LP 19 – Conservation de l'énergie

Manon LECONTE - ENS de Lyon

Dernière mise à jour : 5 mai 2020

Merci à Fënril Montorier, Salambo Dago et Joachim Galiana pour leur précieuse aide.

Mots-clé : travail, puissance, théorème de l'énergie cinétique, théorème de l'énergie mécanique, position d'équilibre, approximation harmonique.
Niveau : BCPST 1
Pré-requis :
- Conservation de l'énergie (énergie mécanique, énergie cinétique, énergie potentielle de pesanteur) [TS]
- Exemples de forces (poids, force de rappel d'un ressort) [BCPST 1]
- Principe fondamental de la dynamique [BCPST 1]
- Le pendule simple [BCPST 1]

Bibliographie :

- Bresson, *Physique-chimie BCPST 1re année* [Niveau : ⋆]
- Sanz, *Physique tout-en-un 1re année MPSI-PCSI-PTSI* [Niveau : ⋆⋆]
- Taillet, *Dictionnaire de physique* [Niveau : ⋆⋆]

Plan proposé

I - Formalisme **2**
- A/ Travail et puissance . . . 2
- B/ Echanges avec l'extérieur . . . 3
- C/ Forces conservatives et non conservatives . . . 4

II - Théorèmes de conservation **5**
- A/ Théorème de l'énergie cinétique . . . 5
- B/ Théorème de l'énergie mécanique . . . 5

III - Mouvement à un degré de liberté **6**
- A/ Type de trajectoire . . . 6
- B/ Positions d'équilibre . . . 7
- C/ Approximation harmonique . . . 7
- D/ Exemple du pendule pesant non amorti . . . 8

Liste de matériel

Oscillations d'un pendule pesant

— pendule à oscillations libres ou forcées ;
— boîtier électronique "Alimentation et mesure" (potentiomètre) ;
— GBF ;
— carte d'acquisition Sysam ;
— ordinateur équipé du logiciel Latispro.

Introduction pédagogique

Ce cours complète les connaissances que les élèves ont acquises dans le secondaire. On va plus loin de par l'utilisation du théorème de l'énergie cinétique et par la résolution d'équations différentielles.

La vision énergétique de la mécanique permettra aux élèves de résoudre simplement les problèmes à une dimension, à l'aide des outils et méthodes qui seront introduits ici.

Ce chapitre clôt la séquence de mécanique du programme de BCPST 1.

Difficultés :
- faire la différence entre force, travail, puissance et énergie ;
- l'énergie mécanique n'est pas constante mais l'énergie se conserve toutefois. Les élèves doivent être conscients que la dissipation de l'énergie mécanique se fait en transfert thermique (qui sera détaillé dans un cours de thermodynamique ultérieur).

Exemples de TD : étude de nouveaux systèmes (par exemple le ressort), avec et sans frottements.

Exemples de TP : étude de systèmes simples tels que le pendule ou le ressort et visualiser l'influence des frottements sur la conservation de l'énergie mécanique.

Introduction

Au lycée, on a décrit qualitativement la conservation de l'énergie mécanique, par transfert d'énergie potentielle en énergie cinétique et inversement.

> **Exemples –** Skieur qui descend une pente.

On a également introduit l'influence des frottements, qui dissipent l'énergie mécanique sous forme de transfert thermique.

Dans ce cours, on va aller plus loin dans la résolution de problèmes à une dimension en utilisant les outils de la mécanique déjà présentés (principe fondamental de la dynamique notamment) et en introduisant de nouveaux outils.

Dans tout le cours, on se place dans un référentiel **galiléen**.

> **Objectifs –** Connaître les théorèmes régissant les transferts d'énergie mécanique. Résoudre un problème de mécanique à une dimension à l'aide d'un traitement énergétique.

I - Formalisme

A/ Travail et puissance

Pour effectuer un raisonnement énergétique, il est nécessaire d'utiliser des grandeurs autres que les forces.

Définition – **Travail :** échange d'énergie dû au déplacement d'un système sous une action extérieure. Il s'exprime donc en joule [J].

