Viscosité = fluide réel avec frottements

Statique des fluides = les actions de contact subies par un volume de fluide sont décrites par des efforts surfaciques normales à la surface → notion de pression.

ici → fluide en mvt ⇒ composantes tangentielles = **efforts de viscosité**.

Écoulement visqueux. Forces de contact dans un fluide en mouvement

Notion de particule fluide :

Nbre d'entités : $n = \frac{\rho a^3}{M} Na$.

→ Donner les résultats avec 1 chiffre significatif + une puissance de 10.

Compromis : On décrit le fluide comme un milieu continu ⇒ 2 conditions imposées :

- Ne pas décrire des phénomènes de dimension inférieure au micron.
- Accepter des incertitudes de 10^{-4} / 10^{-5} sur les prédict. du modèle.

Avantages : utilisation des champs : ρ, v, P, T et du calcul diff. div, rot, grad, laplacien.

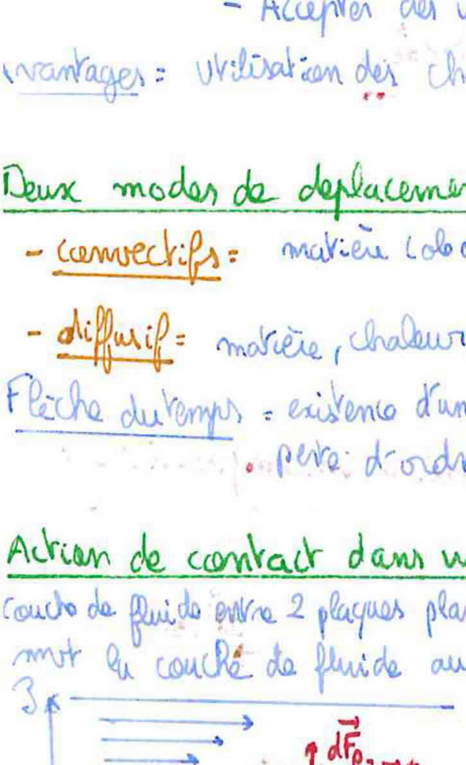
Deux modes de déplacement de la matière :

- convectifs : matière (oléoducs), chaleur, énergie cinétique (éolienne), quantité de mvt (lance HP)
- diffusif : matière, chaleur, quantité de mouvement : transport diffusif et convectif.

Flèche du temps = existence d'un passé et d'un futur car créat. d'entropie, perte d'ordre ⇒ phénomènes irréversibles

Action de contact dans un fluide en mouvement :

Couche de fluide entre 2 plaques planes //, l'une fixe, l'autre se déplace à $\vec{v_0} = v_0 \vec{e_x}$ ⇒ l'opérateur met en mvt la couche de fluide au contact qui fait bouger celle d'en dessous...



forces de pressions $d\vec{F_N} = \pm p\, dS\, \vec{e_3}$ à l'interface entre 2 couches verticales incapables de mettre en mvt le fluide selon Ox. ⇒ introduct. de forces de contact $d\vec{F_T}$ tangentielles entre couches de fluide.

Déf : On considère un écoulement parallèle dit de **cisaillement** quand la direct. de propagat. est la même en tout point et que $\vec{v} = v_x(z,t)\vec{e_x}$

Un élémt de surface $d\vec{S} = dx\,dy\,\vec{e_3}$, d'ordonnée z sépare le fluide situé au delà de z et celui en dessous de z.

Les actions de contact exercée par la couche supérieure sur la couche inf. se décomposent en une composante **normale** et une **tangentielle** (force de viscosité ou de cisaillemt) de la forme : $d\vec{F_N} = -p(M,t)\, dS\, \vec{e_3}$ et $d\vec{F_T} = \sigma(M,t)\, dS\, \vec{e_x}$ où $\sigma(M,t)$ définit la contrainte tangentielle en M à t

Équivalent volumique des forces de pression :

- $\overrightarrow{dF}_{pression} = -\overrightarrow{grad}\,P(M)\,d\tau$ on admet que c'est aussi valide pour un fluide en mouvement.

- Les forces de pression sur la particule de fluide sont éq. à une force de densité volumique : $\overrightarrow{f}_{v,pression}(M) = -\overrightarrow{grad}\,P(M)$.

⚠ Champ de pression dep. du champ des vitesses (loi de Bernoulli), ne pas le confondre avec sa valeur en statique des fluides.

Déf : On se limite au cas des **fluides newtonien** (ds ce chapitre) **pour lesquels la** contrainte tangentielle est prop. à l'inhomogénéité du chps des vitesses (effet ⇌ cause) traduite ici par $\frac{\partial v_x}{\partial z} \neq 0$ ds l'écoulement de cisaillement. D'où :

force tangentielle de visc.

$$\boxed{\sigma = \eta \frac{\partial v_x}{\partial z}(z)} \qquad \boxed{\overrightarrow{dF}_{visc.T}(z^+ \to z^-) = \eta \frac{\partial v_x}{\partial z}(z)\,dS\,\overrightarrow{e_x}}$$

coefficient positif de viscosité dynamique caractéristique du fluide (en Pa.s ou Pl)

poiseuille

Ordre de grandeur :

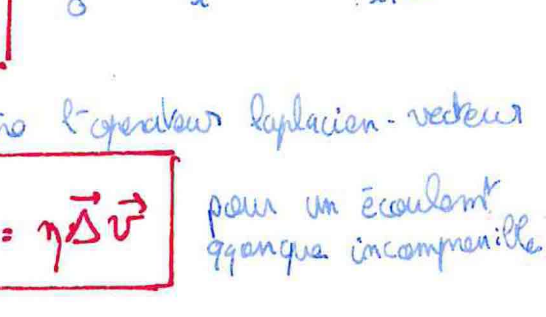
eau	Air	glycérine	
10^{-3}	2.10^{-5}	$1/2$	η (Pl)

loi pas valable dans tous les fluides (ex : dentifrice..)

