

# Equations locales de la dynamique des écoulements parfaits

## Equation d'Euler et écoulement parfait =

### 1) Écoulement parfait / Equat. d'Euler

Obtention de l'équation d'Euler =

Dans un ref. galiléen, le TRC appliquée à une particule de fluide non visqueux donne =

$$\rho \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} \right) = -\text{grad} P + \frac{d\vec{F}}{d\tau}$$

La somme des forces volumiques exercées par l'est. sur la particule de fluide en dehors des actions de contact qui sont décrites par la force vol. de pression

si ref non galiléen =

$$\rho \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} \right) = -\text{grad} P + \frac{d\vec{F}}{d\tau} - 2 \cdot \rho \vec{\Omega} \wedge \vec{v} - \rho \vec{a}_e$$

autre forme de l'équat. d'Euler en ref galiléen = (+ efficace) :

$$\rho \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \text{grad} \left( \frac{v^2}{2} \right) + \text{rot}(\vec{v}) \wedge \vec{v} \right) = -\text{grad} P + \frac{d\vec{F}}{d\tau}$$

### Propriétés =

- dérivées partielles → résolu numérique.
- terme non linéaire  $(\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v}$  = terme convectif ⇒ 2 familles de solut. terme conv.
- negligeables ou non ⇒ ODG.
- $v \ll L/T$  on peut négliger le terme convectif ⇒ on a linéarisé l'équat. d'Euler.
- 6 inconnues / 6 equat. = euler aux bases, de continuité, d'état, du comportement du fluide (OD)

### Expression de l'équation d'Euler en coordonnées cylindriques

Equation d'Euler dans le repère cylindrique, influence de la courbure d'une trajectoire circulaire  
 on suit une particule dans son mouvement de la repère local cylindrique:  $\vec{v}(r, t) = v(r, t) \vec{e}_\theta$  où  $r$  est le rayon de courbure de la trajectoire, supposée localement circulaire.

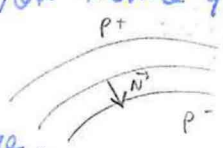
on peut écrire =

$$\rho \left[ \frac{\partial v}{\partial t} \vec{e}_\theta - \frac{v^2}{r} \vec{e}_r \right] = -\text{grad} P - \text{grad}(\rho g z) + \frac{d\vec{F}}{d\tau}$$

### Écoulement incurvé autour d'un objet, effet Coanda ou "théière"

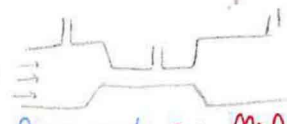
si on néglige le poids du fluide, pour un écoulement stationnaire homogène, on montre que =

$$\rho \frac{v^2}{r} \approx \frac{\partial p}{\partial r}$$



la pression est plus grande quand on s'éloigne du centre de courbure.  
 ex: portance des avions

### écoulement parallèle, loi transverse des pressions



Le champ de pression, transversalement à un écoulement parallèle ou "peu courbé" obéit aux lois de la statique des fluides.

Théorème de Lagrange: étudier les champs de courbures  
 typ de méca:  $(\mathbb{R}^3, \text{gal}(M_1))$   
 forces réf. conservatives  $(M_2)$   
 typ. Lagrangien: écoulement incompressible  $(L_2)$

typ. Eulerien: écoulement parfait  $(E_1)$   
 fluide homogène  $(E_3)$

Théorème de Lagrange-Kelvin:  
 l'évolution d'un tourbillon  $\vec{\omega}$  est donnée par:  

$$\frac{d}{dt}(\vec{\omega} \cdot d\vec{r}) + \vec{\omega} \cdot (\nabla \times \vec{r}) \cdot d\vec{r} = 0$$

Dans un champ de forces conservatives, un écoulement parfait, incompressible et homogène, qui est irrotationnel à  $t=0$  reste irrotationnel ultérieurement.

