

LP 31 – Ecoulements de fluides

Manon LECONTE - ENS de Lyon

Dernière mise à jour : 3 juillet 2020

Merci à Solène Legrand, Arthur Lasbleiz et Lucile Favreau pour leur précieuse aide.

Mots-clé : fluide parfait, relation de Bernoulli, tube de Pitot, tube de Venturi, fluide réel, viscosité, écoulement de Couette, écoulement de Poiseuille, nombre de Reynolds, écoulement rampant, écoulement laminaire, écoulement turbulent, force de Stokes.

Niveau : BCPST 2

Pré-requis :

- Phénomènes de transport (convection et diffusion) [BCPST 2]
- Statique des fluides (forces volumiques de pression) [BCPST 2]
- Outils de la dynamique des fluides (ligne de courant, notion de particule fluide, dérivée particulaire, bilan) [BCPST 2]

Bibliographie :

- Taillet, *Dictionnaire de physique* [Niveau : **]
- Côte, *Physique-Chimie BCPST 2e année* [Niveau : *]
- Sanz, *Physique tout-en-un PC* [Niveau : **]

Plan proposé

I - Dynamique des fluides parfaits	2
A/ Caractéristiques des écoulements de fluides parfaits	2
B/ Mesure de grandeurs physiques dans un écoulement parfait	3
II - Dynamique des fluides réels	5
A/ Viscosité d'un fluide	5
B/ Ecoulement de Poiseuille	7
III - Nombre de Reynolds	9
A/ Significations physiques du nombre de Reynolds	9
B/ Régime de Stokes	9

Liste de matériel

Mesure du débit volumique d'un écoulement

- tube de Venturi ;
- régllet ;
- arrivée d'eau.

Mesure d'une viscosité cinématique

- viscosimètre de Ubbelohde ;
- chronomètre ;
- eau, éthanol.

Mesure d'une viscosité dynamique

- éprouvette de 500 mL ;
- bille de 0,6 cm de rayon ;
- chronomètre ;
- glycérol
- caméra
- ordinateur muni d'un logiciel de pointage vidéo.

Introduction pédagogique

Séquence pédagogique :

1. Statique des fluides
2. Outils pour la dynamique des fluides
3. Dynamique des fluides (ce cours).

Difficultés :

- retenir les hypothèses de la relation de Bernoulli ;
- déterminer quelle est la longueur caractéristique d'un écoulement pour le calcul d'un nombre de Reynolds.

Exemples de TD et de TP : effet Venturi, sonde Pitot, écoulement de Couette, écoulement de Poiseuille, ...

Introduction

La dynamique des fluides permet de décrire et comprendre un certain nombre de phénomènes physiques faisant intervenir des gaz ou des liquides. On va ainsi pouvoir comprendre comment fonctionne le dispositif de filtration Büchner utilisé en travaux pratiques de chimie. On pourra également modéliser sommairement la circulation sanguine.

Objectifs – Démontrer la relation de Bernoulli et l'appliquer dans des cas simples.
Décrire l'écoulement d'un fluide réel avec les modèles de Couette et de Poiseuille.
Exprimer le nombre de Reynolds et l'utiliser pour déterminer la nature d'un écoulement.

I - Dynamique des fluides parfaits

Définition – Fluide parfait : fluide soumis à aucune force de frottements.

En pratique, on considère qu'un fluide est parfait si la dissipation d'énergie due aux frottements dans l'écoulement est négligeable.

A/ Caractéristiques des écoulements de fluides parfaits

1) Conservation de la masse

L'écoulement d'un fluide parfait est toujours **unidimensionnel**. Si on se place au régime permanent dans un fluide parfait incompressible, on peut écrire la conservation du débit volumique :

$$D_v = cte = vS \quad (1)$$

On peut de plus appliquer l'équation de la statique des fluides en tout point du fluide (voir Côte (p.640)).

2) Relation de Bernoulli

Hypothèses

- fluide parfait uniquement soumis à son poids et aux forces pressantes ;
- écoulement incompressible et permanent ;
- il n'y a pas de parois mobiles au sein de l'écoulement.