On définit ainsi le **travail élémentaire** s'appliquant sur un système pendant $\mathrm{d}t$:

$$\delta W(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \vec{\mathrm{d}l} \tag{1}$$

avec $\vec{F}$ la force qui s'applique sur le système et $\vec{\mathrm{d}l}$ le déplacement infinitésimal du système pendant $\mathrm{d}t$.

On définit également le **travail le long d'une trajectoire** entre les points A et B :

$$W_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}}(\vec{F}) = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \delta W(\vec{F}) = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \vec{F} \cdot \vec{\mathrm{d}l} \tag{2}$$

Définition – **Puissance :** énergie échangée par unité de temps, exprimée en watt [W].

On peut exprimer la **puissance instantanée** :

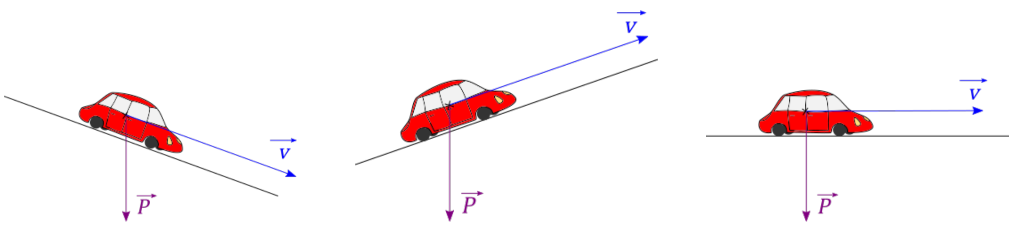
$$\mathcal{P}(\vec{F}) = \frac{\delta W(\vec{F})}{\mathrm{d}t} = \vec{F} \cdot \vec{v} \tag{3}$$

où $\vec{v}$ est la vitesse du système.

B/ Echanges avec l'extérieur

Le signe du travail permet de décrire l'influence de la force sur un mouvement :
- si $\delta W(\vec{F}) > 0$, le travail est moteur (figure 1a) ;
- si $\delta W(\vec{F}) < 0$, le travail est moteur (figure 1b) ;
- si $\delta W(\vec{F}) = 0$, la force ne travaille pas (figure 1c) ;

Remarque – La réaction normale et la tension d'un fil ne travaille systématiquement pas car l'angle entre le vecteur force et le déplacement du système est toujours droit.



(a) Travail moteur. (b) Travail résistant. (c) Travail nul.

Figure 1 – Les différents types de travaux.

On peut également voir l'influence de la force sur le signe de la puissance :

— si $\mathcal{P}(\overrightarrow{F}) > 0$, le système reçoit la puissance de l'extérieur ;
— si $\mathcal{P}(\overrightarrow{F}) < 0$, le système fournit la puissance à l'extérieur.

C/ Forces conservatives et non conservatives

Définition – **Force conservative :** force dérivant d'une énergie potentielle.

Le travail d'une force conservative est **indépendant du chemin suivi**.

On peut alors exprimer la variation élémentaire d'énergie potentielle d'une force conservative :

$$\mathrm{d}E_p = -\delta W(\overrightarrow{F}) = -\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l} \tag{4}$$

Exemples – **Energie potentielle de pesanteur**

$$\mathrm{d}E_{pp} = -m\overrightarrow{g} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l} = +mg\mathrm{d}z \tag{5}$$

si l'on prend un axe Oz ascendant.
On intègre sur l'ensemble de la trajectoire entre les points A et B :

$$E_{pp}(\mathrm{B}) - E_{pp}(\mathrm{A}) = mg(z_B - z_A) \tag{6}$$

que l'on peut réécrire en prenant le point A comme origine et en notant $z_B = z$:

$$E_{pp} = E_{pp}(0) + mgz \tag{7}$$

On observe que l'énergie potentielle de pesanteur est définie à une constante près.

