

# Propagation d'ondes dans un câble coaxial.

## Objectif :

- Manipuler de façon concrète quelques concepts de base de la propagation des ondes dans un câble coaxial.
- Etudier la propagation d'impulsion de tension dans un câble coaxial ; mettre en évidence les phénomènes de réflexion et d'atténuation dans le câble.
- Mesurer les différentes vitesses de propagation de différents types d'onde dans le câble.
- Etudier les phénomènes de résonances en tension dans le câble.



= Appel professeur

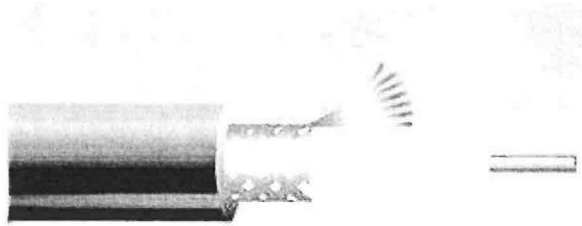


= A travailler impérativement avant le TP

Questions T théoriques et P pratiques ou expérimentale

## I. Résultats théoriques (à établir ...)

Un câble coaxial est constitué de deux conducteurs de même axe Ox : un cylindre plein (l'âme) et une tresse cylindrique d'épaisseur négligeable (la gaine). Le conducteur central sert à amener un courant électrique et la tresse extérieure en assure le retour (jouant le rôle de masse).



La longueur du câble utilisée fait qu'on ne peut plus négliger le temps de propagation du signal le long de la ligne : on adopte alors un modèle dit à constantes réparties : le câble est caractérisé par sa capacité linéique  $\gamma$ , et son inductance linéique  $\lambda$ .

### 1.1. Propagation dans une ligne idéale.

T1. Considérant une ligne sans perte caractérisée par son inductance par unité de longueur  $\lambda$  et par sa capacité par unité de longueur  $\gamma$ , établir les équations de d'Alembert en  $i(x,t)$  et  $u(x,t)$ .

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = \gamma \lambda \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

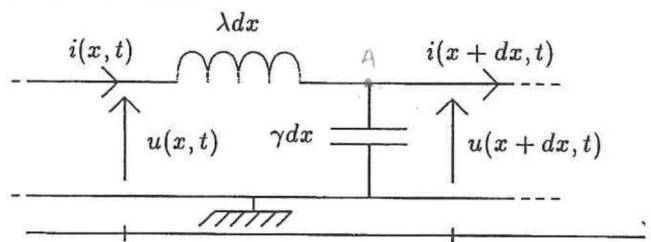
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \gamma \lambda \frac{\partial^2 i}{\partial t^2}$$

- La solution générale du système différentiel obtenu

$$\text{est : } \begin{cases} u(x,t) = f(x-Vt) + g(x+Vt) \\ i(x,t) = \frac{1}{Z_c} f(x-Vt) - \frac{1}{Z_c} g(x+Vt) \end{cases}$$

$V = 1 / \sqrt{\lambda \cdot \gamma}$  est la vitesse de phase de l'onde ;

$Z_c = \sqrt{\frac{\lambda}{\gamma}}$  est l'impédance caractéristique du câble.



T2. Vérifier l'homogénéité.

- Soit la ligne est infinie, soit elle est fermée en  $x = L$  sur une impédance. Au niveau de cette impédance l'onde subit une réflexion et une transmission a priori.

L'impédance de ligne en un point d'abscisse quelconque  $x$  et à l'instant  $t$  est :

$$Z(x,t) = \frac{u(x,t)}{i(x,t)} = Z_c \cdot \frac{f(x-Vt) + g(x+Vt)}{f(x-Vt) - g(x+Vt)}$$

- Si la ligne est infinie l'impédance de ligne est indépendante du point considéré et du temps:  $Z(x,t) = Z_c$

- Si la ligne de longueur  $L$  est fermée par une impédance  $Z(L,t) = Z_c$ , il y a adaptation d'impédance : il n'y a pas de réflexion et l'impédance de ligne  $Z(x,t) = Z_c$  comme si la ligne était infinie ; l'impédance terminale absorbe toute l'énergie transportée.

