Mouvement dans 1 champs newtonien de forces centrales

Force newtonienne : force en $\frac{1}{r^2}$

Force centrale = force constamment dirigées vers 1 pt donné de l'espace "centre de force"

Force centrale conservative = $\boxed{F(M) = F(r)\,\vec{U_r}}$

$\delta W = F_r\,dr \rightarrow dE_p = -\delta W$

$F(r) = \frac{k}{r^2}$ $\Rightarrow$ $\boxed{E_p(r) = \frac{k}{r}}$ — cte algébrique ≠ raideur ressort

Lois générales de conservation :

Planéité du mvt :

M soumis uniqt à la force centrale : TMC : $\frac{d\vec{L_O}(M)}{dt} = \mathcal{M}_O(\vec{F}) = \underbrace{\vec{OM} \wedge \vec{F}}_{\text{colinéaire}} = \vec{0}$ $\Rightarrow \vec{L_O} = \text{cte}$

or $\vec{L_O}(M) = \vec{OM} \wedge m\vec{v}$

Mvt plan, dans le plan ⊥ à ce vecteur fixe $\vec{L_O}(M)$.

Loi des aires :

En polaire :

$L_O(M) = m r^2 \dot{\theta}\, \vec{u_3} = \text{cte}$

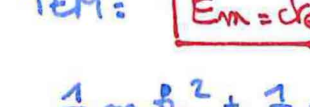
Pour un système à masse constante : $\boxed{C = r^2\dot{\theta}}$ = cte de la loi des aires ($m^2 s^{-1}$)

or $dS = \frac{r^2 d\theta}{2} + \cancel{\frac{dr\,(r\,d\theta)}{2}}$ négl. ordre 2 en ∞^e petit

$\hookrightarrow$ $\boxed{\frac{dS}{dt} = \frac{r^2}{2}\frac{d\theta}{dt} = \frac{C}{2} = \text{cte}}$ $\xrightarrow{S}$ $S(t+dt) = \frac{C}{2}\Delta t$

vitesse aérolaire en $m^2.s^{-1}$.

Loi des aires : pendant des durées égales, le rayon vecteur $\vec{OM}$ balaie des surfaces égales.



Conservation de l'Em :

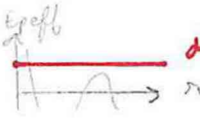
$\vec{F}(M) = F(r)\,\vec{U_r}$

TEM : $\boxed{E_m = \text{cte}}$ $\rightarrow \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m (r\dot{\theta})^2 + E_p(r) = \text{cte}$

$$\frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \underbrace{\frac{1}{2} m \frac{C^2}{r^2} + E_p(r)}_{E_{p\,eff}} = \text{cte}$$

On obtient les infos sur le mvt de M en séparant les variables

Nature de la traj. en fonction de Em :



diffusion

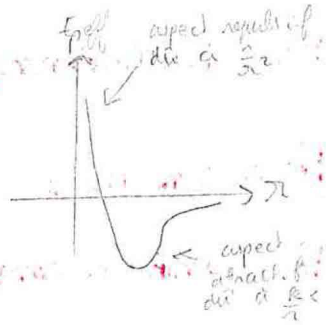
Interaction newtonienne :

$E_p(r) = \frac{k}{r}$

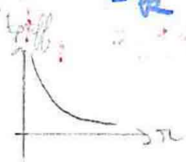
- Cas attractif : $k<0$: $E_{p\,eff}(r) = \frac{1}{2} m \frac{C^2}{r^2} + \frac{k}{r} \xrightarrow[r\to 0]{} +\infty$

$\xrightarrow[r\to +\infty]{} 0^-$

extremum : $\frac{dE_{p\,eff}}{dr} = 0 \rightarrow r_{eq} = \frac{mC^2}{-k} > 0$



- Cas repulsif : $k>0$ $\xrightarrow{0} +\infty$
$\xrightarrow{\infty} 0^+$. $r_{eq} = \frac{mC^2}{-k} < 0$



$\Rightarrow$ diffusion.

Mouvement dans $\vec{F} = \frac{k}{r^2}\vec{U_r}$:

état liés $\Leftrightarrow$ courbes fermées si $E_m<0$
diff. $\Leftrightarrow$ courbes ouverte $E_m>0$

courbes possibles = coniques (ellipses, paraboles, hyperboles)

En coord. polaires :

$$\boxed{r(\theta) = \frac{p}{1+e\cos\theta}}$$

paramètre de la conique

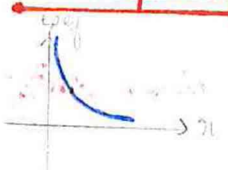
excentricité

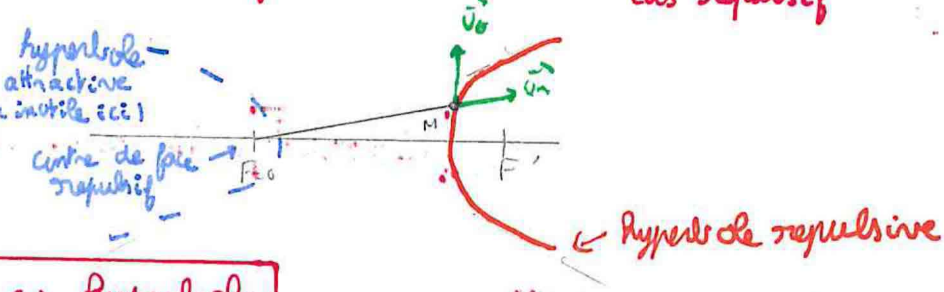
Cas attractif

$$\boxed{r(\theta) = \frac{p}{-1+e\cos\theta}}$$

Cas repulsif

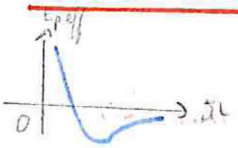
Cas repulsif :