Energie potentielle élastique

$$\mathrm{d}E_{pe} = -(-k(l - l_0)\overrightarrow{e_x}) \cdot \mathrm{d}x\overrightarrow{e_x} = kx\mathrm{d}x \tag{8}$$

en posant $x = l - l_0$. L'élongation à vide est considérée comme l'origine des x.
On intègre entre l'origine et un point M :

$$E_{pe} = E_{pe}(0) + k\int_{\tilde{x}=0}^{x} \tilde{x}\mathrm{d}\tilde{x} = E_{pe}(0) + \frac{1}{2}kx^2 = E_{pe}(0) + \frac{1}{2}k(l - l_0)^2 \tag{9}$$

On parle de **force non conservative** si elle ne vérifie pas les équations précédentes. C'est par exemple le cas des **forces de frottements**, qui implique de plus toujours un travail résistant. On sent en effet que si l'on pousse un objet au sol qui ne peut pas rouler, c'est d'autant plus dur que la distance à parcourir est longue.

II - Théorèmes de conservation

A/ Théorème de l'énergie cinétique

Définition – Théorème de l'énergie cinétique : la variation d'énergie cinétique d'un système entre deux instants est égale à la somme des travaux des forces auxquelles il est soumis :

$$\Delta E_c = \sum_{\{\vec{F}\}} W(\vec{F}) \tag{10}$$

On peut le réécrire pour les puissances instantanées :

$$\frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} = \sum_{\{\vec{F}\}} \mathcal{P}(\vec{F}) \tag{11}$$

Démonstration – On connaît l'expression de l'énergie cinétique : $E_c = \frac{1}{2}mv^2$. On la dérive par rapport au temps :

$$\frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}m\frac{\mathrm{d}v^2}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}m\frac{\mathrm{d}(\vec{v}\cdot\vec{v})}{\mathrm{d}t} = m\vec{v}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} \tag{12}$$

On utilise le principe fondamental de la dynamique :

$$\frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} = \vec{v}\cdot\left(m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\right) = \vec{v}\cdot\sum_{\{\vec{F}\}}\vec{F} = \sum_{\{\vec{F}\}}\vec{F}\cdot\vec{v} \tag{13}$$

On reconnaît l'expression d'une puissance instantanée :

$$\frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} = \sum_{\{\vec{F}\}} \mathcal{P}(\vec{F}) = \sum_{\{\vec{F}\}} \frac{\delta W(\vec{F})}{\mathrm{d}t} \tag{14}$$

Si l'on intègre entre deux temps et sur la trajectoire, on retrouve le théorème de l'énergie cinétique.

B/ Théorème de l'énergie mécanique

Définition – Théorème de l'énergie mécanique : l'énergie mécanique d'un système est constante s'il n'est soumis qu'à des forces conservatives.

On peut écrire la variation d'énergie mécanique :

$$\Delta E_m = \Delta E_c + \sum_i \Delta E_{p,i} = \sum_{\{\overrightarrow{F_{NC}}\}} W(\overrightarrow{F_{NC}}) \tag{15}$$

où $\{\overrightarrow{F_{NC}}\}$ représente l'ensemble des forces non conservatives s'appliquant sur le système.

On peut le réécrire pour les puissances instantanées :

$$\frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = \sum_{\{\overrightarrow{F_{NC}}\}} \mathcal{P}(\overrightarrow{F_{NC}}) \tag{16}$$

Démonstration – On applique le théorème de l'énergie cinétique :

$$\Delta E_m = \Delta E_c + \sum_i \Delta E_{p,i} = \sum_{\{\vec{F}\}} W(\vec{F}) + \sum_i \Delta E_{p,i} \tag{17}$$