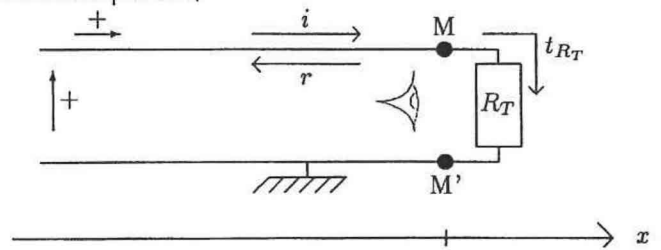
## 1.2. Réflexion et transmission sur un obstacle en régime quelconque.



- Dans ce qui suit, nous aborderons deux situations particulières permettant des mesures et des interprétations simples. L'obstacle se comporte comme une résistance pure  $R_T$

- Ceci englobe deux situations :

soit la ligne s'arrête sur cet obstacle, résistance pure  $R_T$  ;  
soit la ligne se poursuit au-delà de  $MM'$  par une autre ligne ou plusieurs: l'obstacle est alors le passage d'une ligne à l'autre ou d'une ligne à plusieurs lignes et la partie en aval de  $MM'$  est équivalente à une impédance  $R_T$ .



- Sur l'obstacle  $MM'$  les relations entre les différentes grandeurs sont les suivantes :

$$\begin{cases} \forall(x,t), u(x,t) = u_i(x,t) + u_r(x,t) \\ \forall(x,t), i(x,t) = i_i(x,t) + i_r(x,t) = \frac{1}{Z_c} u_i(x,t) - \frac{1}{Z_c} u_r(x,t) \\ \forall t, u(x=0,t) = R_T \cdot i(x=0,t) = u_T(x=0,t) \end{cases}$$

T3. En déduire les coefficients de réflexion  $r_u$  et de transmission  $t_u$  en tension sur l'obstacle :

$$r_u = \frac{u_r}{u_i} = \frac{R_T - Z_c}{R_T + Z_c}$$

$$t_u = \frac{u_t}{u_i} = \frac{2R_T}{R_T + Z_c}$$

T4. Discuter des cas particuliers suivant :  $R_T = 0$ ,  $R_T = \infty$ ,  $R_T = Z_c$ .

Remarque : en régime sinusoïdal, ces expressions sont encore valables avec  $R_T$  qui devient  $\underline{Z}_T$ .



## 1.3. Propagation du signal électrique dans le cas d'une ligne résistive.

- On suppose désormais que le câble est en plus modélisé par une résistance linéique  $r$ , en série avec la bobine linéique, pour tenir compte des dissipations. Le courant et la tension sont solution de l'équation de propagation suivante :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \gamma \lambda \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + r \gamma \frac{\partial u}{\partial t}$$

T6. Exprimer la célérité  $V$  des ondes se propageant dans la ligne idéale.

- On cherche des solutions à l'équation précédente sous forme d'ondes planes progressives harmoniques complexes du type :  $\underline{u}(x,t) = U_0 \exp[j(\omega t - \underline{k}x)]$  avec  $\underline{k} = k' + jk''$  avec  $k' > 0$ .

T7. Le terme dû à la résistance linéique étant supposé *petit devant l'autre*, montrer que :

$$k' \approx \frac{\omega}{V} \text{ et } k'' \approx -\frac{1}{2} r V \gamma$$

T8. Caractériser la propagation en précisant si elle est : absorbante ? dispersive ?