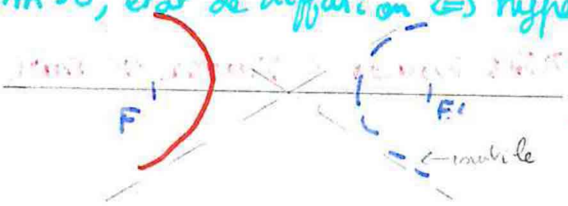


$$\boxed{e>1 \Leftrightarrow \text{hyperbole}}$$

Cas attractif :



* $E_m>0$, etat de diffusion $\Leftrightarrow$ hyperbole



* $E_m=0$, état de diffusion tq la vitesse à l'∞ soit nulle $\Leftrightarrow$ parabole

$$\boxed{e=1 \Leftrightarrow \text{parabole}}$$

* ellipse $\Leftrightarrow E_m<0 \Leftrightarrow e\in[0,1]$

$$\boxed{e\in[0,1] \Leftrightarrow \text{ellipse}}$$

$e=0$, cercle, $E_m = E_{p\,eff\,min}$.

Lois de Kepler :

1ère loi de Kepler : Dans le système solaire, toutes les planètes P décrivent des ellipses dont le soleil occupe 1 des foyers.

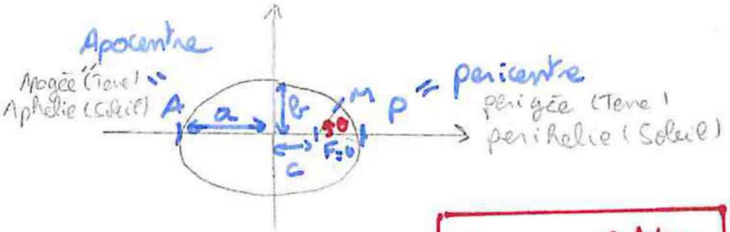
2ème loi de Kepler : Loi des aires : " $\vec{SP}$ balaie des aires égales pdt des durées égales ".

3ème loi de Kepler : Toutes les P voient le $\frac{1}{2}$ grand axe a de leur ellipse satisfaire à $\boxed{\frac{T^2}{a^3} = c^{te}}$. T = période de révolution

↳ se montre pour un cercle en = $v = \frac{2\pi R}{T} = \sqrt{\frac{GM}{r}}$

$c^{te} = \frac{4\pi^2}{GM_S}$

Trajectoires elliptiques :



Toujours origine sur 1 foyer.

$\boxed{c = e \times a}$

e → 0 cercle
e → 1 parabole

on évalue en $\theta = 0$ ou π

$r_{min} = r_P = r(\theta = 0) = \frac{p}{1+e}$

$r_{max} = r(\theta = \pi) = r_A = \frac{p}{1-e}$

$\boxed{\mathcal{E}_m = -\frac{GMm}{2a}}$

↳ démo : répartition de E_p, eff + $\dot{r}$ s'annule en P et A.
$r_A + r_p = 2a$

Surface d'1 ellipse : $\boxed{S = \pi a b}$

Trajectoires circulaires :

$e \to 0$

Loi des aires ⇒ $C = r^2\dot{\theta} = c^{te}$
⇓
$\dot{\theta} = c^{te}$ ⇒ M.R.U.

$\boxed{\mathcal{E}_m = -\frac{GMm}{2r}}$

↳ démo : $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p$

PFD sur $\vec{u_r}$: $-m\frac{v^2}{r}\vec{u_r} = -G\frac{m\,m'}{r^2}\vec{u_r}$

$\boxed{v(M) = \sqrt{\frac{GM}{r}}}$ vitesse sur 1 cercle de rayon r sous l'effet de l'attraction gravitationnelle de M en O.

Satellite géostationnaire :

Conditions : plan du mvt du satellite passe par O, c'est le plan équatorial, M et la Terre ont m ω = c

On déduit $r_{nécessaire}$ avec $\omega = \frac{v}{R} = \frac{2\pi}{T_{sid}}$ ⇒ $r = 42.10^3$ km

Méthode : Sur 1 ellipse A et P sont les seuls pts tq $\dot{r} = 0$.
⇒ $\vec{v_A}$ est ⊥ à $\vec{OA}$ + purement orthoradiale.
⇒ $\boxed{C = r_A v_A = r_p v_p}$

Satellites :

Satellisation : mise en orbite circulaire autour de la Terre.

$\boxed{v = \sqrt{\frac{GM_T}{R_T}}}$ ou $\boxed{v = \sqrt{g R_T}}$ = vitesse de satellisation
1ère vitesse cosmique

$- \frac{GmM_T}{}$

vitesse de libération :

Envoie d'1 pt de masse m à l'∞ $\Leftrightarrow$ sortir de l'attraction terrestre. $\Rightarrow$ $E_m > 0$

$E_m = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} m v_2^2 - G \frac{m M_T}{r_T^2} = 0$

$$\Rightarrow \boxed{v_\ell = \sqrt{2}\, v_S = \sqrt{2} \sqrt{g R_T}}$$

Experience de la diffusion de Rutherford :

Pour obtenir la distance min d'approche :

① Moment cinétique

② E_m

① $\rightarrow$ ② $\Rightarrow$ 2^{nd} degré.

$E_p = -\frac{G m M}{r}$