Démonstration On effectue un bilan d'énergie mécanique volumique sur une ligne de courant entre deux points (notés e et s) :

$$\left(\frac{P_s}{\rho} + \frac{1}{2}v_s^2 + gz_s \right) - \left(\frac{P_e}{\rho} + \frac{1}{2}v_e^2 + gz_e \right) = w_u + w_d \quad (2)$$

avec $w_u = 0$ le travail utile (il n'y a pas de parois mobiles) et $w_d = 0$ le travail des forces de frottements visqueux (nul pour un fluide parfait).

Cette relation est valable quelles que soient les points choisis sur la ligne de courant. On en déduit ainsi le relation de Bernoulli :

Définition – Relation de Bernoulli : sur une ligne de courant,

$$P + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g z = cte \quad (3)$$

B/ Mesure de grandeurs physiques dans un écoulement parfait

1) Mesure de la vitesse d'un écoulement : utilisation d'un tube de Pitot

Historiquement, la sonde de Pitot était utilisée pour mesurer la vitesse des rivières (au XVII^{me} siècle). Elle était ensuite présente dans les premiers avions pour mesurer leur vitesse. Aujourd'hui, elle ne sert que au cas où les systèmes électroniques de l'avion dysfonctionneraient.

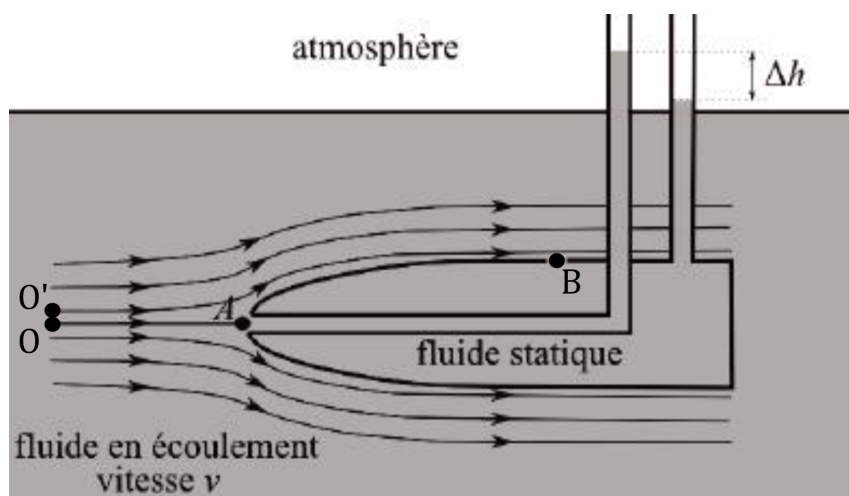


Figure 1 – Schéma d'un tube de Pitot (Source : Côte (p. 642)).

Le tube de Pitot est placé dans un fluide en écoulement, supposé parfait, et on attend le régime permanent. On mesure la pression aux points A et B de l'écoulement et on peut en déduire la vitesse de l'écoulement à l'aide de la relation de Bernoulli.

L'écoulement est incompressible et permanent, le fluide est parfait et il n'y a pas de parois mobiles au sein de l'écoulement. On peut donc écrire sur les lignes de courant :

— entre O et A :

$$\rho \frac{v_O^2}{2} + P_O + \rho g z_O = \rho \frac{v_A^2}{2} + P_A + \rho g z_A$$

Ici, $z_A = z_O$, $v_O = v$ et $v_A = 0$: il s'agit d'un **point d'arrêt** car l'écoulement rencontre un obstacle. Ainsi,

$$\rho \frac{v^2}{2} + P_O = P_A \quad (4)$$

— entre O' et B :

$$\rho \frac{v_{O'}^2}{2} + P_{O'} + \rho g z_{O'} = \rho \frac{v_B^2}{2} + P_B + \rho g z_B \quad (5)$$

Ici, $z_{O'} = z_O \simeq z_B$ (la sonde est de petite taille) et $v_{O'} = v = v_B$. Ainsi,

$$P_{O'} = P_B = P_O \quad (6)$$

On combine les deux équations pour déterminer la vitesse de l'écoulement :

$$\rho \frac{v^2}{2} + P_O = \rho \frac{v^2}{2} + P_B = P_A \Leftrightarrow v = \sqrt{\frac{2(P_A - P_B)}{\rho}} \quad (7)$$

Pour ne pas perturber l'écoulement, la sonde de Pitot doit être de petite taille et présenter un profil aérodynamique.