Équivalent volumique des forces de viscosité dans un fluide incompressible :

- Sur une particule de fluide Newtonien de volume $d\tau$, lors d'un écoulement de cisaillement plan, la force de viscosité selon Ox :

$$\overrightarrow{dF}_{visc.x} = \eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}(z)\,d\tau\,\overrightarrow{e_x}$$



Force volumique équivalente :

$$\boxed{\overrightarrow{f}_{viscosité} = \frac{\overrightarrow{dF}_{visc.x}}{d\tau} = \eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}(z)\,\overrightarrow{e_x}}$$

Pour le champ de vitesse étudiées on peut faire apparaître l'opérateur laplacien-vecteur et on admet la généralisation : $\boxed{\overrightarrow{f}_{viscosité} = \frac{\overrightarrow{dF}_{visc.x}}{d\tau} = \eta \vec{\Delta} \vec{v}}$ pour un écoulement qqonque incompressible

Définitions :

- quand les lignes de courant sont régulières, bien ordonnées, que la vitesse évolue de façon continue, l'écoulement est dit **laminère**. Facilement obtenus pour fluides visqueux, + difficilement pour des fluides peu visqueux. Une petite perturbat. locale des vitesses doit

- quand les lignes de courant sont **irrégulières**, que la vitesse présente de fortes variations sur de petites dimensions spatiales, voir des discontinuités, l'écoulement est dit **turbulent**. Facilem^t obtenu pour les fluides peu visqueux.

Equation de Navier-Stokes

Equation générale local de Navier-Stokes :

Dans un ref. galiléen, le théorème de la résultante dynamique appliqué à une part. de fluide, système de masse $dm = \rho d\tau$ conduit à :

$$\boxed{\rho\left[\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\overrightarrow{grad})\vec{v}\right] = -\overrightarrow{grad}P + \rho\vec{g} + \eta\vec{\Delta}\vec{v} + \vec{f_v}}$$

densité volumique des autres forces.

Si ref. non galiléen, il suffit de rajouter les forces volumiques d'inertie d'entraînement et de Coriolis : $\vec{f}_{v,ie} = -\rho\vec{a_e}$ et $\vec{f}_{v,ic} = -2\rho\vec{\Omega}\wedge\vec{v}$

Propriétés :
- Equat° aux dérivées partielles non linéaire, du second ordre ⇒ difficile à résoudre dans la majorité des cas. Le + souvent on ne peut pas avoir de solut° numérique.
- Dans un ref non galiléen ⇒ tenir compte des F.
- Equation linéarisable pour des vitesses vérifiant en ODG $V \ll \frac{L}{T}$ on peut alors négliger le terme convectif non linéaire $(\vec{v}\cdot\overrightarrow{grad})\vec{v}$.

Equation de diffusion de la quantité de mouvement :

Avec les m̄ hypothèses, en négligeant le terme de convect° + en considérant que F visc. = !

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} = \frac{\eta}{\rho}\vec{\Delta}\vec{v} = \nu\vec{\Delta}\vec{v}$$

$\nu = \frac{\eta}{\rho}$ = coefficient de viscosité cinématique. C'est une équation de diffusion. Le terme $\nu\vec{\Delta}\vec{v}$ décrit le transport diffusif de quantité de mouvement.

Propriétés :
- ν est un coeff de diffusion en $L^2.T^{-1}$
- Cette équat° traduit un phénomène irréversible (temporellem^t)
- La longueur caractéristique de diff. = épaisseur de couche limite = $\delta = \sqrt{\nu\tau}$

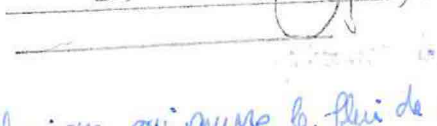
Nombre de Reynolds et transport de quantité de mouvement

Mise en évidence des densités de flux de la quantité de mvt, selon le phénomène considé[ré]

Transport par convection :

Dans le cas d'un écoulem^t plan de cisaillement, le vecteur densité de courant par transport de quantité de mvt par convect° dans la direct° Ox s'exprime :

$$\vec{j}_{px,conv} = \frac{\partial^2 P_c}{\partial S\, dt}\vec{e_x} = \rho v_x^2\vec{e_x}$$



jpc est une force surfacique = pression. Se mesure en Pa.
Aussi appelée contrainte d'inertie. C'est la force surfacique qui pousse le fluide situé en avant du courant.

Transport par diffusion :

Dans le cas d'un écoulement plan de cisaillement d'un fluide newtonien, le vecteur densité de courant associé au transport de quantité de mvt (QDM) par diff. s'écrit :

$$\vec{j}_{p_z,diff} = -\eta \frac{\partial v_x}{\partial z} \vec{e_z}$$

C'est la force surfacique ou **contrainte de viscosité**. Correspond à une force surfacique qui entraîne le fluide situé sur les bords du courant.

Nombre de Reynolds :

Comparaison des vecteurs densité de courant de transport de QDM

Les 2 mécanismes de transport de Q d.M ont lieu en même temps mais pas la même importance.
On peut comparer leur efficacité en comparant les normes des vecteurs densité de courant

Soit U = vitesse caractéristique de l'écoulement
L = distance " de variat° spatiales du chp de vitesses.

$$Re = \left| \frac{\text{Contrainte d'inertie}}{\text{contrainte de viscosité}} \right| = \left| \frac{j_{p,conv}}{j_{p\,diff}} \right| = \frac{\mu L U}{\eta} = \frac{LU}{\nu} \qquad \boxed{Re = \frac{LU}{\nu}}$$

Sang ds les capillaires, spermato $\rightarrow$ diff   conv $\leftarrow$ écoulement courant (voiture, eau, avion, marche, têtard)

$\ll 1$ — 1 — $\gg 1$ $\rightarrow Re$

Propriétés :

Re faible = contrainte de viscosité grande. → déplacement fluide "ds son ensemble"
Perturbat° amorties par phénomènes dissipatifs
→ Laminaire, stable.

Re grand = contrainte visco faible.
filets rapides côtoyant des lents → perturbat° transportées loin sans amortissement
→ Turbulent, instable.

Comparaison du terme de convection et de viscosité dans l'équation de Navier-Stokes

Les 2 méca. de transport de QDM ont lieu en même tps, mais n'ont pas la même importance.
→ On peut comparer leur efficacité en comparant les termes convectif et de viscosité.

$$Re = \left| \frac{\text{inertie}}{\text{visco}} \right| = \frac{\| \mu (\vec{v} \cdot \vec{grad})\vec{v} \|}{\| \eta \vec{\Delta} \vec{v} \|} \qquad \boxed{Re = \frac{LU}{\nu}}$$

Comparaison des durées caractéristiques des 2 phénomènes

On peut comparer leur eff. en comparant les durées caractéristiques des 2 phénomènes

$$Re = \left| \frac{\tau_{diff}}{\tau_{conv}} \right| \sim \frac{LU}{\nu}$$

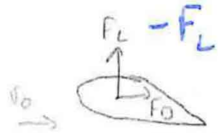
Si transfert convectif + efficace que transfert diff $\boxed{\tau_{diff} \gg \tau_{conv}}$ $\Rightarrow Re \gg 1$

Action du fluide sur l'obstacle :

Cas habituels : grands Re et écoulements turbulents

Def : Considérons un obstacle solide ds un fluide en écoulem^t. La force qu'exerce le fluide se décompose en 2 :

- F_D (drag) // à l'écoulm^t du fluide par rapport à l'obstacle = traînée
- F_L (lift) $\perp$ à l'écoulm^t ——— = portance



Le module de la traînée $F \propto$ à S, U^2 et ρ = $F = \frac{1}{2} C_x \rho U^2 S$

C_x : coeff sans dim.