$r'' > 0$        $k'' > 0$

## II. Manipulations.

### 2.1. Propagations d'impulsions et vitesse de groupe : régime impulsionnel.

#### 1. Utilisation du générateur d'impulsions.

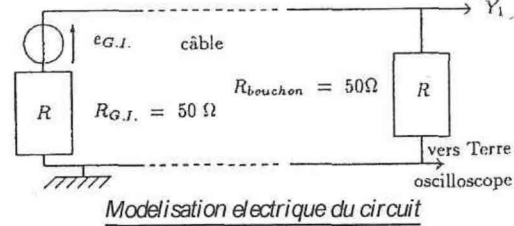
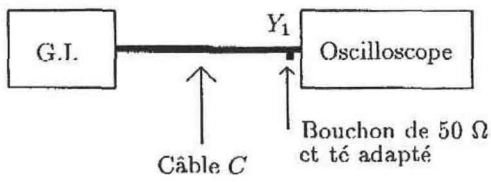
Réaliser le montage ci-dessous utilisant :

- un oscilloscope numérique HP 54603B,
- un câble coaxial BNC *court (1m) noir* pour oscilloscope noté C (classique),
- un générateur BF HP 33220A d'impédance de sortie  $50 \Omega$  (à vérifier) utilisé en générateur

d'impulsions : il s'agit de délivrer des salves d'impulsions créneau de largeur 100 ns, avec une fréquence de l'ordre de 100 Hz (réfléchir au choix de cet ordre de grandeur), niveau bas 0 V, niveau haut 5 V, High Z.

A l'entrée de l'oscilloscope, en parallèle sur le signal, on place une résistance de  $50 \Omega$ . Usuellement on emploie le mot "bouchon de  $50 \Omega$ " pour désigner ce branchement d'ailleurs réalisé avec l'aide d'un té adapté.

Schéma du montage

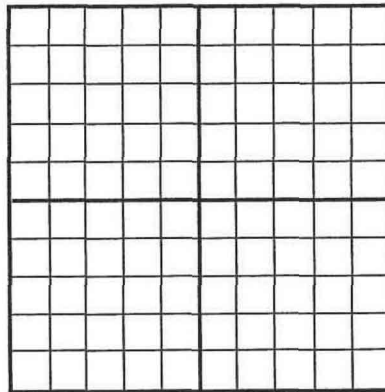


- Visualiser ou imprimer le signal obtenu, mesurer sa largeur et son niveau maximum.

- Pour voir le rôle du bouchon utilisé, le circuit étant sous tension, enlever le bouchon et observer le signal obtenu sur l'oscilloscope.

P1. Interpréter la forme du signal (régime pseudo périodique) et son niveau (notion de pont diviseur de tension ou non).

Remettre le bouchon pour toute la suite de la manipulation, il va jouer un rôle important.



Titre :

Observations :

sensibilité horizontale :

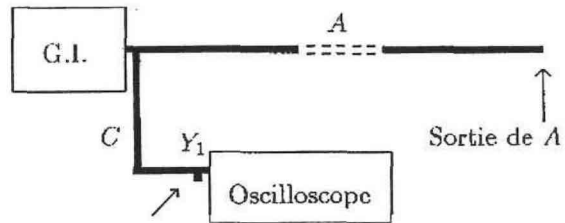
sensibilité voie 1 :

sensibilité voie 2 :

**Propagation dans la ligne A (noir et long)**

- On complète le montage précédent avec un adaptateur en té à la sortie du générateur d'impulsions et en branchant à ce niveau la ligne A.

- Les impulsions ont typiquement les valeurs préconisées précédemment.



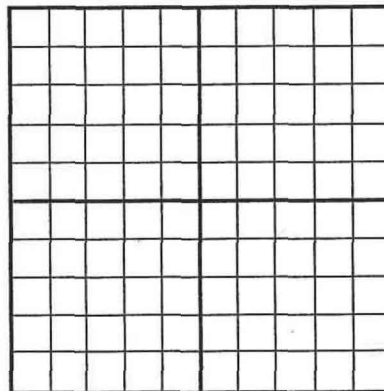
**2. Ligne A ouverte en sortie.**

- Donner ou imprimer l'allure de l'oscillogramme obtenu.

P2. Interpréter qualitativement le niveau de la première impulsion rectangulaire observée par rapport à celui observé en absence de ligne A.

P3. Décrire la deuxième impulsion : origine physique, signe, niveau. Le milieu est-il dispersif?

