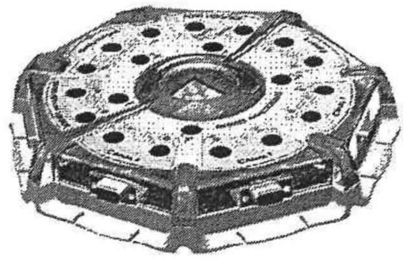
PC*/PC

Echantillonnage, analyse fréquentielle, filtrage

But : - Etudier quelques problèmes dus à l'utilisation de la FFT pour l'analyse de spectres. Se familiariser avec les instruments de mesure et leurs spécificités.
- Effectuer l'analyse spectrale d'un signal avant et après filtrage.



Les analyses de signaux se feront informatiquement sur PC par le programme Latis-Pro et l'interface d'acquisition SYSAM-SP5 :

= Appel professeur

1. Analyse de spectre numérique

1.1. Observation du spectre

Les analyseurs de spectres numériques utilisent la transformation de Fourier rapide (Fast Fourier Transform ou FFT).

Le principe est de numériser le signal à analyser et de le mémoriser sous la forme d'un enregistrement de N points.

La numérisation se fait aussi bien du point de vue amplitude que du point de vue temporel :

- en amplitude : la carte d'acquisition SYSAM-SP5 est une carte 12 bits, ce qui signifie que le calibre choisi (par défaut −10V..+10V à modifier par le logiciel si besoin) est découpé en 2^{12} = 4096 niveaux par un convertisseur analogique-numérique (CAN). Le signal analogique est acquis sous forme de valeurs discrètes espacées d'un pas égal ici à $20/2^{12}$ = 4,9 mV. Ce pas peut être réduit par un choix adapté du calibre.
- en temporel : l'acquisition des points se fait aussi à des dates fixées espacées d'une durée T_E appelée *période d'échantillonnage*. Les dates d'acquisition seront donc mises sous la forme $t_n = t_{début} + n.T_E$ où n sera un entier (on posera $F_E = \frac{1}{T_E}$ la fréquence d'échantillonnage).

Au final, le programme dispose d'un ensemble de N points résultant d'un échantillonnage (en temps) et d'une quantification (en amplitude).
Pour que le calcul de la FFT soit optimal, on choisit un nombre de points qui soit une puissance de 2. Dans ce TP, on choisira 2^{10} = 1024 points.

Manipulation :

Régler au GBF un signal d'amplitude crête à crête de 1 V_{PP} et de fréquence 10 kHz.
Envoyer (via un Té) ce signal sur l'oscilloscope et sur la centrale d'acquisition (entrée EA0). (On pourra débrancher après vérification l'oscilloscope en cas de signal trop bruité).

Dans Latis-Pro,

Activer l'écran de réglage des paramètres d'acquisition en cliquant sur le bouton central de la fenêtre gauche, si ce n'est pas déjà le cas.

Clic gauche sur "EA0" pour activer la voie.

Choisir les paramètres d'acquisition : 1024 points, pour une fréquence d'échantillonnage de 200 kHz, soit $T_E = 5$ µs et une durée totale d'acquisition de 5,12 ms.

Vérifier que "mode permanent" n'est pas activé.

Un clic droit sur "EA0" permet de régler le calibre et le "style" du tracé.

Affichage de l'analyse spectrale :

Réaliser l'acquisition en appuyant sur F10
Pour lister les courbes, cliquer sur le bouton gauche (dessin d'une sinusoïde)
Dans le menu "traitements" choisir "calculs spécifiques" puis "analyse de Fourier"
A la souris, choisir la courbe temporelle voulue en la faisant glisser depuis la liste.
Dans le menu "avancé" choisir :

- type spectre : amplitude
- fenêtre : aucune
- sélection périodes : automatique
- résultat sur $[0, F_E]$
- Re calcul si F10 : coché

Q1 : Observer le spectre. Que remarquez-vous de "curieux" ?