Exploration d'une vaste plage de valeurs de Re ds le cas d'un écoulem^t autour d'une boule sphérique.

Définitions :

Considérons une sphère de rayon R en mvt à la vitesse U u^{te} ds un fluide au repos. ($\Leftrightarrow$ fluide en mvt, sphère immobile).

On constate que la sphère en mvt subit une force de freinage = force de traînée qui s'oppose à son mvt, colinéaire et de sens opposé à sa vitesse

- Pour de faibles vitesses : la traînée est donnée par la loi de Stokes :

$$\boxed{\vec{F_T} = -6\pi \eta R \vec{V}} \quad \text{soit } F_T = 6\pi \eta R U$$

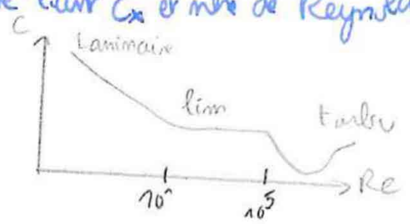
- Vitesses élevées, traînée quadratique $\vec{F_T} = -C \rho \pi R^2 V \vec{V}$ $\quad F_T = C \rho \pi R^2 U^2$

C : coeff sans dim = coeff de traînée ($\simeq 0,1$) dep de la surface de la sphère

On peut écrire $\boxed{C = \dfrac{F}{\frac{1}{2}\rho U^2 S}}$ avec $S = \pi R^2$ surface de la sphère $\perp$ à son mvt.

C ne dep. que du nbre de Reynolds.

Courbe liant C_x et nbre de Reynolds en échelle log/log :



Couche limite et notion d'écoulement parfait :

Notion d'écoulement parfait

Def : Écoulement **parfait** si tous les phénomènes diffusifs et dissipatifs sont négligeables, en particulier :

- il évolue de façon réversible
- pas de viscosité
- pas de conduct^t thq.

Ds un tel écoulm^t le fluide évolue de façon adiabatique et réversible avec $Re \to \infty$.

Comportement d'un fluide au contact avec un solide

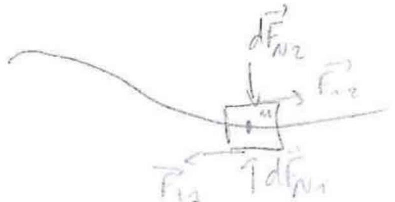
Propriétés: Pour la composante tangentielle du champ des vitesses:

- fluide en écoulemt parfait = pas d'interact autre que les forces de pression avec son entourage.
  ⇒ paroi sans influence sur l'écoulemt tangentiel. Il glisse parfaitement sur la paroi.
  ↳ aucune condit sur la vitesse tangentielle du fluide.

- fluide réel = viscosité génère une force de frottemt au niveau du solide. ⇒ composante tangentielle de la vitesse d'un fluide réel est nulle (admis).

→ le fluide "accroche" à la paroi = $\boxed{\vec{v_T}(M \in \text{fluide}, t) = \vec{v_T}(M \in \text{paroi}, t)}$
$\forall M \in$ paroi.
→ en particulier vitesse tangentielle du fluide visqueux est nulle sur un obstacle fixe.

* Cas interface entre 2 fluides ≠ non miscibles = il y a continuité de la vitesse normale, de la pression et de la contrainte tangentielle.
En particulier = si 1 des fluides est un liquide et l'autre un gaz = viscosité du gaz négligeable devant celle du liquide ⇒ contrainte tangentielle considérée nulle à l'interface



Notion de couche limite (notion due à Prandtl)

Def: Modèle de l'écoulemt parfait jamais rigoureux mais les forces de viscosité sont souvent concentrées là où les gradients de vitesses sont importants (⇔ au voisinage des obstacles). phénomènes de viscosité important dans une zone autour de l'obstacle = cette zone est appelée **couche limite** - δ: épaisseur de la couche limite.

→ les pb d'écoulemt de fluide réel autour d'un obstacle se décompose en 2 pb ≠ :
- écoulemt parfait hors de la couche limite
- " visqueux de la couche limite en supposant δ faible on pourra faire ces approximat:
écoulemt peut être laminaire ou turbulent en fct de Re.

Épaisseur de la couche limite sur un objet profilé:

ODG de la couche limite pour un écoulemt d'un fluide au voisinage d'un obstacle de dimension caractéristique x.
Les phénomènes de viscosité prédominent ds la couche limite. Il s'agit alors d'un phénomène de diffusion, $\delta \approx \sqrt{\nu \tau}$
τ : durée caract. de l'écoulemt
si la vitesse de l'écoulemt / au fluide a pour ODG U, la durée caractéristique de l'écoulemt est
$\tau = \frac{x}{\;}$ → $\boxed{\delta = \frac{x}{\;}}$

Propriétés : Application à la traînée et au décollem^t de la couche limite.

Pour les grands nbre de Reynolds, la couche limite devient instable. ⇒ **décollement de la couche limite** depuis la surface du corps. La posit° de la ligne de décollem^t sur le corps influe bcp sur la taille du sillage et sur la force de traînée.

Cas sphère : écoulem^t ds la couche limite turbulent à partir de $Re \approx 2.10^5$ ⇒ recule la ligne de décollem^t de la couche limite et réduit le coeff de frottem^t Cd d'un facteur 5, c'est le phénomène de la crise de traînée.

Si on pose un anneau dessus → traînée réduite.