P4. Mesurer l'écart temporel  $\Delta t$  séparant les deux impulsions ? En déduire la vitesse de propagation dans la ligne. Est-ce la vitesse de phase ou la vitesse de groupe ?



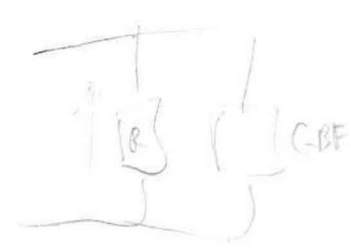
Titre :

Observations :

sensibilité horizontale :

sensibilité voie 1 :

sensibilité voie 2 :

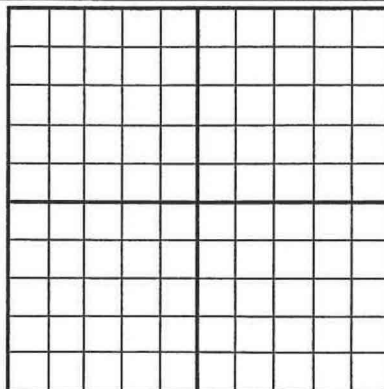


P5. En supposant que le milieu soit non dispersif, c'est-à-dire en supposant  $V_g = V_{\phi}$ , calculer la permittivité du diélectrique et comparer cette valeur à celle donnée dans les caractéristiques techniques en annexe. On

donne  $\epsilon_r = r^2 = \left( \frac{c}{v_{\phi}} \right)^2$ . Ligne A en court-circuit en sortie (à traiter qualitativement et rapidement).

- Noter ou imprimer l'allure de l'oscillogramme obtenu.

P6. Interpréter le changement de signe lors de la réflexion du signal.



Titre :

Observations :

sensibilité horizontale :

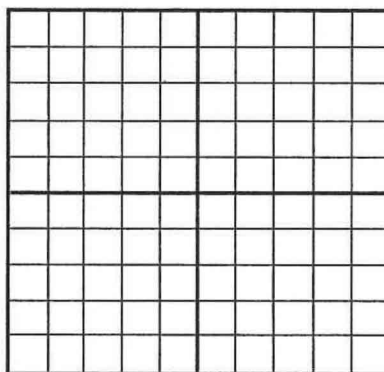
sensibilité voie 1 :

sensibilité voie 2 :

### 3. Mise en évidence expérimentale de l'impédance caractéristique (à traiter rapidement).

- En sortie la ligne A est fermée sur un potentiomètre de 100  $\Omega$  réglable.

- Observer que le signal retour disparaît pour une certaine valeur de  $R_L$  que l'on déterminera (à l'ohmètre, bien réfléchir au protocole de mesure).



Titre :

Observations :

sensibilité horizontale :

sensibilité voie 1 :

sensibilité voie 2 :

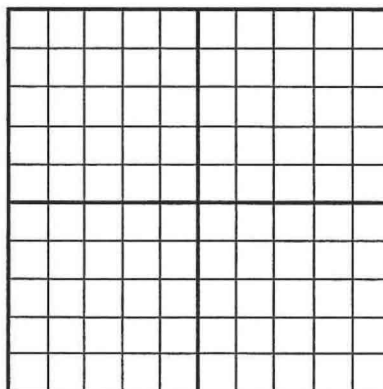
P7. Expliquer l'intérêt d'avoir mis un bouchon de 50  $\Omega$  à l'entrée de l'oscilloscope et d'avoir une impédance de sortie de 50  $\Omega$  pour le générateur d'impulsions.

### 4. Etude complémentaire de la ligne fermée sur son impédance caractéristique.

On complète le montage précédent avec un adaptateur en té placé à la sortie de la ligne A ; ce té permet aussi d'envoyer le signal de fin de ligne sur la 2<sup>ème</sup> voie de l'oscilloscope. Ainsi on observe simultanément les signaux aux deux extrémités de la ligne.

- Relever ou imprimer les oscillogrammes sur les deux voies Y1 et Y2.