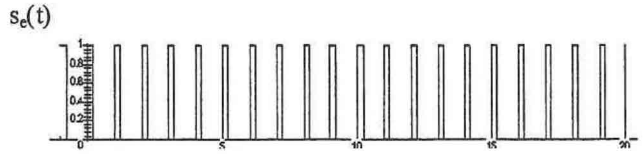
1.2. Observation du repliement

La présence de deux fréquences entre 0 et F_E dans le spectre provient de l'échantillonnage à la fréquence F_E. Ces deux fréquences amènent une limitation dans l'interprétation du spectre donné par une FFT : commençons par une observation de l'effet de l'augmentation de la fréquence de la tension sinusoïdale produite par le GBF.

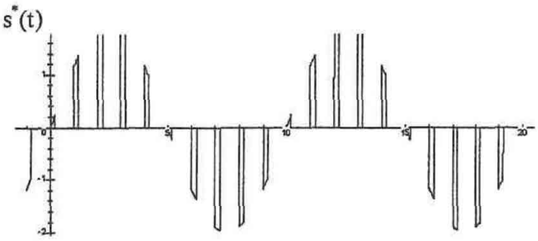
Faire plusieurs observations à des fréquences croissantes jusqu'à s'approcher de 200 kHz. (il suffit de modifier la fréquence et d'appuyer sur F10)
Q2 : Observer et commenter l'évolution du spectre affiché par Latis-Pro.

Eléments théoriques :

Le signal numérisé résulte donc (pour l'aspect temporel) de la multiplication de la sinusoïde par un signal rectangulaire dissymétrique d'amplitude 1 à la fréquence d'échantillonnage F_E :

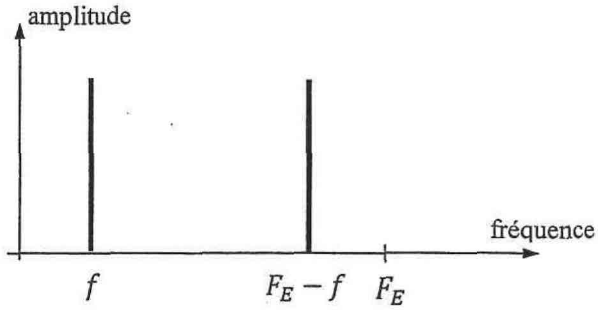


On obtient donc un signal du type :

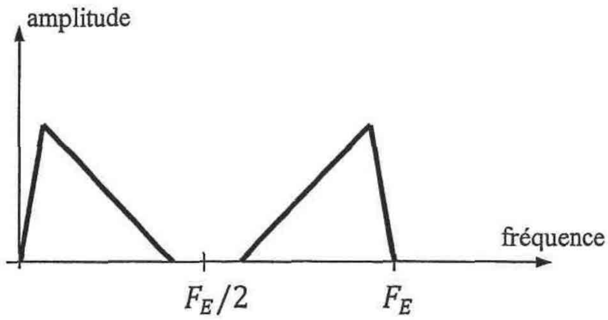


Le créneau dissymétrique peut être décomposé en série de Fourier $s_{échant} = \langle s_{échant} \rangle + \sum_n a_n \cos(n\omega_E t)$ si on choisit bien l'origine des dates pour avoir une fonction paire.
Le signal résultant est le produit de cette fonction par la fonction $\cos(\omega t)$ où ω est la pulsation du signal que l'on étudie.
La fonction produit fait donc apparaître pour les premiers termes la fonction $\cos(\omega t)$ qui donne la "bonne" valeur pour l'analyse spectrale, mais aussi $\cos(\omega t).\cos(\omega_E t)$ qui est la somme de $\cos((\omega - \omega_E)t)$ et de $\cos((\omega + \omega_E)t)$ qui font apparaître dans le spectre les pulsations $\omega_E - \omega$ et $\omega_E + \omega$.