Exemples d'écoulement :

Discussion en fonction du nombre de Reynolds

Def : - Écoulement **inertiel** si Re très grand ($\gg 10^3$) → voilier / voiture
- écoulem^t **visqueux ou "rampant"** si Re très petit ($Re \ll 1$) → glacier / milieux poreux

Re grand permet de négliger la viscosité de l'écoulem^t à une échelle L choisie pour calculer Re. MAIS viscosité jamais négligeable ds la couche limite. (zone responsable des frottem^t rencontrés par les solides en mvt ds les fluides)

Equation de Stokes d'un écoulement "rampant"

Pour un fluide newtonien incompressible, en régime stationnaire, l'équat° de Navier-Stokes devient

$$\boxed{\overrightarrow{grad}\, P = \eta \vec{\Delta}\vec{v} + \rho \vec{g} + \vec{f_v}}$$

Équat° linéaire, traduit des phénomènes réversibles
Valable si $Re \ll 1$ et dim obstacle $\ll \delta(L)$
↳ terme convectif négl. devant viscosité

- terme de convect° nul $(\vec{v}.\overrightarrow{grad})\vec{v} = 0$ notam^t écoulem^t unidirectionnel incompressibles.

Équation de Navier-Stokes adimensionnée et loi de similitudes

On considère un écoulem^t caractérisé par la vitesse U, la distance de l'obstacle L, le coeff de compressibilité isentropique $\chi_S = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_S = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial P}\right)_S$

On pose $v^* = \frac{v}{U}$, $t^* = \frac{t}{L/U} = \frac{t}{\tau}$, $P^* = P.\chi_S$, $x^* = \frac{x}{L}$

Les opérateurs deviennent : $\frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{\tau}\frac{\partial}{\partial t^*}$ $\quad \overrightarrow{grad}(\,) = \frac{1}{L}\overrightarrow{grad}^*(\,)$, $\vec{\nabla} = \frac{1}{L}\vec{\nabla}^*$, $\vec{\Delta} = \frac{1}{L^2}\vec{\Delta}^*$

L'équat° de Navier Stokes devient :

$$\frac{\partial \vec{v}^*}{\partial t^*} + (\vec{v}^*.\overrightarrow{grad}^*)\vec{v}^* = -\frac{1}{M^2}\overrightarrow{grad}^* p^* + \frac{1}{F_r}\frac{\vec{g}}{g} + \frac{1}{Re}\vec{\Delta}^* v^*$$

Avec $Re = \frac{LU}{\nu}$, de Mach $M = \left(\frac{U}{c_s}\right)^2 = \frac{U^2}{1/\rho\chi_S}$, de Froude $F_r = \frac{U^2}{gL}$

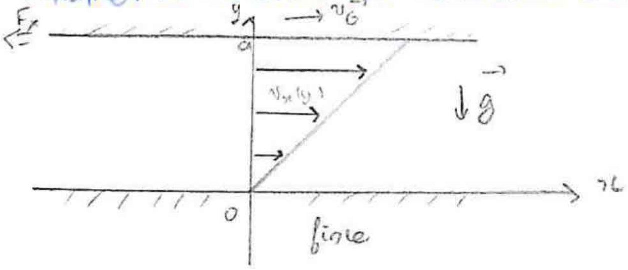
On peut mettre un fluide réel, visqueux en mvt de 2 manières :
- En déplaçant le support solide → écoulem^t de Couette
- En appliquant un gradient ext. de pression → écoulem^t de Poiseuille.

Écoulement de Couette plan :

Def : Un écoulement de Couette est un écoulement provoqué par le déplacement d'une des parois. Le fluide doit être visqueux. En général le gradient de pression extérieur est nul.

Un écoulement de Couette plan est un écoulement entre 2 plans parallèles en mouvement relatif.

Un écoulement de Couette cylindrique est un écoulement entre 2 cylindres coaxiaux animés de vitesses de rotations constantes dans le temps.



Propriétés : Un écoulement de fluide visqueux s'accompagne d'une dissipation d'énergie au sein du fluide.

Écoulement de Couette plan stationnaire :

Hyp : - Rég. stationnaire $\vec{v} = v(x, y, z, \cancel{t})\,\vec{e_x}$ ← CAL paroi mobile

- Invariance par translation $\parallel Oz$ de $\vec{v}(x, y, t)$
- Écoulement incompressible $\operatorname{div}\vec{v} = 0 = \frac{\partial v_x}{\partial x}\vec{e_x} = 0$ → $\boxed{\vec{v} = v(y)\,\vec{e_x}}$

$(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\text{grad}})\,\vec{v} = v(y)\frac{\partial}{\partial x}\left(v(y)\vec{e_x}\right) = \vec{0}$

$$\boxed{\vec{0} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,P + \mu\vec{g} + \eta\frac{d^2}{dy^2}v\,\vec{e_x}}$$

Selon Ox : $\frac{\partial P}{\partial x} = \eta\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(y)$ Selon Oy : $\frac{\partial P}{\partial y} = -\mu g \Leftrightarrow P(y) = -\mu g y + K(x)$

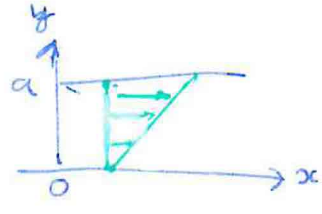
C.A.L : $P(y=a) = P_0 = -\mu g a + K(x) \quad \forall x$ → $\boxed{P(y) = P_0 - \mu g(y-a)}$

$\frac{\partial P}{\partial x_{CAL}} = 0 = \eta\frac{d^2 v}{dy^2} \Rightarrow v(y) = Ay + B$

C.A.L d'adhérence (réel) :

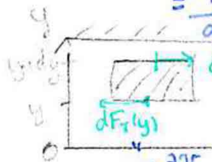
$v(y=0) = 0 = B$

$v(y=a) = v_a = Aa + B$ $\Rightarrow \boxed{\vec{v}(y) = \frac{v_0}{a}\,y\,\vec{e_x}}$ d'où :



$d\vec{F}_{fl\to\text{paroi}\,y=0} = \eta\frac{\partial v}{\partial y}(y=0)\,dS\,\vec{e_x}$ $\quad d\vec{F}_{fl\to\text{paroi}\,y=a} = -\eta\frac{\partial v}{\partial y}(y=a)\,dS\,\vec{e_x}$

$= \frac{\eta}{a}v_0\,dS\,\vec{e_x}$ $\quad = -\frac{\eta}{a}v_0\,dS\,\vec{e_x}$



$d\vec{F}_T(y+dy) = \eta\frac{\partial v}{\partial y}(y+dy)\,dS\,\vec{e_x} = d\vec{F}_{sup}$

