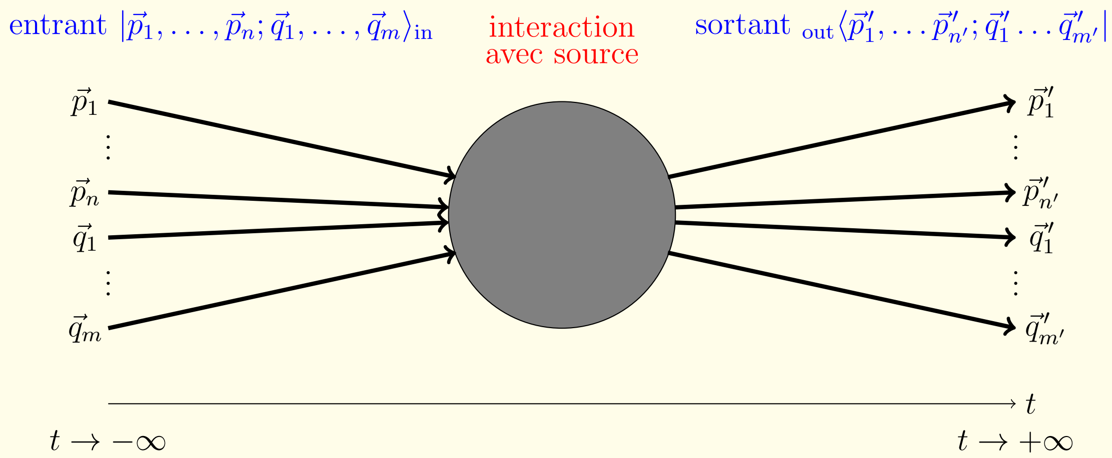
Master M1 de *Sciences de la Matière* 2021-2022
École Normale Supérieure et Université Claude Bernard de Lyon
Intervenants: Eric Brillaux et Léo Mangeolle

TD Quantification des Champs Libres

TD 9: *Champ Scalaire (5)*

Répétition des concepts du cours

On considère un champ scalaire complexe couplé à la source $j(x)$ (avec $j(x) \neq 0$ seulement pour $t \in [-T, T]$). En utilisant le schéma ci-dessous, expliquez le concept de l'opérateur de la matrice S pour décrire les transitions dans des expériences simples de diffusion.



Exercise I: Émission Stimulée

On considère dans l'espace de Minkowski à quatre dimension $\mathbb{R}^{1,3}$ un champ scalaire complexe $\phi(x)$ de masse m (avec $m \in \mathbb{R}_+$) qui interagit avec une source classique complexe $j(x)$ avec transformée de Fourier $\tilde{j}$

$$j(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^2} \, \tilde{j}(k) \, e^{-ikx} \, .$$

On rappelle que les champs asymptotiques entrant $\phi_{\text{in}}(x)$ et sortant $\phi_{\text{out}}(x)$ sont des champs scalaires libres de masse m. Les champs asymptotiques sont reliés par

$$\phi_{\text{out}}(x) = \phi_{\text{in}}(x) + \int d^4y \, \frac{\Delta(x,y)}{(2\pi)^{3/2}} \, j(y) \, \mathbb{1} \, ,$$

avec

$$\Delta(x,y) = i \int \widetilde{d^3p} \left(e^{-ip(x-y)} - e^{ip(x-y)} \right) \Big|_{p^0 = \omega_{\vec{p}}} \, , \qquad \text{ou} \qquad \omega_{\vec{p}} = \sqrt{\vec{p}^{\,2} + m^2} \, .$$

1) Montrer que les opérateurs de création et d'annihilation entrants et sortants sont reliés par

$$\begin{aligned} a_{\rm out}(\vec{p}) &= a_{\rm in}(\vec{p}) + (2\pi)^{1/2}\, i\, \tilde{j}(p)\, \mathbb{1}\,, & a^\dagger_{\rm out}(\vec{p}) &= a^\dagger_{\rm in}(\vec{p}) - (2\pi)^{1/2}\, i\, \tilde{j}^*(p)\, \mathbb{1}\,, \\ b_{\rm out}(\vec{p}) &= b_{\rm in}(\vec{p}) + (2\pi)^{1/2}\, i\, \tilde{j}^*(-p)\, \mathbb{1}\,, & b^\dagger_{\rm out}(\vec{p}) &= b^\dagger_{\rm in}(\vec{p}) - (2\pi)^{1/2}\, i\, \tilde{j}(-p)\, \mathbb{1}\,. \end{aligned} \tag{1}$$

2) Soit $F(\vec{k})$ une fonction complexe du trivecteur $\vec{p}$. On considère l'état choérent

$$|F; \text{in}\rangle = \exp\left(i \int \widetilde{d^3p}\, F(\vec{p})\, a^\dagger_{\rm in}(\vec{p}) \right) |0\rangle_{\rm in}\,. \tag{2}$$

a) Quelle est le carré de la norme de l'état $|F; \text{in}\rangle$.

b) Calculer le commutateur

$$\left[a_{\rm in}(\vec{p}), \exp\left(i \int \widetilde{d^3p}\, F(\vec{p})\, a^\dagger_{\rm in}(\vec{p}) \right) \right]\,.$$

c) Quelle est l'action de l'opérateur $a_{\rm in}(\vec{p})$ sur l'état $|F, \text{in}\rangle$? Quelle est l'action de $a_{\rm out}(\vec{p})$ sur le même état?