En conclusion, en ne s'intéressant qu'aux premiers termes, on a déjà trois fréquences qui apparaissent dans l'analyse spectrale : f, $|F_E - f|$ et $F_E + f$.
On s'aperçoit aussi que les deux premières (dans l'intervalle [0, F_E]) vont se recouvrir pour $f = F_E - f$ soit $f = \frac{F_E}{2}$.
Pour un signal mono fréquentiel :



Pour un signal plus riche en harmoniques avec $f_{max} < \frac{F_E}{2}$:



Tout se passe comme si on avait replié le spectre de la partie droite sur la partie gauche : ce phénomène est appelé *aliasing* ou *repliement du spectre*.

On s'aperçoit que la partie du spectre inférieure à la fréquence $\frac{F_E}{2}$ constitue la meilleure représentation du spectre réel de la fonction étudiée, à la condition d'éviter un recouvrement des parties représentées ci-dessus : c'est le théorème de SHANNON :

Un signal ayant un spectre de fréquence "maximale" B est reconstitué fidèlement en technologie numérique lorsque la fréquence d'échantillonnage vérifie $F_E > 2.B$.

On peut aussi voir ce résultat d'une autre façon : pour reconstituer correctement un signal analogique périodique il faut au ***minimum deux points d'échantillonnage par période***.

1.3. Analyse quantitative :

Q3 : Reprendre les réglages précédents (en particulier bien noter la fréquence d'échantillonnage à 200 kHz).
Faire varier la fréquence de la tension sinusoïdale du GBF et noter les valeurs des fréquences des raies affichées par Latis-Pro dans la fenêtre 0, $F_E/2$ (qui est la fenêtre par défaut des analyseurs de spectres numériques).

Fréquence du signal (kHz)	80	95	105	120	220

Noter les fréquences mesurées au réticule. Commenter.

La tension produite par le GBF est maintenant un signal créneau symétrique centré sur 0, dont on connait la décomposition en série de FOURIER (cf annexe à ce TP). On fixe la fréquence à 15 kHz.

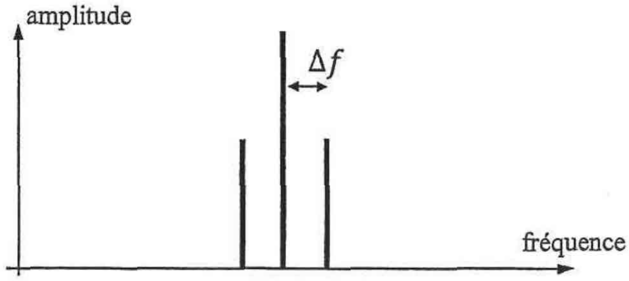
Q4 : Faire l'analyse spectrale de ce signal. En particulier, on mesurera la fréquence des harmoniques. On comparera qualitativement les amplitudes des harmoniques pour un signal créneau d'une part et pour un signal triangulaire d'autre part.

Q5 : Quelle fréquence d'échantillonnage minimale faut-il choisir pour observer toutes les composantes jusqu'à l'harmonique de rang 11 ? Le vérifier. $F_e > 2B$

Que remarque-t-on du point de vue précision de mesure pour les fréquences élevées ?

Ce phénomène porte le nom de *pertes spectrales*, les raies attendues se transforment en un "paquet" et l'amplitude de la raie principale diminue. Pour pallier ce problème, on multiplie le signal à analyser par une fonction temporelle, qu'on appelle fenêtre de pondération. Latis-Pro propose plusieurs fenêtres, chacune étant adaptée à une caractéristique du spectre obtenu (amplitude, fréquence des harmoniques).
Par exemple : La fenêtre de HAMMING donne la bonne amplitude, et réduit les pics secondaires, alors que la fenêtre de BLACKMAN donne une meilleure résolution en fréquence.