II. Théorème de Bernoulli

Hydr: Méca =  $M_1 / M_2 / M_3$  = dh de pentes  
 uniforme:  $g = -g\vec{e}_3$   
 Lagrangien =  $L_1$

Eulerien:  $E_1, E_2$  = écoulement irrotationnel,  $E_3, E_4$  = écoulement incompressible,  $E_5$  = sur une ligne de courant.  
 Théorème de Bernoulli: non applicable si  $\Sigma$  contient une pièce mobile.

Établissement de la formule intégrale: intégration de l'équation d'Euler. Cas d'un écoulement parfait, incompressible, homogène, non irrotationnel

Énergie général:

$M_1, M_2, E_3, E_4, E_5, L_2$   
 En multipliant itérativement l'équation de circulation par  $d\vec{r}$ , après intégration, à  $t$ , entre les points A et B d'une Ldc on obtient:  

$$\int_B^A \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \cdot d\vec{r}) + \left[ \frac{1}{2} v^2(M, t) + g_3 + \frac{p}{\rho} \right]_B^A = 0$$
  
 A (A, B) d'une m Ldc.

Écoulement parfait, irrotationnel, incompressible et homogène

Énergie classique

En tout pt du fluide M:  

$$\frac{1}{2} v^2 + g_3 + \frac{p}{\rho} = c(t)$$

Écoulement parfait, irrotationnel, incompressible et homogène

Énergie classique:

sur une m Ldc entre A et B:  

$$\frac{1}{2} v_A^2 + g_3A + \frac{p_A}{\rho} = \frac{1}{2} v_B^2 + g_3B + \frac{p_B}{\rho}$$

Bernoulli: Égal de Bernoulli: et une égal de conservation de l'énergie.

$\frac{1}{2} v^2 + g_3 + \frac{p}{\rho}$  = constante  
 2m des forces de pression



- relation de Bernoulli:  $P + \rho g h + \frac{1}{2} \rho v^2 = \text{const}$ .  $\Rightarrow$  C'est la dissymétrie de l'écoulement autour de l'aile qui donne naissance à la portance.

Mécanisme  $\Rightarrow$  circulation du champ de vitesse sur la corde limitant la section de l'aile orientée de la vent trique. autour de  $O_3$  est positive:  $\oint \vec{v} \cdot d\vec{l} > 0$  car la circulation n'est nulle sur A l'emporte sur celle  $< 0$  de B.

la corde étude quantitative sur une aile cylindrique avec circulation de la vitesse non nulle = impuissance du fluide parfait

savoir tracer = effet de portance liée à la circulation

On veut une circulation du vitesse non nulle sur une corde formée entourant l'axe  $O_3$ . On applique cette circulation  $\Rightarrow$  on modifie l'écoulement en ajoutant un vortex d'axe  $O_3$  et d'intensité  $\Gamma$ . On obtient un nouvel écoulement de vitesse non nulle:

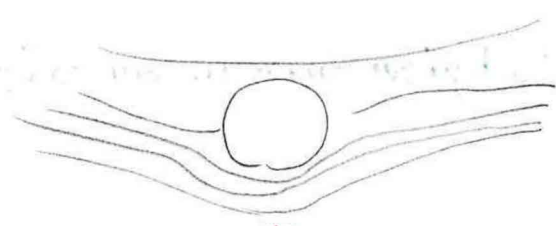
$$v_r = -V \cos \theta \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right), v_\theta = V \sin \theta \left( 1 + \frac{r^2}{R^2} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi r}$$

$\rightarrow$  vortex et circulation: écoulement + caractère circulaire de l'écoulement en dehors de  $O_3$ .  
 Relatif de Bernoulli: donne la dyn de pression au voisinage de l'aile.  
 Une force tangentielle verticale:  $\frac{dF_p}{dz} = \rho v \Delta r = \rho v \Gamma = \rho v \Gamma \vec{e}_y$   
 Nous obtenons une force de portance due que  $\Gamma > 0$ .

hypothèses:

- caractériser du modèle de l'écoulement parfait. Par la viscosité de la couche limite qui crée la valeur de  $\Gamma$ , la qui explique l'existence d'une portance  $\rightarrow$  accompagner l'écoulement de l'écoulement d'une couche limite.