- Mesurer l'écart temporel et vérifier que sa valeur est conforme aux résultats précédents.



Titre :

Observations :

sensibilité horizontale :

sensibilité voie 1 :

sensibilité voie 2 :

## 2.2. Propagation d'un signal sinusoïdal et vitesse de phase : régime harmonique.

- On utilise comme source un générateur basses fréquences (G.B.F.) en **mode sinusoïdal** et l'on étudie  $\Delta t$ , le retard temporel du signal en bout de ligne par rapport à l'entrée. Ce retard temporel se traduit par un retard de phase.
- Pour cette expérience la ligne A est fermée sur son impédance caractéristique : justifier ce choix.
- En déduire la vitesse de phase de l'onde dans la ligne A. Présenter les résultats dans un tableau du type suivant :

Fréquence (kHz)	100	200	400	600	800	1000	1500
$\Delta t$ (ns)	600	346	280	270	260	274	269
$\Delta \varphi$ (rad)	0,37	0,21	0,19	0,169	0,163	0,17	0,168
$k$ (m <sup>-1</sup> )	$7,65 \cdot 10^{-3}$	$4,22 \cdot 10^{-3}$	$3,68 \cdot 10^{-3}$	$3,35 \cdot 10^{-3}$	$3,22 \cdot 10^{-3}$	$3,4 \cdot 10^{-3}$	$3,33 \cdot 10^{-3}$
Vitesse de phase (m.s <sup>-1</sup> )	$2,4 \cdot 10^7$						

- Tracer le graphe des variations de la vitesse de phase avec la fréquence.

P8. Discuter des résultats obtenus, en particulier :

variation de la vitesse de phase avec la fréquence ; tracer la courbe  $v_\varphi = f(\text{fréquence})$

dispersion du milieu et origine de cette dispersion ; tracer la courbe  $\omega = g(k)$

comparaison des vitesses de phase et de groupe, comparaison à la vitesse de la lumière dans le vide.

- Pour les graphes, utiliser un tableur (EXCEL ou REGRESSI) ou directement du papier millimétré.

- Ce câble peut être utilisé pour relier un émetteur ou un récepteur Wifi à une antenne. La fréquence utilisée est de 2,40 GHz. Les phénomènes de dispersion sont-ils gênants pour cette application ?

## 2.3. Onde stationnaire.

- L'entrée du câble est toujours directement branchée à la sortie du GBF qui délivre une tension sinusoïdale de fréquence  $f$  qu'on fera varier de 1 à 10 MHz environ.

- Les expériences précédentes ont montré que la réflexion se faisait avec changement de signe quand la ligne est **court-circuitée**. S'il n'y avait pas d'absorption/atténuation, la superposition des ondes incidente et réfléchie conduirait à une tension le long du câble du type, en considérant une ligne rectiligne entre les abscisses  $x = 0$  (générateur) et  $x = L$  (charge de résistance  $R_T$  pour un court-circuit  $R_T = \dots$ ) :

$$\begin{cases} u(x,t) = 2U_0 \sin(\omega t - kL) \cdot \sin[k(x-L)] \\ i(x,t) = 2 \frac{U_0}{Z_c} \cos(\omega t - kL) \cdot \cos[k(x-L)] \end{cases}, \text{ avec } k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{v_\varphi}$$