$-\eta\frac{\partial v}{\partial y}(y)\,dS\,\vec{e_x} = d\vec{F}_{inf}$

$dP_{\text{dissipé}} = d\vec{F}_T(y+dy)\,v(y+dy)\,\vec{e_x} - d\vec{F}_T(y)\,v(y)\,\vec{e_x} = \eta\,dS\left[\underbrace{v(y+dy)\frac{\partial}{\partial y}v(y+dy)}_{\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{v^2(y+dy)}{2}\right)} - \underbrace{v(y)\frac{\partial v}{\partial y}(y)}_{\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{v^2}{2}(y)\right)}\right]$

$= \eta\frac{dS}{2}\,dy\,\frac{\partial^2}{\partial y^2}(v^2) = \frac{\eta}{2}\,d\tau\,\frac{\partial^2}{\partial y^2}(v^2)$

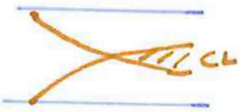
$$\frac{dP_{dissip}}{d\tau} = \frac{\eta}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{v_0^2 y^2}{a^2}\right) = \eta\frac{v_0^2}{a^2} \propto v_0^2$$

1er ppe : $d(\delta U) = 0 = dt\,dP_{dissip} + \delta Q$ pour $\delta\tau = a\,dy$ ($dP_{dissip} > 0$, $\delta Q > 0$)

Validité : $\boxed{\delta(L) \gg a}$

L = longueur // ox

Re ≪ 1



Pour cylindrique → hyp $R_2 - R_1 \ll R_1 R_2$, $V_0 = R_1\omega$ $a = R_2 - R_1$ $d\vec{F} = \eta\frac{v_0}{a}dS\vec{e_\theta}$ $dS = r\,d\theta\,h$

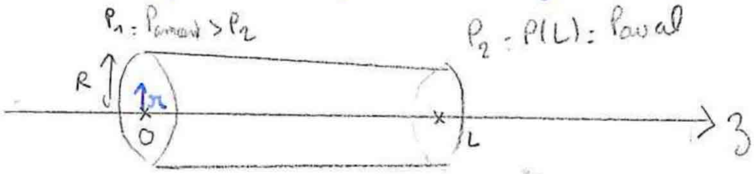
$$d\vec{m_0} = \vec{OM}\wedge d\vec{F}(M) = r\vec{e_r}\wedge\eta\frac{v_0}{a}dS\vec{e_\theta} = r\eta\frac{v_0}{a}dS\,\vec{e_z}$$

$\vec{m_0}(r = R_2) = R_2\eta\frac{v_0}{a}2\pi R_2 h\,\vec{e_z}$

→ TMC à cylindre ext % O_z en eq : $|C(\theta - \theta_0)| = \mathcal{M}_{resistant} = \eta\frac{v_0}{a}2\pi R_2^2 h$.

Écoulement de Poiseuille cylindrique : modélisation de l'écoulement de liquide dans une canalisation.

Def : Un écoulement de Poiseuille est un écoulement incompressible d'un fluide visqueux induit par une différence de pression appliquée entre les 2 extrémités de l'écoulement. L'écoulement peut être plan ou cylindrique qd il a lieu dans un tuyau cylindrique.



$\vec{v}_{cyl} = v(r, \theta, z, t)\,\vec{e_z}$

Hyp : • invariance / rotation Oz de D_v

- Éc stat.
- $\|\vec{g}\| \ll \|\frac{\vec{grad}\,P}{\mu}\|$ (approx.) ⇒ $P(\cancel{x}, z)$
  $\ll \|\eta\vec{\Delta}\vec{v}\|$
- Écoulement incompressible $\xrightarrow{M_1}$ locale : $\mathrm{div}\,\vec{v} = 0$ → $\mathrm{div}\,\vec{v} = \frac{\partial}{\partial z}v_z(r, z) = 0$ ⇒ $v_z(r)$
  $\xrightarrow{M_2}$ globale : D_v = cst ds le tube de courant
  ↳ $S = \pi R^2$ $\int_{S(r)} v(r, z)\,2\pi r\,dr$ = cste ∀z
  $z \to z + dz$ $\int_{S(r)}[v(r, z+dz) - v(r, z)]\,2\pi r\,dr = 0$ ⇒ $\frac{\partial v}{\partial z} = 0$

⇒ $\boxed{v_z(r)}$

Eq. N.S. :

on neglige la pesanteur

$$\mu\left[\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}.\vec{grad})(v(r)\vec{e_z})\right] = -\vec{grad}\,P + \cancel{\mu\vec{g}} + \eta\vec{\Delta}\vec{v}$$

$$(\vec{v}.\vec{grad})(v(r)\vec{e_z}) = v\frac{\partial}{\partial z}(v(r)\vec{e_z}) = \vec{0}$$

$$\eta\vec{\Delta}\vec{v}(r) = \eta\Delta v(r)\vec{e_z} = \eta\underline{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v}{\partial r}(r)\right)}\vec{e_z}$$

$\vec{grad}\,P = \frac{\partial P}{\partial r}\vec{e_r} + \frac{\partial P}{\partial z}\vec{e_z}$

Selon $\vec{e_r}$: $\frac{\partial P}{\partial r} = 0$ $\quad \vec{e_3}$ $\underbrace{\frac{dP}{dz}(z)}_{f(z)} = \underbrace{\eta \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r \frac{\partial v}{\partial r}\right)}_{g(r)} = K \quad \forall z, \forall r$

(1) $\frac{dP}{dz} = K = \frac{P_2 - P_1}{L} = -\frac{\Delta P}{L}$ $\quad$ CAL $\quad \Delta P > 0$

(2) $\frac{d}{dr}\left(r \frac{dv}{dr}\right) = -\frac{\Delta P}{L\eta} r$

$r\frac{dv}{dr} = -\frac{\Delta P}{2L\eta} r^2 + B \qquad \frac{dv}{dr} = -\frac{\Delta P}{2L\eta} r + \frac{B}{r}$

$v(r) = -\frac{\Delta P}{4L\eta} r^2 + B\ln r + C$

CAL : $v(r=0)$ défini physiquement $\rightarrow \boxed{B = 0}$

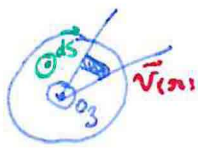
Condition d'adhérence :