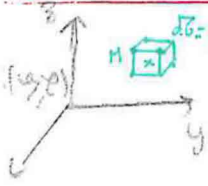
- on peut remarquer les effets de la viscosité sur  $\Gamma$  en faisant tourner l'aile autour de son axe: c'est l'effet Magnus. (jeu de ballon courbes au foot  $\Rightarrow$  rotation associée au portance)



Le fluide parfait:  $He$  à  $T < 2.73K$ .  
 - Moyen des données à microscopique.

# Demo = équations locales de la dynamique des écoulements parfaits

SD1 = Obtention de l'équation d'Euler:



T.R.M. à part. fluide "dV" dans (R):

$$\rho dV \frac{D}{Dt} \vec{v}(M, t) = - \text{grad } P dV + \rho dV \vec{g} + \vec{f}_{\text{vol}} dV$$

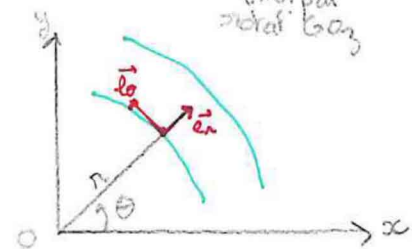
$\vec{f}_{\text{vol}} = \vec{f}_{\text{vol}}(M, t)$

$$\rho \left[ \frac{d\vec{v}}{dt} + \underbrace{\text{grad} \frac{v^2}{2}}_{NL} + \underbrace{\text{rot } \vec{v} \wedge \vec{v}}_{NL} \right] = - \text{grad } P + \rho \vec{g} + \vec{f}_{\text{vol}}$$

si (R) non gal:  $\vec{f}_{\text{vol}} = -\rho a \vec{e}(M) - \rho \vec{\omega}_{R/R_G} \wedge \vec{r} + \vec{v}(M/R_G)$

SD2 = Equation d'Euler dans le repère cylindrique, influence de la courbure d'une trajectoire circulaire.

typ:  $\vec{v} = v(r, \theta, t) \vec{e}_\theta$   
 inv. par axial base



$$\square \frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad}) (v(r, t) \vec{e}_\theta)$$

$$= \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{v(r, t)}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} [v(r, t) \vec{e}_\theta]$$

$$= \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{v^2(r, t)}{r} \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \theta} = -v \vec{e}_r$$

$$\rho \left[ \frac{\partial v}{\partial t} \vec{e}_\theta - \frac{v^2}{r} \vec{e}_r \right] = - \text{grad } P + \rho \vec{g} + \vec{f}_{\text{vol}}$$

SD3 = Écoulement incurvé autour d'un objet, effet Coanda

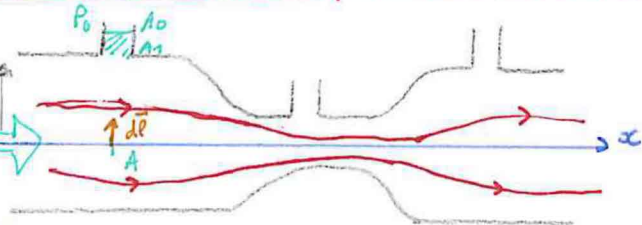
typ:  $|\rho \vec{g}|, |\vec{f}_{\text{vol}}| \ll |\text{grad } P|$   $d\vec{l} = d\vec{e}_r$

$$-\rho \frac{v^2}{r} d\vec{l} = -\text{grad } P \cdot d\vec{l}$$

$$= -dP$$

$$dP = \rho \frac{v^2}{r} dr$$

SD4 = Écoulement parallèle, loi transverse des pressions



$$\vec{v} = v(M, t) \vec{e}_x$$

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial v}{\partial t} \vec{e}_x + (\vec{v} \cdot \text{grad}) (v \vec{e}_x)$$

$$= \frac{\partial v}{\partial t} \vec{e}_x + v \frac{\partial}{\partial x} v(M, t) \vec{e}_x$$