D'après la définition des forces conservatives, on peut écrire :

$$\sum_i \Delta E_{p,i} = \sum_{\{\overrightarrow{F_C}\}} (-W(\overrightarrow{F_C})) \tag{18}$$

où $\{\overrightarrow{F_C}\}$ représente l'ensemble des forces conservatives s'appliquant sur le système. On en déduit le théorème de l'énergie mécanique :

$$\Delta E_m = \sum_{\{\vec{F}\}} W(\vec{F}) - \sum_{\{\overrightarrow{F_C}\}} W(\overrightarrow{F_C}) = \sum_{\{\overrightarrow{F_C}\}} W(\overrightarrow{F_C}) + \sum_{\{\overrightarrow{F_{NC}}\}} W(\overrightarrow{F_{NC}}) - \sum_{\{\overrightarrow{F_C}\}} W(\overrightarrow{F_C}) \tag{19}$$

III - Mouvement à un degré de liberté

Considérons un mouvement à un degré de liberté selon l'axe (Ox).

A/ Type de trajectoire

On peut écrire l'énergie potentielle d'un système en fonction des énergies cinétique et mécanique :

$$E_p = E_m - E_c \leq E_m \tag{20}$$

L'énergie cinétique est toujours positive, de par son expression.

Ainsi, si l'on trace l'énergie potentielle, notée U, en fonction de la position x (figure 2), on peut déterminer la nature de la trajectoire.

— si $E_m = E_3$, l'énergie potentielle est confinée entre les valeurs E_4 et E_3 et la position entre les valeurs x_3 et x_3'. On dit que la trajectoire est **liée** ou **bornée** ;

— si $E_m = E_1$, l'énergie potentielle est inférieure à E_1 et la position est supérieure à x_1 et le système peut s'éloigner à l'infini. On dit que la trajectoire est **libre**.

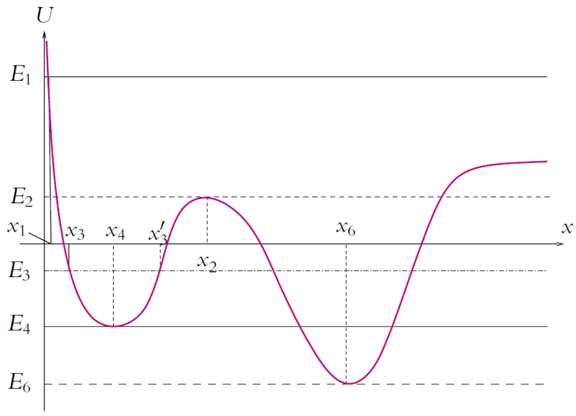


Figure 2 – Graphe d'énergie potentielle (**Source :** Sanz (p. 159)).

B/ Positions d'équilibre

Définition – Equilibre : l'état du système n'évolue plus.

Dans le cas d'un système soumis uniquement à un potentiel $U(x)$ unidirectionnel, l'équilibre correspond aux points tels que $\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x} = 0$. On distingue alors deux types d'équilibres :

- **équilibre stable :** l'énergie potentielle est **minimale** au point d'équilibre, ce qui revient à $\left.\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x_{eq}} > 0$. C'est le cas de la position x_4 sur la figure 2 ;
- **équilibre instable :** l'énergie potentielle est **maximale** au point d'équilibre, ce qui revient à $\left.\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x_{eq}} < 0$. C'est le cas de la position x_2 sur la figure 2.

C/ Approximation harmonique

Si on se place au voisinage du minimum x_4, on peut faire un développement limité à l'ordre 2 en utilisant la formule de Taylor :

$$E_p(x) = E_p(x_4) + (x - x_4)\left.\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x}\right|_{x_4} + \frac{(x-x_4)^2}{2}\left.\frac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x_4} \tag{21}$$

x_4 est un minimum d'énergie potentielle donc $\left.\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x}\right|_{x_4} = 0$.
On peut alors écrire l'expression de l'énergie mécanique du système :

$$E_m = E_p + E_c = E_p(x_4) + (x - x_4) + \frac{(x-x_4)^2}{2}\left.\frac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x_4} + \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \tag{22}$$

On fait l'hypothèse que l'énergie mécanique se conserve :