$v(r=R) = v_{solide}(r=R) = 0 \rightarrow -\frac{\Delta P}{4L\eta}R^2 + C = 0$

$\Rightarrow \boxed{v(r) = \frac{\Delta P}{4L\eta}(R^2 - r^2)}$

$\vec{v}_{max} = \vec{v}(r=0) = \frac{\Delta P}{4L\eta} R^2 \vec{e_3}$

$D_v = \iint_{S(R)} \vec{v}(r)\,\vec{dS}$ $\quad$ or $\quad \vec{dS} = r\,d\theta\,dr\,\vec{e_3}$



$D_v = 2\pi \int_{r=0}^{R} \frac{\Delta P}{4L\eta}(R^2 - r^2) r\,dr$

$= \frac{\pi \Delta P}{2L\eta}\left[R^2 \frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right]_0^R \quad \Rightarrow \quad \boxed{D_v = \frac{\pi \Delta P}{8L\eta} R^4} > 0 \quad \propto \{\Delta P, R^4, \frac{1}{\eta}, \frac{1}{L}$

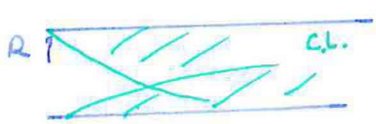
$\Delta P = R_{hydraulique} \times D_v$

$= R_h \times \frac{\delta \mathcal{V}}{dt}$ (loi d'Ohm) $\leftarrow I$

$R_{hy.} = \frac{8L\eta}{\pi R^4} \qquad R_{el} = \frac{1}{\gamma}\frac{L}{S}$

vitesse moyenne : $\vec{v}_{moy} = v_{moy}\vec{e_3} \qquad D_v = \pi R^2 v_{moy}$

$v_{moy} = \frac{\pi \Delta P}{8L\eta} \cdot \frac{R^4}{\pi R^2} = \frac{\Delta P R^2}{8L\eta} = \frac{v_{max}}{2}$



Validité : $\delta(L) \gg R$

$\frac{L}{\sqrt{\dots}} \gg R \qquad \frac{L}{\sqrt{L\,v_{moy}}} \gg R$ avec $\nu = \frac{\eta}{\rho}$ $\qquad R_e \ll 1$

Définitions :

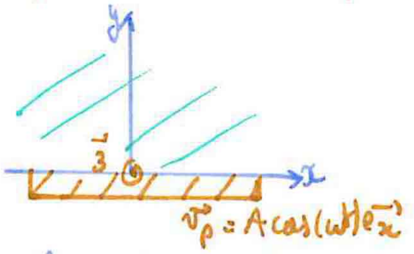
La décroissance de la pression lors d'un écoulement d'un fluide visqueux s'appelle perte de charge.

La charge est définie en tout point d'un écoulement comme la quantité $\boxed{p + \mu g z + \mu \frac{v^2}{2}}$

La charge est homogène à une énergie volumique.

Écoulement de cisaillement près d'un plan oscillant

Plaque oscillante dans un fluide visqueux :



Analyse dim : $\vec{v} = v(x,y,z,t)\vec{e_x}$

invariance / translat° // Oz de $D\vec{v}$

incompressibilité de l'écoulement $div\,\vec{v} = 0 = \frac{\partial v_x}{\partial x} + 0 + 0$ $\qquad \boxed{\vec{v} = v(y,t)\vec{e_x}}$

$v(y,t) = f(y)e^{i\omega t}$

Eq N.S : $\mu\left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \underbrace{(\vec{v}.\vec{grad})v(y,t)\vec{e_x}}_{v\frac{\partial}{\partial x}(v(y,t)\vec{e_x}) = \vec{0}}\right] = -\vec{grad}P + \overset{nég.}{\cancel{\mu\vec{g}}} + \eta\vec{\Delta}\vec{v}$

Selon Ox : $\mu\frac{\partial v}{\partial t} = \cancel{-\frac{\partial P}{\partial x}} + \eta\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$ $\qquad$ A Oy $\frac{\partial P}{\partial y} = 0 \Rightarrow P(y) = cte$ uniforme.

$$\boxed{\frac{\partial v}{\partial t} = \nu\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}}$$ Eq. diffusion

Résolution : $\underline{v} = \underline{f}(y)e^{i\omega t}$

$i\omega \underline{f}(y) = \nu \underline{f}''(y)$ $\quad \rightarrow \quad \boxed{\underline{f}''(y) - \frac{i\omega}{\nu}\underline{f}(y) = 0}$

$\underline{f} = \underline{A}e^{\underline{r}y}$ $\quad \underline{r} \in \mathbb{C}$

$\underline{r}^2 = \frac{i\omega}{\nu} = e^{i\frac{\pi}{2}}\frac{\omega}{\nu} \rightarrow \underline{r} = \pm\sqrt{\frac{\omega}{\nu}}e^{i\frac{\pi}{4}} = \pm\underbrace{\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}}_{1/\delta(\omega)\text{ : épaisseur de peau}}(1+i)$

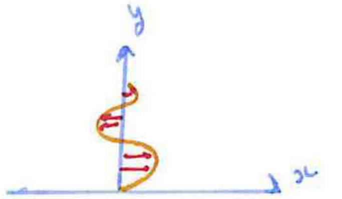
$\underline{v} = \underset{\overset{\shortparallel}{0\text{ DV}}}{\underline{A}}e^{\frac{y}{\delta}}e^{i(\omega t + \frac{y}{\delta})} + \underset{\overset{\shortparallel}{Be^{i\varphi}}}{\underline{B}}e^{-\frac{y}{\delta}}e^{i(\omega t - \frac{y}{\delta})}$

$\Rightarrow v(y,t) = Re(\underline{v}) = \underbrace{Be^{-y/\delta}}_{\text{eff. de peau}}\underbrace{\cos(\omega t - \frac{y}{\delta} + \varphi)}_{\text{propagat°}}$ $\quad v_\varphi = \omega\delta(\omega)$ dispersion

C.A.L en $y=0$, adhérence

$A\cos(\omega t) = B\cos(\omega t + \varphi)\ \forall t. \Rightarrow B = A \quad \varphi = 0\,[2\pi]$

$\Rightarrow \vec{v} = Ae^{-y/\delta}\cos(\omega t - \frac{y}{\delta})\vec{e_x}$ $\qquad \frac{1}{\delta} = \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}$



$\frac{d\vec{F}}{dS}_{fl \rightarrow plaque} = \eta\frac{\partial v}{\partial y}(y=0,t)\vec{e_x}$

$\frac{\partial v}{\partial y}(y,t) = Ae^{-y/\delta}\left[-\frac{1}{\delta}\cos(\ ) + \frac{1}{\delta}\sin(\ )\right]$