Optimisation de la résolution en fréquence :
Le logiciel choisit par défaut ("sélection de périodes automatiques") un nombre entier de périodes pour effectuer le calcul (ou en tout cas une durée proche d'un nombre entier de périodes). Cette durée intervient directement dans la résolution (ou la précision Δf) des mesures de fréquences.
En zoomant sur les raies obtenues dans le spectre, on obtient un résultat de ce type :



$|200 - 220|$
$= 20$

On travaille avec un signal sinusoïdal à 1 kHz en fenêtre Hamming. Faire un tableau de mesures pour différentes durées d'acquisition $T_{acquisition}$ (mais toujours avec 1024 points) dans lequel apparaissent $\Delta f_{mesuré}$ et $T_{acquisition}$.

Q6 : Déterminer une relation simple entre ces deux grandeurs.

Q7 : Comment faire pour réduire la valeur de Δf ? Quels sont les problèmes qui se posent alors ? Conclure.

2. Filtrage d'un signal créneau

2.1. Analyse du montage

On utilise le filtre "C". Brancher l'alimentation +15V, 0, –15V.

Q8 : Déterminer expérimentalement la nature du filtre.

Q9 : Déterminer expérimentalement la fréquence de résonance f_0 par la méthode de votre choix (à expliquer). Déterminer expérimentalement par la méthode de votre choix (à expliquer) le gain maximum H_0 et le facteur de qualité Q.

Expliquer vos protocoles, donner et commenter vos résultats.

2.2 Analyse spectrale du signal créneau filtré.

On veut comparer les spectres du signal d'entrée et du signal de sortie.

Les spectres se feront directement à l'oscilloscope : bouton « math », puis sélectionner « FFT » puis dans « autre FFT » sélectionner l'échelle linéaire. Retour et enfin sélectionner le centre de la fenêtre et la plage d'analyse.

Pour imprimer les signaux, on fera une copie d'écran de l'oscilloscope (on n'oubliera pas d'inverser les couleurs pour économiser l'encre).

Brancher le signal d'entrée $v_e(t)$ et le signal de sortie $v_s(t)$ du filtre sur l'oscilloscope.
Choisir un signal créneau de fréquence $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$.
Réaliser l'acquisition et l'analyse de FOURIER des deux signaux.

Q10 : Mesurer l'amplitude du fondamental de chaque signal et conclure.

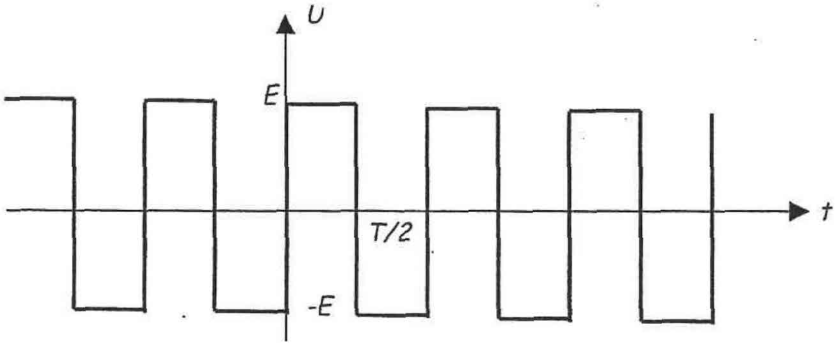
Choisir des signaux créneaux de fréquence inférieure et supérieure à f_0.
Réaliser comme précédemment l'analyse des signaux d'entrée et de sortie en superposition.

Q11 : Conclure.

Q12 : Est-ce que le filtre se comporte en intégrateur ou en dérivateur ? Dans quelles zones de fréquences ?