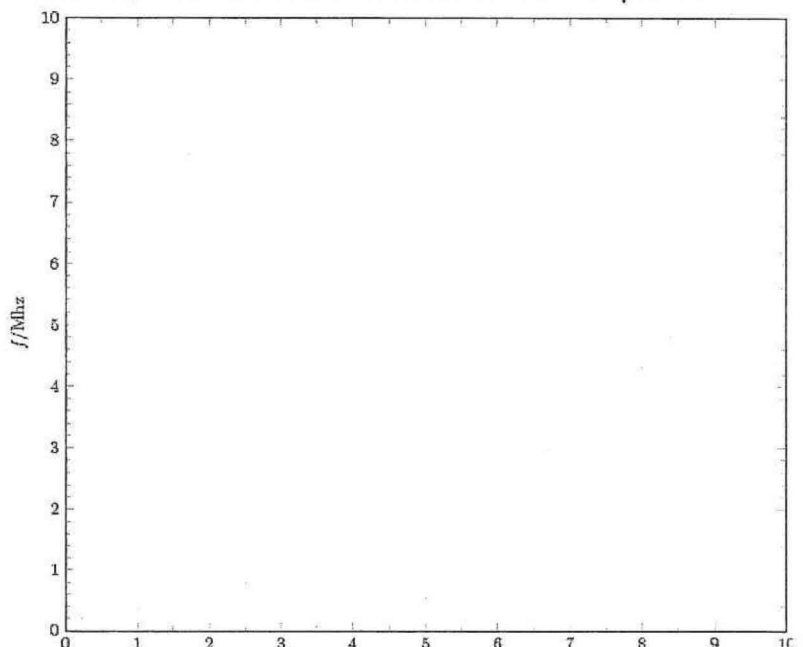
On reconnaît une onde stationnaire avec nœuds et ventres de tension ou intensité.

T9. En court-circuit ( $R_T = \dots$ ), l'extrémité  $x = L$  est un nœud de ....., un ventre de .....

On observe un phénomène de **résonance** lorsque l'extrémité  $x = 0$  est un ventre de tension : montrer que l'on peut alors écrire :

$$L = \left(p + \frac{1}{2}\right) \frac{v_\varphi}{2f}$$

- Relever les fréquences de résonance en  $x = 0$ , et les fréquences correspondant aux minima (nœuds de tension), quand la ligne est court-circuitée en  $x = L$ . Placer les fréquences de résonance de la ligne en fonction de  $p$  sur le graphique ci-contre.



P9. En déduire une valeur de la vitesse de propagation des ondes dans le câble.

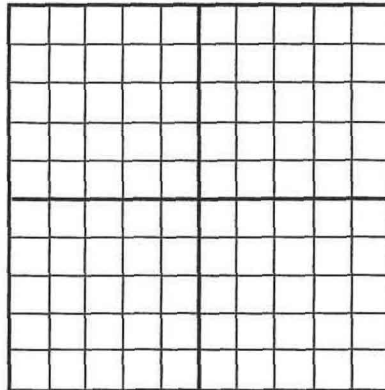
P10. Avec quelle autre expérience d'onde

mécanique peut-on faire une analogie ?

#### 2.4. Atténuation du signal (étude complémentaire).

Réaliser le montage du II.2.1. avec la ligne B (câble TV vert). On utilise la ligne B car elle présente un plus faible amortissement que la ligne A ; nous serons ainsi plus proches du modèle théorique.

- On observe l'entrée de la ligne B, avec la ligne courte (1m), et on connecte directement l'autre extrémité du câble à l'oscilloscope via un té de  $75\Omega$  et un bouchon de  $75\Omega$ .
- Observer les impulsions.
- Relever ou imprimer l'allure d'un oscillogramme avec les signes, les niveaux et les intervalles de temps observés.



Titre :

Observations :

sensibilité horizontale :

sensibilité voie 1 :

sensibilité voie 2 :

#### Interprétation théorique :

T10. On notera  $\alpha$  le facteur d'atténuation (pour le moment inconnu) lié à la propagation de l'onde pour une longueur  $L$  de câble. Évaluez ce rapport d'amplitude. L'amortissement est défini par le coefficient :

$$\beta = \frac{1}{L} \cdot 20 \log \left( \frac{u(x=L)}{u(x=0)} \right) \text{ et s'exprime en dB/m. En déduire sa valeur expérimentale.}$$

Sachant qu'une O.P.P.H. *légèrement amortie*, de pulsation, de pulsation  $\omega$ , peut s'écrire :

$$u(x,t) = U_0 e^{-\alpha x} \cdot \cos(\omega t - k'x) \quad .$$

T11. Montrer en vous aidant de l'étude théorique de I1.3. que l'on a :  $\alpha \approx \frac{r}{2Z_c}$  avec  $r$ , la résistance linéique et  $Z_c$  la résistance caractéristique du câble.