$\frac{dP_{vis}}{dS} = \frac{d\vec{F}}{dS} \cdot \vec{v}(y=0,t) = \eta\frac{A^2}{\delta}\left[-\frac{1}{\delta}\cos(\omega t) + \frac{1}{\delta}\sin(\omega t)\right]\cos(\omega t)$

$\left\langle\frac{dP_{vis}}{dS}\right\rangle = \ominus\frac{A^2\eta}{2\delta} < 0$

Plaque en régime permanent : $\langle P_{moteur}\rangle + \langle P_{fl \rightarrow pl}\rangle \overset{TPC}{=} 0 = \left\langle\frac{dE_c}{dt}\right\rangle$

$\langle P_{moteur}\rangle = -\langle P_v\rangle = \frac{A^2\eta}{2\delta}S_{pl} > 0$

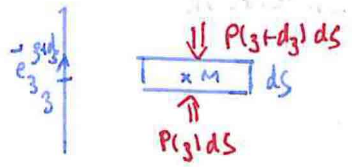
Astuces =

- passer de dt à dx pour que ce soit + simple : $\frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{\partial v_x}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial v_x}{\partial x} v_x$
- Introduire des distances caractéristiques.

Demo : De la viscosité au fluide parfait

SD1 : équivalent volumique des forces de pression

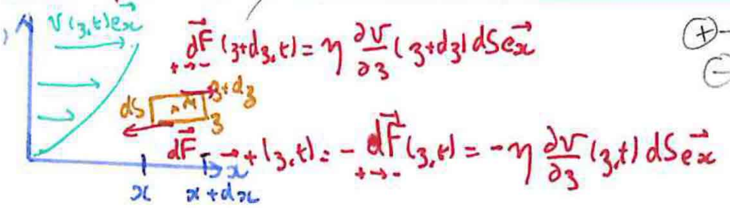
$$d\vec{F}_{pression}(M) = d\vec{F}_N(M,t)$$
$$= dS\,[P(z,t) - P(z+dz,t)]\,\vec{e_z}$$
$$= -dS\,dz\,\frac{\partial P}{\partial z}\vec{e_z}$$



$\to$ $d\vec{F}_p(M,t) = -d\tau\,\overrightarrow{grad}\,P(M,t)$

force de partie sup sur partie inf

SD2 : équivalent volumique des efforts de viscosité



$\oplus \to$ haut
$\ominus \to$ bas

$\to$ orientat° des forces valable que pour ce profil de vitesse

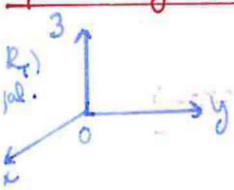
3ème LN : $d\vec{F}_T(M,t) = \eta\, dS\,\vec{e_x}\left[\frac{\partial v}{\partial z}(z+dz,t) - \frac{\partial v}{\partial z}(z,t)\right]$

$$= \eta\, dS\, dz\,\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}(z,t)\vec{e_x}$$

$$\frac{d\vec{F}_T}{d\tau}\text{viscosité} = \vec{f}_{visc} = \eta\frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}(z,t)\,\vec{e_x}$$

$$= \eta\,\vec{\Delta}\vec{v} \quad \text{(incomp.)}$$

Equation general locale de Navier-Stokes



TQM à part. fl. $dm = \mu(M,t)d\tau$ ds (R_T)

$$\frac{D}{Dt}[dm\,\vec{v}(M,t)] = -\overrightarrow{grad}\,P(M,t)\,d\tau + \eta\,\vec{\Delta}\vec{v}(M,t)\,d\tau + \mu(M,t)\,d\tau\,\vec{g} + \vec{f}_{vol}(M,t)\,d\tau$$

écoulem^t incompressible

$$\mu\frac{D\vec{v}}{Dt} = -\overrightarrow{grad}\,P + \eta\,\vec{\Delta}\vec{v} + \mu\vec{g} + \vec{f}_{vol}$$

$\frac{d\vec{F}}{d\tau}$

⚠ non linéaire

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\overrightarrow{grad})\vec{v} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v}$$
$$= \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \overrightarrow{grad}\left(\frac{v^2}{2}\right) + \overrightarrow{rot}\,\vec{v}\wedge\vec{v}$$

SD4 : Equation de diffusion de la quantité de mouvement :

$p_x = \mu v_x(z,t)$ (quantité de mvt vol)

Hyp : 1) $\|\eta\vec{\Delta}\vec{v}\| \gg \|\overrightarrow{grad}\,P\|, \|\mu\vec{g}\|, \|\vec{f}_{vol}\|$

2) $\left\|\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}\right\| \gg \|(\vec{v}\cdot\overrightarrow{grad})\vec{v}\|$ $\quad(\vec{v}\cdot\overrightarrow{grad})(v(z,t)\vec{e_x}) = v(z,t)\frac{\partial}{\partial x}(v(z,t)\vec{e_x}) = \vec{0}$.

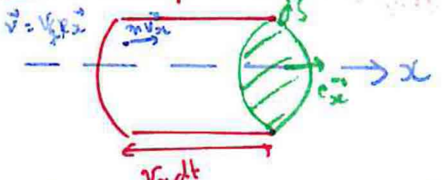
3) $\vec{v} = v(z,t)\vec{e_x}$ (cisaillem^t)

Eq de N.S $\to$ $\mu\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} = \eta\,\vec{\Delta}\vec{v} \Rightarrow \frac{\partial v(z,t)}{\partial t} = \nu\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}(z,t)$ avec $\nu = \frac{\eta}{\mu}$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mu v) = -\frac{\partial}{\partial z}\left(-\nu \frac{\partial(\mu v)}{\partial z}\right) \boxed{\times \mu} \rightarrow \frac{\partial p_x}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial z}\left(-\nu \frac{\partial p_x}{\partial z}\right)$$

$$\rightarrow \vec{j}_{p,diff} = -\nu \frac{\partial P_x}{\partial z}\vec{e_z} = -\nu \vec{grad}\, P_x \quad \text{et} \quad \frac{\partial P_x}{\partial t} = -\mathrm{div}\, \vec{j}_{p\,diff}$$

SD5 : transport par convection



quantité de $P_x = \mu v_x(z,t)$ traversant $\vec{dS}$ pdt dt.