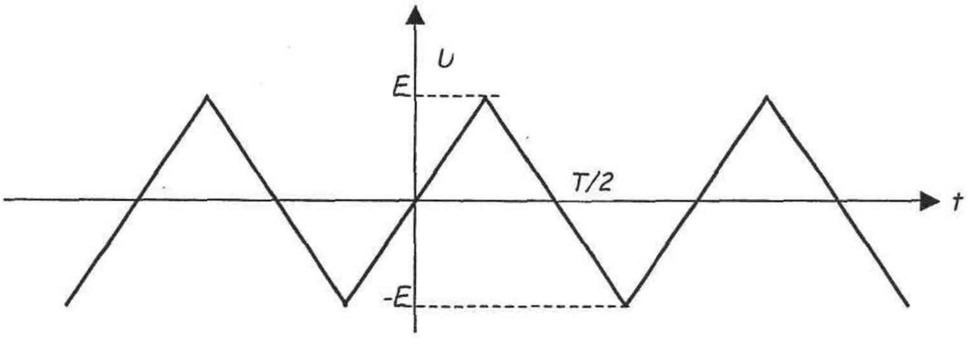
ANNEXE : SPECTRES DE QUELQUES SIGNAUX SIMPLES.

1. Signal rectangulaire.



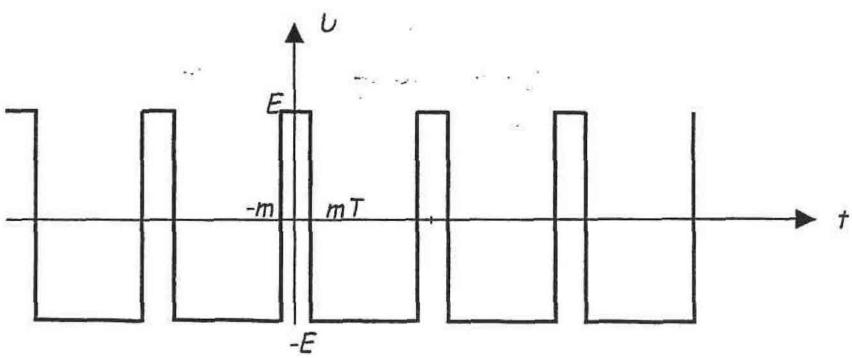
$$U(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4E}{\pi} \frac{\sin((2n+1)\omega t)}{(2n+1)} \quad \text{où } \omega = \frac{2\pi}{T}.$$

2. Signal triangulaire.



$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8E}{\pi^2} (-1)^n \frac{\sin((2n+1)\omega t)}{(2n+1)^2} \quad \text{où } \omega = \frac{2\pi}{T}.$$