$\text{div } \vec{v} = 0$  (écoulement incompressible)

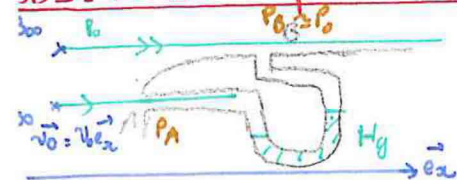
Eq. d'Euler:

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} \vec{e}_x = -\text{grad } P + \rho \vec{g} + \vec{f}_{\text{vol}}$$

$$\text{grad } P \cdot d\vec{e}_y = [\rho \vec{g} + \vec{f}_{\text{vol}}] \cdot d\vec{l}$$



### 0D9 = Notion de point d'arrêt et tube de Pitot



H. de Bernoulli: horizontal =  
éc. parfait, stat., incomp., homog.

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho_0} = K_{Ldc}$$

1)  $A_{\infty} \rightarrow A$  pt d'arrêt  $v_A = 0$

$$\frac{v_0^2}{2} + \frac{p_0}{\rho_0} = 0 + \frac{p_A}{\rho_0}$$

$$p_A - p_0 = \rho_0 \frac{v_0^2}{2} \Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{2(p_A - p_0)}{\rho_0}}$$

2)  $B_{\infty} \rightarrow B$   $p_{B_{\infty}} = p_B = p_0$

$$\frac{v_0^2}{2} + \frac{p_0}{\rho_0} = \frac{v_B^2}{2} + \frac{p_B}{\rho_0}$$

### 0D10 = critère d'incompressibilité (A.R.)

$$X_s = \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial p} \right) \approx \frac{\delta \rho}{\rho_0} \frac{1}{\delta p}$$

$$\frac{\delta p}{\rho_0} \approx \frac{\delta \rho}{\rho_0} \ll 1 \Leftrightarrow \delta p X_s \ll 1$$

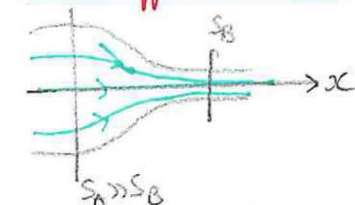
TR. B. Horiz.  $\frac{p}{\rho_0} + \frac{v^2}{2} = K_{Ldc}$

$$v: \begin{cases} 0 \rightarrow v_{max} \\ p_{max} \rightarrow p_{min} \end{cases} \quad \frac{p_{max}}{\rho_0} = \frac{p_{min}}{\rho_0} + \frac{v^2}{2}$$

$$\delta p = p_{max} - p_{min} \approx \rho_0 \frac{v^2}{2}$$

$$\delta p X_s \ll 1 \Leftrightarrow \rho_0 X_s v^2 \ll 2 \Leftrightarrow \left( \frac{v}{c_{non}} \right)^2 = M_{ech}^2 \ll 1$$

### 0D11 = Effet Venturi =



Hyp: Bernoulli: 'horizontal'  $\frac{p}{\rho_0} + \frac{v^2}{2} = K_{Ldc}$

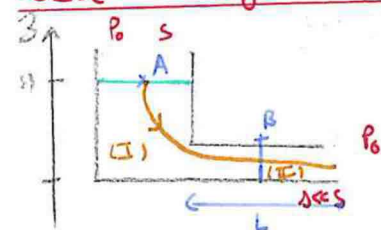
incompressible  $S_A v_A = S_B v_B$

$$v_B \gg v_A \Rightarrow p_B \ll p_A$$

$$\frac{p_B}{\rho_0} + \frac{v_B^2}{2} = \frac{p_A}{\rho_0} + \frac{v_A^2}{2} \Leftrightarrow p_B = p_A + \frac{\rho_0}{2} v_A^2 \left[ 1 - \left( \frac{S_A}{S_B} \right)^2 \right]$$

$p_B \ll p_A$   $\gg 1$

### 0D12 = vidange de réservoir = deshydré =



Hyp: R(ou z) gal

$\mathcal{L} \approx 1$  stat., parfait, incomp., uniforme.