2) Mesure du débit volumique d'un écoulement : utilisation d'un tube de Venturi

On considère l'écoulement incompressible et permanent d'un fluide parfait au niveau d'un étranglement :

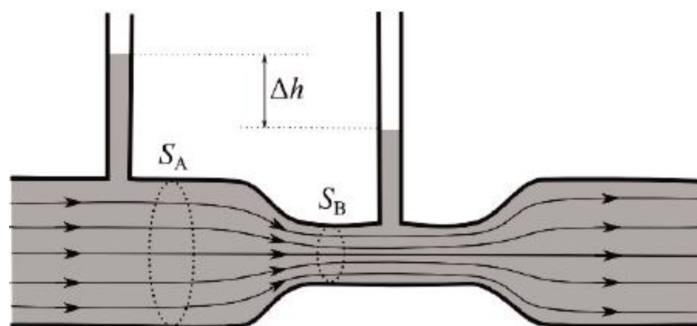


Figure 2 – Schéma d'un tube de Venturi (Source : Côte (p. 643)).

On utilise les caractéristiques de l'écoulement pour déterminer des relations entre les grandeurs :

1. **Conservation de la masse** (ici : conservation du débit volumique) :

$$D_V = cte = v_A \times S_A = v_B \times S_B \quad (8)$$

On remarque également la condition d'étranglement : $S_B < S_A$ donc $v_B > v_A$.

2. **Relation de Bernoulli sur une ligne de courant** :

$$\rho \frac{v_A^2}{2} + P_A + \rho g z_A = \rho \frac{v_B^2}{2} + P_B + \rho g z_B \quad (9)$$

On se place sur la ligne de courant telle que $z_B = z_A$. On peut alors exprimer la pression en B :

$$P_B = \rho \frac{v_A^2 - v_B^2}{2} + P_A < P_A \quad (10)$$

3. **Expression du débit volumique** :

$$D_V = S_A S_B \sqrt{\frac{2(P_B - P_A)}{\rho(S_A^2 - S_B^2)}} = S_A S_B \sqrt{\frac{2g\Delta h}{S_A^2 - S_B^2}} \quad (11)$$

Au niveau d'un étranglement, il se crée une dépression. On comprend alors pourquoi on utilise une trompe à eau (tube de Venturi vertical) pour faire le vide lorsque l'on effectue une filtration sur Büchner.

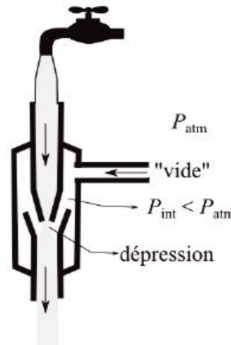


Figure 3 – Schéma d'une trompe à eau utilisée pour effectuer une filtration sous vide (Source : Côte (p. 643)).

II - Dynamique des fluides réels

A/ Viscosité d'un fluide

1) Force tangentielle de viscosité

On souhaite déterminer la force qu'exerce les particules de fluide sur leurs voisines. On suppose donc que le champ de vitesse est inhomogène.

Considérons l'expérience suivante :

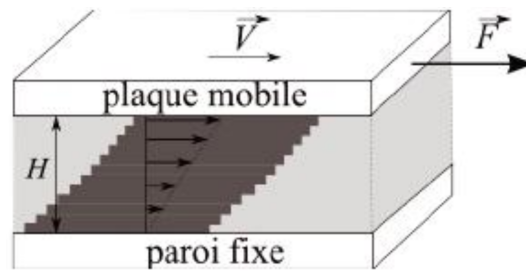


Figure 4 – Ecoulement de Couette plan (Source : Côte (p. 663)).