3. Impulsion.

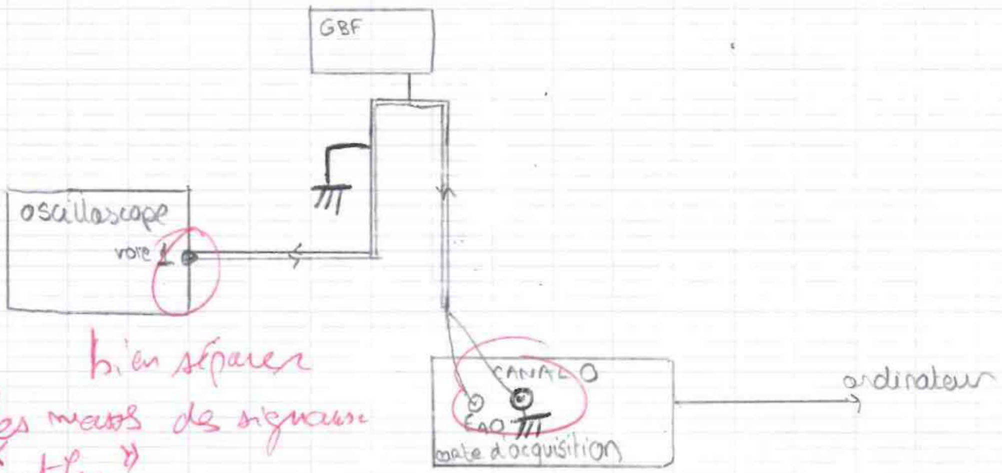


MARPAUX Lucie
MAJESTÉ Justine

Echantillonnage, analyse fréquentielle, filtrage

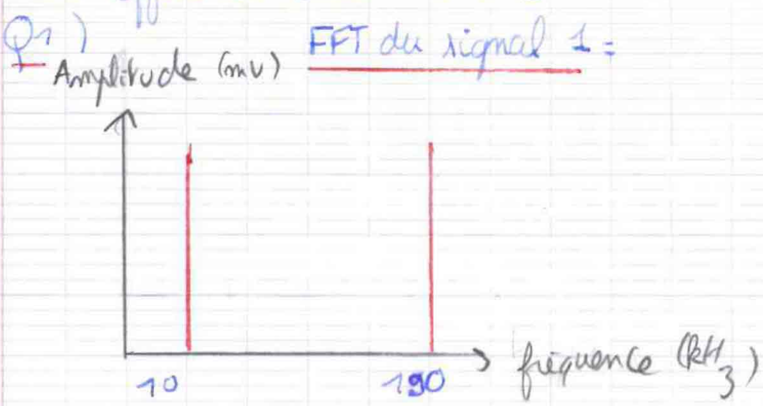
(A-) TB dans l'ensemble.
Qq graphs intéressants à tracer en plus.

schéma de montage 1 : acquisition signaux sur Latis Pro et oscilloscope



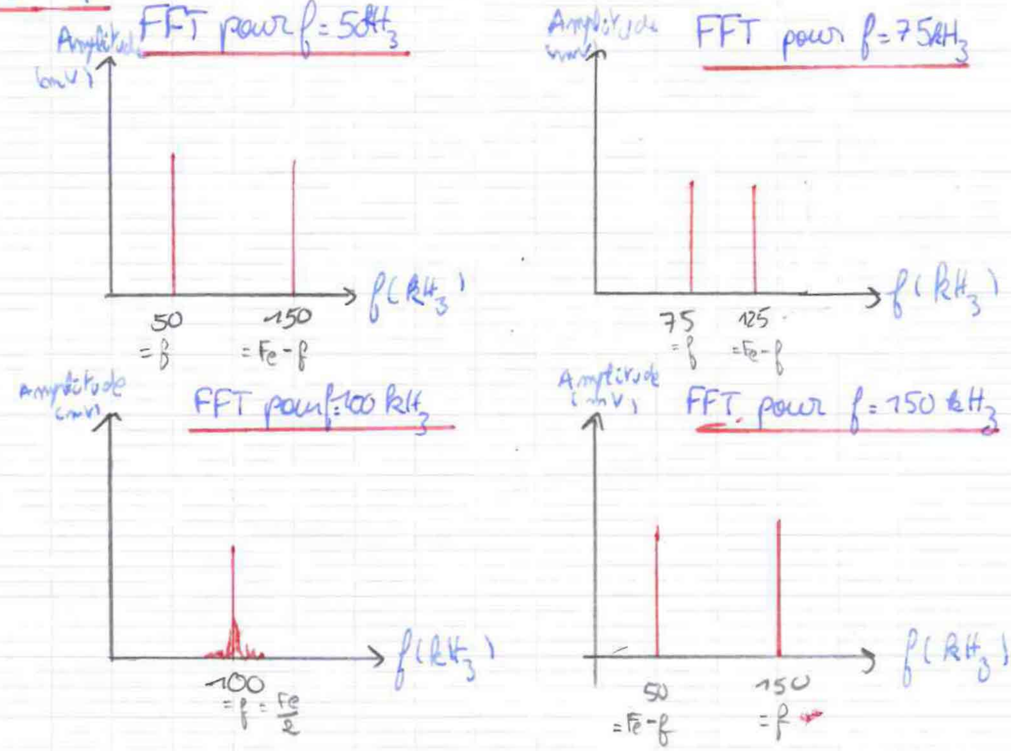
bien séparer
les masses des signaux
« utiles »

1ère aquisition :
GBF → signal de 1 V_{pp} et $f = 10$ kHz
Sur l'oscilloscope et après aquisition on observe une sinusoïde de fréquence 10 kHz.
On effectue une FFT :
Q1) FFT du signal 1 :



On devrait observer seulement le fondamental car le signal est sinusoïdale or ici on observe en plus des fondamental une fréquence très élevée de même amplitude.