$$(I) \vec{v} = -v_1(M,t) \vec{e}_3 \quad v_1(M,t) = -\frac{dh}{dt}$$

$$(II) \vec{v} = v_2(M,t) \vec{e}_x \quad v_2(M,t) = v(x,t) \text{ parfait}$$

I) incompressible =

$$\iint_S \vec{v}_1 \cdot d\vec{s}_1 = \iint_S \vec{v}_2 \cdot d\vec{s}_2 \Rightarrow v_1(t) S = v_2(x,t) x \Rightarrow v_3$$

$$\hookrightarrow v_1 = v_2 \frac{x}{S} \ll v_2$$

II)  $\approx$  stat. des fluides.

TR. de B. le long d'une Ldc  $A \rightarrow B$

$$\frac{p_A}{\rho_0} + \frac{v_A^2}{2} + g h(t) = \frac{p_B}{\rho_0} + \frac{v_B^2}{2} + g x_0$$

$$\Rightarrow \sqrt{r} \approx \sqrt{2gA(t)}$$

$$(1) -\frac{dA}{dt} S = \sqrt{2gA(t)} \Rightarrow \int_0^{h_0} -\frac{dA}{A} = \int_0^{h_0} -\frac{1}{\sqrt{2g}} \frac{1}{\sqrt{A}} dt \Rightarrow -2\sqrt{2g} \int_0^{h_0} \frac{1}{\sqrt{A}} dA = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{h_0} \frac{1}{\sqrt{A}} dt$$

$$\Rightarrow -2\sqrt{2g} \left[ \sqrt{A} \right]_0^{h_0} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \left[ \sqrt{A} \right]_0^{h_0} \Rightarrow -2\sqrt{2g} \sqrt{h_0} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \sqrt{h_0} \Rightarrow -2\sqrt{2g} \sqrt{h_0} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \sqrt{h_0}$$

$$\Rightarrow -2\sqrt{2g} \sqrt{h_0} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \sqrt{h_0} \Rightarrow -2\sqrt{2g} \sqrt{h_0} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \sqrt{h_0} \Rightarrow -2\sqrt{2g} \sqrt{h_0} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \sqrt{h_0}$$

l'écrite = - pour l'équation de continuité  
 - ex parfait =  $\frac{v}{c} \ll R$  (rayon)  
 $\frac{v}{c} \ll R$

ex: écoulement visqueux  
 $P_c = P_a - \rho g A (z)$   
 $P_c < P_c$

Reynolds:  $Dv = R_a \Delta p$   
 $S \left( \frac{dv}{dt} \right) = R_a \rho g A (H)$   
 $\frac{dv}{dt} = \frac{R_a \rho g A (H)}{S}$

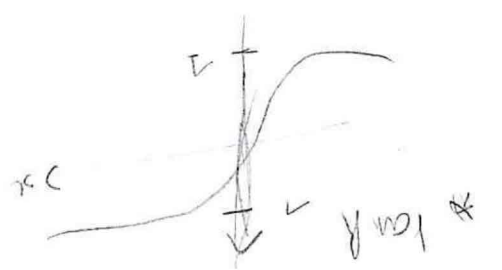
$R_a \frac{dv}{dt} = \rho g A (H)$

Artues =  $\frac{R_a}{\rho g A} \left( \frac{dv}{dt} \right)^2 \rightarrow$  modélise car ordre 2.

$\frac{dv}{dt} = \frac{R_a}{\rho g A} \frac{dv}{dt}$

on peut prendre K comme on veut car équation linéaire

$\frac{dv}{dt} (-H) \cdot \rho g = 0 \Rightarrow \frac{dv}{dt} (-H) = 0$



\* Bernoulli:  $\Rightarrow$  dérivé.  
 \*  $M_q$  q' une variable ne dépend pas d'un paramètre  $\rightarrow$  incompressibilité.

\*  $\frac{dv}{dt} = \text{argth} \left( \frac{v}{v_m} \right)$