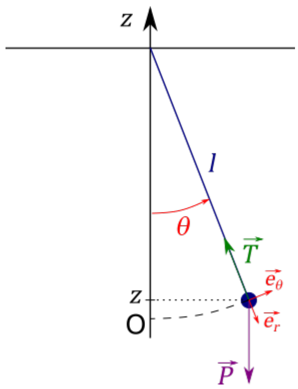
$$\frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = 0 = \dot{x}(x - x_4)\left.\frac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x_4} + m\dot{x}\ddot{x} \tag{23}$$

On pose $X = x - x_4$:

$$\ddot{X} + \frac{1}{m}\left.\frac{\mathrm{d}^2 E_p}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x_4} X = 0 \tag{24}$$

On reconnaît l'équation du mouvement d'un oscillateur harmonique de pulsation $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{m}\left.\frac{\mathrm{d}^2 E_p}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x_4}}$. On peut ainsi approcher tout potentiel en un potentiel harmonique au voisinage de sa position d'équilibre stable.

D/ Exemple du pendule pesant non amorti



La seule force conservative s'appliquant sur la masse du pendule est son poids. On peut donc écrire l'énergie potentielle du système :

$$E_p = E_{pp} = mgz + E_p(0) = mgl(1 - \cos\theta) + E_p(0) \tag{25}$$

D'après le théorème de l'énergie mécanique, puisqu'on suppose qu'aucune force de frottement ne s'applique sur la masse et que la tension ne travaille pas, on a :

$$\frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = 0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(E_c + E_p) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}mv^2 + mgl(1-\cos\theta) + E_p(0)\right)$$

$$\Leftrightarrow 0 = \frac{1}{2}m\frac{\mathrm{d}(l\dot{\theta})^2}{\mathrm{d}t} + mgl\dot{\theta}\sin\theta = ml\left(\dot{\theta}\ddot{\theta} + g\dot{\theta}\sin\theta\right)$$
$$(v = l|\dot{\theta}|)$$

On simplifie par $ml\dot{\theta}$ pour trouver l'équation du mouvement :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin\theta = 0 \tag{26}$$

La position d'équilibre stable du pendule se trouve en $\theta_e = 0$. On peut alors faire le développement limité : $\sin\theta \simeq \theta$, ce qui nous donne l'équation du mouvement d'un oscillateur harmonique :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin\theta = 0 \tag{27}$$

Expérience – Oscillations d'un pendule non amorti dans la limite des petits angles et au-delà.

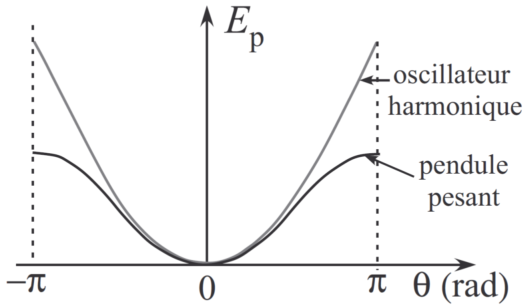


Figure 3 – Approximation harmonique sur l'exemple du pendule pesant (**Source** : Bresson (p. 692)).

On mesure la période d'un pendule dans la limite des petits angles. Celle-ci est constante et donc indépendante de l'amplitude des oscillations. Il s'agit bien d'un oscillateur harmonique.

On mesure la période d'un pendule pour un grand angle initial (supérieur à 20°). Celle-ci varie et dépend de l'amplitude des oscillations. On voit ainsi que le développement limité $\sin\theta \simeq \theta$ n'est valable que pour des angles inférieurs à 20°.

Conclusion

L'énergie mécanique d'un **système conservatif** (c'est-à-dire sur lequel ne s'appliquent que des forces conservatives ou ne travaillant pas) se conserve. Si ce n'est pas le cas, sa variation est égale à la somme des travaux des forces non conservatives, d'après le théorème de l'énergie mécanique. Le théorème de l'énergie cinétique est plus large et dérive directement du principe fondamental de la dynamique.

Le traitement énergétique d'un problème à une dimension est très puissant car, pour peu que le système soit conservatif, on peut déterminer l'équation du mouvement à partir des seuls points initial et final.