Q2 + Q3 :



f = fréquence du fondamental

F_e = 200 kHz fréquence d'échantillonnage

Pour obtenir le signal numérisé on multiplie la sinusoïde envoyée par un signal rectangulaire de fréquence F_e et dont la décomposition de Fourier s'écrit : $\sum a_n \cos(n\omega_e t)$.

→ le signal en sortie sur Latis Pro est le produit de 2 cos : $\cos(\omega t)$ et $\cos(\omega_e t)$

→ ce produit fait apparaître des $\cos(\omega_e - \omega t)$ et $\cos(\omega + \omega_e t)$

Dans la fenêtre de fréquence $[0, F_e]$ on voit donc apparaître : f et $F_e - f$.

ces 2 signaux sont symétriques par rapport à $\frac{F_e}{2}$ jusqu'en $f = \frac{F_e}{2}$ où ils sont confondus → ce phénomène est le phénomène de repliement.

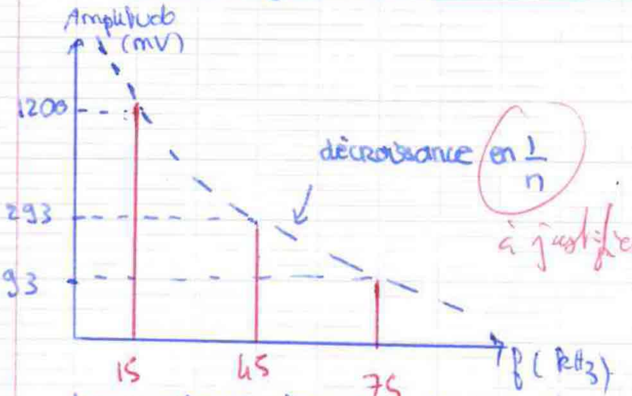
Fréquence du signal (kHz)	80	95	105	120	220
Harmonique observé (kHz)	80	95	95	80	20

Les valeurs confirment notre explication.

tracer an en fonction de $\frac{1}{n}$ → droite oui à faire.

Q4)

FFT signal crénau symétrique centré sur 0 $f = 15$ kHz

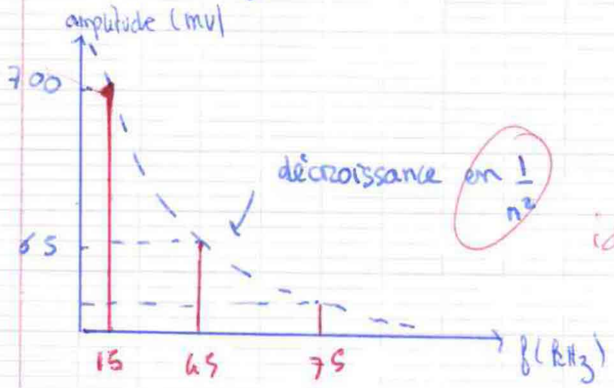


à justifier svp.

harmoniques impaires seulement

→ pour vérifier qu'on a bien une décroissance en $\frac{1}{n}$ on trace amplitude en fonction de $\frac{1}{n}$ → obtenir une droite

FFT signal triangulaire symétrique centré sur 0 $f = 15$ kHz



idem

→ pour avoir triangle sur GBF: Ramp → symétrie → 50%

Q5

On s'arrange pour que la fréquence maximale des harmoniques soit $< \grave{a}\ \frac{Fe}{2}$ pour éviter d'être "pollué" par le phénomène de repliement.

ici $f = 15$ kHz $\quad \frac{Fe}{2} > 165$ kHz

$f_{11} = 165$ kHz $\quad \Rightarrow \boxed{Fe > 330 \text{ kHz}}$

. Pour des fréquences élevées : on n'observe plus une raie nette mais un "paquet" apparaît autour de la raie :