P11. Faire l'application numérique et comparer aux données du constructeur.

La résistance du câble, mesurée à l'ohmmètre, donc en courant continu, conduit à une valeur de  $r$  bien inférieure à la valeur déduites des mesures. Cette différence vient d'un effet inductif appelé *effet de peau* dû à une mauvaise pénétration du signal dans le câble, qui circule essentiellement à la surface du conducteur.

## Annexe : données techniques des câbles utilisés

Dans cette manipulation trois types de câbles coaxiaux sont utilisés, nous les désignerons par A, B et C par la suite. Chacune de ces lignes contient une âme en cuivre dont la section a pour rayon  $R_1$  et une gaine (rayons intérieur  $R_2$  et extérieur  $R_3$ ) type tresse de cuivre ; l'âme et la tresse sont séparées par un manchon diélectrique de polyéthylène plein.

### Données :

◇ Cuivre :	résistivité	$\rho_{Cu} = 1,7 \cdot 10^{-8} \Omega m$
◇ Polyéthylène :	résistivité	$\rho_{PP} = 10^{17} \Omega m$
	permittivité électrique relative moyenne	$\epsilon_r = 2,30$

On peut ainsi calculer pour chaque câble :

◇ la résistance linéique de l'âme (validité : profondeur de peau grande devant  $R_1$  soit  $f \ll 50$  kHz pour les câbles utilisés) :

$$r_{\text{âme}} = \rho_{Cu} \cdot \frac{1}{\pi \cdot R_1^2}$$

et la résistance linéique de la tresse extérieure

$$r_{\text{tresse}} = \rho_{Cu} \cdot \frac{1}{\pi \cdot (R_3^2 - R_2^2)} ;$$

◇  $r$  la résistance linéique en série

$$r = r_{\text{âme}} + r_{\text{tresse}} ;$$

◇  $g$  la conductance linéique associée à la résistance de fuite du condensateur

$$g = \frac{2\pi}{\rho_{PP}} \cdot \frac{1}{\ln(R_2/R_1)} ;$$

◇ la capacité linéique

$$\gamma = 2\pi\epsilon_0\epsilon_r \cdot \frac{1}{\ln(R_2/R_1)}$$

◇ l'inductance propre linéique

$$\lambda = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \ln(R_2/R_1)$$

On en déduit la vitesse de phase

$$V_{\phi} = 1 / \sqrt{\lambda \cdot \gamma} = c / \sqrt{\epsilon_r}$$

et l'impédance caractéristique

$$Z_c = \frac{60}{\sqrt{\epsilon_r}} \cdot \ln(R_2/R_1)$$

Câbles	A : rouleaux noirs de fils fins	B : rouleaux verts	C : câbles coaxiaux noirs
Utilisation	relier des ordinateurs en réseau	fil d'antenne de télévision	prises de tension l'oscilloscope
$Z_c$	50 $\Omega$	75 $\Omega$	50 $\Omega$
$R_1$	0,24 mm	0,3 mm	
$R_2$	0,75 mm	1,85 mm	
$R_3$	1,12 mm	2,42 mm	
$r$	0,10 $\Omega \cdot m^{-1}$	0,062 $\Omega \cdot m^{-1}$	
$g$	65,2 $\cdot 10^{-18}$ S $\cdot m^{-1}$	34,5 $\cdot 10^{-18}$ S $\cdot m^{-1}$	
$\gamma$	102 pF $\cdot m^{-1}$	67 pF $\cdot m^{-1}$	
Atténuation à 1 MHz	6,2 dB / 100 m	1 à 2 dB / 100 m	
Atténuation à 10 MHz	10,8 dB / 100 m	4 dB / 100 m	
Atténuation à 200 MHz	41,0 dB / 100 m	18 dB / 100 m	
Atténuation à 500MHz	69,6 dB / 100 m	27 dB / 100 m à 432 MHz	