$$\delta^2 P_x \text{ convectif} = \delta^2 m \times v_x$$
$$= \mu \overbrace{dS\, v_x dt}^{d\tau} \times v_x$$
$$= \mu v_x^2 dS dt$$

$$\vec{j}_{P_x}\text{conv} = \mu v_x^2 \vec{e_x} \qquad \| \vec{j}_{conv} \| = \frac{\delta^2 P_x\text{conv}}{dS\,dt}$$

SD6 : Transport par diffusion

$P_x = \mu v_x(z,t)$

$$\vec{j}_{P_x,dif} \overset{df}{=} -\nu \frac{dP_x}{dz}\vec{e_z} = -\eta \frac{\partial v_x}{\partial z}\vec{e_z}$$

$$\| \vec{j}_{P_x diff} \| = \frac{\delta P_x' diff}{dS\,dt} \# \frac{\text{Force}}{\text{Surface}} \text{ (contrainte visqueuse)}$$

SD7 : Comparaison des vecteurs densité de courant de transport de QDM

$$R_e = \frac{\text{Contrainte conv.}}{\text{Contrainte visqueuse}} \# \frac{\mu U^2}{\eta \frac{U}{Ld}} = \frac{\overset{\text{écoulement}}{U}\, \overset{\text{obstacle}}{Ld}}{\underset{\text{milieu}}{\nu}} \# Re$$

SD8 : Comparaison du terme de convection et de viscosité ds l'équation de Navier-Stokes

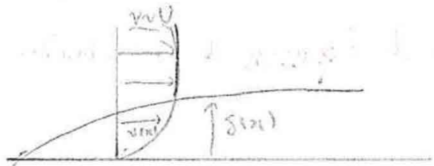
$$Re = \frac{\| \mu (v\, grad\, v) \|_{\text{conv}}}{\| \eta \vec{\Delta} \vec{v} \|_{\text{dif}}} \# \frac{\mu \frac{U^2}{Lc}}{\eta \frac{U}{Ld^2}} \# \frac{U}{\nu}\frac{Ld^2}{Lc}$$

SD9 : Comparaison des durées caractéristiques des 2 phénomènes

$$Re = \frac{\tau d}{\tau c} \# \frac{Ld^2}{\nu}\frac{U}{Lc} \qquad \tau_c \# \frac{Lc}{U} \qquad \frac{1}{\tau d} \# \frac{\nu}{Ld^2}$$

PQ ? $\rightarrow \frac{\partial p}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$; $\frac{p_0}{\tau_d} = \nu \frac{p_0}{L_d^2}$

SD10 : épaisseur de la couche limite sur un objet profilé



Hyp : $\delta(x) \ll x$ (facteur 10)

$$\eta \left| \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right| \# \eta \left| \cancel{\frac{U}{x^2}} + \frac{U}{\delta^2} \right| \quad \text{NS} \quad \mu \frac{U^2}{x} \# \eta \frac{U}{\delta^2} \Rightarrow \delta^2 = \frac{\eta}{\mu}\frac{x}{U}$$

$$Re(x) = \frac{xU}{\nu} = \frac{xU}{\eta}\mu \qquad \delta^2 = \frac{x^2}{\frac{\mu U x}{\eta}} = \frac{x^2}{Re(x)}$$

$$\rightarrow \delta(x) \geq \frac{x}{}$$

SD11 : Équation de Stokes d'un écoulement rampant

En régime stat., en linéarisant :

$$\rho \left[\cancel{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}} + \cancel{(\vec{v}.\vec{grad})\vec{v}} \right] = -\vec{grad}\, P + \rho \vec{g} + \eta \vec{\Delta} \vec{v}$$

stat. $\qquad$ $Re \ll 1$

D'où $\vec{grad}\, P = \rho \vec{g} + \eta \vec{\Delta} \vec{v}$.

validité : $Re \ll 1$, dim obstacle $\ll \delta(L)$ $\Leftrightarrow$ $\frac{L}{Re} \gg R$

SD12 : Équation de Navier-Stokes adimensionnée et loi de similitudes

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}.\vec{grad})\vec{v} = -\frac{1}{\rho}\vec{grad}\, P + \vec{g} + \nu \vec{\Delta}\vec{v}$$

$v^* = \frac{v}{U}$ $\qquad t^* = \frac{t}{\frac{L}{U}} = \frac{U}{L} t$ $\qquad p^* = \chi_S P$ $\qquad x^* = \frac{x}{L}$ $\qquad \chi_S = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_S \sqcup \frac{1}{\text{pression}}$

$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial\left(\frac{L}{U}t^*\right)} = \frac{U}{L}\frac{\partial}{\partial t^*}$ $\qquad * \frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{L}\frac{\partial}{\partial x^*}$ $\qquad * \vec{\nabla} = \frac{1}{L}\vec{\nabla}^*$

$$\frac{U^2}{L}\frac{\partial \vec{v}^*}{\partial t^*} + \frac{U^2}{L}(\vec{v}^*.\vec{grad}^*)\vec{v}^* = -\frac{1}{\rho L \chi_S}\vec{grad}^* p^* + \vec{g} + \frac{\nu U}{L^2}\vec{\Delta}\vec{v}^*$$

$$\frac{\partial \vec{v}^*}{\partial t^*} + (\vec{v}^*.\vec{\nabla}^*)\vec{v}^* = -\frac{1}{U^2 \rho \chi_S}\vec{\nabla}^* p^* + \frac{Lg}{U^2}\frac{\vec{g}}{g} + \frac{\nu}{LU}\vec{\Delta}^*\vec{v}^*$$

$$= -\frac{c_S^2}{U^2}\vec{\nabla}^* p^* + \frac{Lg}{U^2}\frac{\vec{g}}{g} + \frac{\nu}{LU}\vec{\Delta}^*\vec{v}^*$$

c_S = vitesse du son : $\frac{1}{\rho \chi_S}$

Mach $= \frac{U}{c_S}$ $\qquad Re = \frac{LU}{\nu}$ $\qquad$ Froude $= \frac{U^2}{Lg} \,\#\, \frac{E_c}{E_{ppes}}$

$$\frac{\partial \vec{v}^*}{\partial t^*} + (\vec{v}^*.\vec{\nabla}^*)\vec{v}^* = \underbrace{-\frac{1}{Mach^2}}_{\text{incompressible.}}\vec{\nabla}^* p^* + \underbrace{\frac{1}{Froude}}_{\text{écoulement fluviaux avalanche}}\frac{\vec{g}}{g} + \frac{1}{Re}\underbrace{\vec{\Delta}^*\vec{v}^*}_{\text{viscosité}}$$