- Analyse signal sinusoïdal de 80 kHz avec fonction Hamming, Blackman et sans rien : voir **diagramme** en annexe (p 2 et 3)

Hamming et Blackman permettent d'éliminer les "paquets" de raies. Hamming marche mieux en fréquences. (meilleure précision)
Blackman marche mieux, est plus précis en amplitudes.
Pondération permet de faire des calculs numériques plus faciles et plus propre

$T_{acquisition}$ (µs)	$\Delta f_{mesuré}$ (kHz)	$T_{ac} \times \Delta f$
10	100	1
200	5	1
50	20	1
100	10	1

$\Delta f = \frac{f_e}{N}$ → $\boxed{\Delta f \times N T_e = cst}$ Fourier — $f_e \searrow$ pour être ⊕ précis

$\boxed{f_{max} \leq \frac{f_e}{2}}$ Shannon — $f_e \nearrow$ pour être ⊕ précis

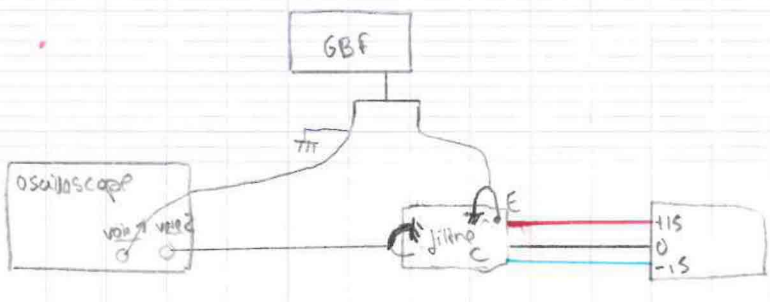
on obtient bien $\Delta f \times T_e = cst$

Pour réduire Δf il faut diminuer f_e (ou augmenter nb de points)
→ on a alors un paradoxe avec Shannon : $f_{max} \leq \frac{f_e}{2}$ qui veut que $f_e \nearrow$ pour être plus précis.

oui TP

2. Filtrage d'un signal créneau

Schéma de montage pour déterminer nature du filtre C :



Q8 :

On balaye manuellement les fréquences sur le GBF de $10\,Hz$ à $100\,kHz$

on observe : très basses fréquences atténuées et signal dérivé (triangle devient créneau)

très hautes fréquences atténuées et signal intégré (créneau devient triangle)

$\Rightarrow$ passe-bande

Q9

Pour trouver la fréquence de résonance : on cherche manuellement un maximum d'amplitude $\rightarrow$ (si entrée et sortie sont en phases on peut pour être plus précis utiliser méthode Lissajous).

on trouve : $\boxed{f_0 = 6,8\,kHz}$

comme on envoie une sinusoïde :

$$H_0 = \frac{V_s}{V_e} = \frac{7,4}{1,7} = 4,4$$

$\rightarrow \underline{H}(jx) = \dfrac{H_0}{1 + jQ(x - \frac{1}{x})}$ à $x = 1 \rightarrow f = f_0$ $\boxed{\underline{H}(j\omega_0) = H_0}$

mesuré à f_0

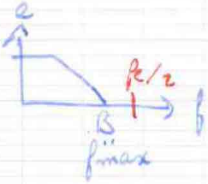
- $\Delta\omega = \dfrac{\omega_0}{Q}$ $\rightarrow$ largeur de la bande passante

on l'obtient on balayant manuellement les fréquences autour de f_0

ok

Correction :

★ Th. Shannon



$B \leq \dfrac{f_e}{2}$ $f_e \nearrow$

★ Th. Fourier $\Delta f \times \Delta t \# 1$ $\Delta f_e = \dfrac{f_e}{N}$ $f_e \searrow$

$T_{acq} = N T_e$

Pour le montrer : $\Delta f = F\left(\dfrac{1}{T_{aq}}\right)$ si c'est une droite $\Rightarrow$ c'est bon