d) Calculer le nombre moyen de particules entrantes et sortantes dans l'état $|F; \text{in}\rangle$

$$\begin{aligned} N_{\rm in}(F) &= \frac{\langle F; \text{in}| \int \widetilde{d^3p}\, a^\dagger_{\rm in}(\vec{p})\, a_{\rm in}(\vec{p}) |F; \text{in}\rangle}{\langle F; \text{in}|F; \text{in}\rangle}\,, \\ N_{\rm out}(F) &= \frac{\langle F; \text{in}| \int \widetilde{d^3p}\, a^\dagger_{\rm out}(\vec{p})\, a_{\rm out}(\vec{p}) |F; \text{in}\rangle}{\langle F; \text{in}|F; \text{in}\rangle}\,. \end{aligned}$$

e) En utilisant (1), montrer que l'on a

$${}_{\rm out}\langle 0|F; \text{in}\rangle = \exp\left(- \int \widetilde{d^3p}\, F(\vec{p})\, \tilde{j}^*(\vec{p})\Big|_{p^0=\omega_{\vec{p}}} \right) {}_{\rm out}\langle 0|0\rangle_{\rm in}\,.$$

En utilisant le résultat établie en cours pour le produit scalaire ${}_{\rm out}\langle 0|0\rangle_{\rm in}$, en déduire l'expression du produit scalaire ${}_{\rm out}\langle 0|F; \text{in}\rangle$.

f) Calculer les probabilités de trouver n particules entrants ou n particules sortants dans l'état $|F, \text{in}\rangle$.

$$\begin{aligned} p_n^{\rm in}(F) &= \int \widetilde{d^3p_1} \ldots \int \widetilde{d^3p_n}\, \frac{|\langle \vec{p}_1, \ldots, \vec{p}_n; \text{in}|F; \text{in}\rangle|^2}{\langle F; \text{in}|F; \text{in}\rangle}\,, \\ p_n^{\rm out}(F) &= \int \widetilde{d^3p_1} \ldots \int \widetilde{d^3p_n}\, \frac{|\langle \vec{p}_1, \ldots, \vec{p}_n; \text{out}|F; \text{in}\rangle|^2}{\langle F; \text{in}|F; \text{in}\rangle}\,. \end{aligned}$$

3) On considère désormais l'état entrant à n_i particules défini par

$$|n_i; \text{in}\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_i!}} \left(\int \widetilde{d^3p}\, F(\vec{p})\, a^\dagger_{\rm in}(\vec{p}) \right)^{n_i} |0\rangle_{\rm in}\,.$$

a) Calculer le carré de la norme du vecteur $|n_i; \text{in}\rangle$.

b) Calculer le nombre moyen de particules sortantes (c.à.d. la valeur moyenne de l'opérateur $\int \frac{d^3p}{2\omega_{\vec{p}}}\, a^\dagger_{\text{out}}(\vec{p})\, a_{\text{out}}(\vec{p})$ dans l'état $|n_i; \text{in}\rangle$)

4) On suppose maintenant la source classique faible

$$\int \widetilde{d^3p}\, |\tilde{j}(p)|^2\Big|_{p^0=\omega_{\vec{p}}} \ll 1\,, \qquad \text{et} \qquad \left|\int \widetilde{d^3p}\, F^*(\vec{p})\, \tilde{j}(p)\right|^2 \Big|_{p^0=\omega_{\vec{p}}} \ll \int \widetilde{d^3p}\, |F(\vec{p})|^2\,.$$

On rappelle que la probabilité de trouver m particules sortantes n antiparticules sortants dans l'état $|n_i; \text{in}\rangle$ s'écrit

$$p_{m,n}(n_i) = \frac{\langle n_i; \text{in}|\Pi^{\text{out}}_{m,n}|n_i; \text{in}\rangle}{\langle n_i; \text{in}|n_i; \text{in}\rangle} = \frac{\langle n_i; \text{in}|S^{-1}\, \Pi^{\text{in}}_{m,n}\, S|n_i; \text{in}\rangle}{\langle n_i; \text{in}|n_i; \text{in}\rangle}\,,$$

où $\Pi^{\text{in}}_{m,n}$ est le projecteur sur les états à m particules et n antiparticules entrantes. Il n'est pas nécessaire d'utiliser la forme explicite du projecteur $\Pi^{\text{in}}_{m,n}$, il suffit de savoir qu'il laisse invariants les états à m particules et n antiparticules entrants, et donne le vecteur nul sur tout autre état. On rappelle que la matrice S est

$$S = \exp\left[i \int d^4y \left(\phi^\dagger_{\text{in}}(y)\, j(y) + \phi_{\text{in}}(y)\, j^*(y)\right)\right] = e^{(2\pi)^2\, i\mathcal{A}^\dagger}\, e^{(2\pi)^2\, i\mathcal{A}}\, e^{-\frac{(2\pi)^4}{2}[\mathcal{A},\mathcal{A}^\dagger]}\,,$$

avec $\mathcal{A} = \int \widetilde{d^3p}\, \left[a_{\text{in}}(\vec{p})\, \tilde{j}^*(p) + b_{\text{in}}(\vec{p})\, \tilde{j}(-p)\right]\Big|_{p^0=\omega_{\vec{p}}}$, qui satisfait

$$[\mathcal{A}, \mathcal{A}^\dagger] = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \widetilde{d^3p}\, \left(|\tilde{j}(p)|^2 + |\tilde{j}(-p)|^2\right) \mathbb{1}\Big|_{p^0=\omega_{\vec{p}}}\,.$$

Par un développement de S en puissances de la source, calculer à l'ordre 2 dans la source

a) la probabilité $p_{n_i,0}(n_i)$ que la nombre des particules reste le même

b) la probabilité $p_{n_i+1,0}(n_i)$ d'emission d'une particule par la source.

c) la probabilité $p_{n_i-1,0}(n_i)$ d'absorption d'une particule par la source.

d) la probabilité $p_{n_i,1}(n_i)$ d'emission d'une antiparticule par la source.