Animation – Champ de vitesse de l'écoulement de Couette plan (fixer le gradient de pression à 0).

Hypothèses

- Les particules de fluide sont uniquement soumises à leur poids, aux forces pressantes et aux forces de viscosité ;
 - Le référentiel d'étude est celui d'une particule de fluide et est supposé galiléen ;
 - Il n'y a pas d'échange de travail entre le fluide et la paroi.
- Le fluide adhère aux parois. On a donc les conditions limites :

$$\vec{v}(y = 0) = \vec{0} ; \vec{v}(y = H) = \vec{V}.$$

Remarque – La variable à considérer dépend de la géométrie du système : pour un problème cylindrique, il faut considérer le rayon r .

La force qu'exerce la particule de fluide située au-dessus de la particule de fluide étudiée s'exprime :

$$\vec{F}_{h/b} = (-\sigma_n \vec{e}_y + \sigma_t \vec{e}_x) S \quad (12)$$

avec S la surface entre les deux particules de fluide.

On reconnaît en σ_n la pression. Cependant, on ne sait pas encore à quoi correspond la contrainte tangentielle de viscosité σ_t .

Considérons le déplacement de la particule de fluide du haut relativement à celle étudiée pendant dt . On peut définir l'angle γ :

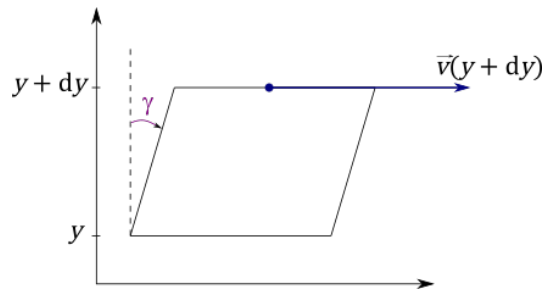
$$\gamma = \frac{v \, dt}{dy} \quad (13)$$

Définition – Taux de cisaillement : $\dot{\gamma} = \frac{dv}{dy}$.

On pose alors l'expression de la **contrainte tangentielle de viscosité** :

$$\sigma_t = \eta \dot{\gamma} \quad (14)$$

avec η la **viscosité dynamique** du fluide, exprimée en Pa·s ou poiseilles (PI). Cette grandeur traduit la réponse du fluide sous l'action d'une contrainte de cisaillement.



Elle dépend de plusieurs paramètres, dont notamment la température (dans un liquide, elle diminue si la température augmente) et la pression (elle augmente si la pression augmente). C'est pourquoi quand on donne des valeurs de viscosité, on précise toujours la température et la pression. Par la suite, on ne considère que des **fluides newtoniens**. Alors, la viscosité dynamique est indépendante de la contrainte appliquée.

2) Mesure d'une viscosité cinématique

Définition – Viscosité cinématique : $\nu = \frac{\eta}{\rho}$, où ρ est la masse volumique du fluide. Elle s'exprime en m^2/s .

La viscosité cinématique peut être vue comme un coefficient de diffusion, correspondant à la diffusion de quantité de mouvement dans le fluide.

On va mesurer la viscosité cinématique de l'eau à l'aide d'un viscosimètre de Ubbelohde.

Animation – Utilisation d'un viscosimètre de Ubbelohde (lire à vitesse $\times 1,5$).

La viscosité cinématique est liée au temps d'écoulement entre les deux graduations Δt et une constante interne au viscosimètre K :

$$\nu = K \Delta t \quad (15)$$

Remarque – Plus d'informations sur la constante K dans la notice.

L'écoulement dans le viscosimètre de Ubbelohde n'est pas dû au mouvement d'une paroi mobile, mais à une différence de pression entre les deux extrémités du fluide. On peut le modéliser à l'aide d'un écoulement de Poiseuille.

B/ Ecoulement de Poiseuille

Poiseuille utilisa ce modèle pour décrire la circulation du sang. Il fait alors l'hypothèse que le sang est un fluide newtonien

1) Débit volumique de l'écoulement

On considère un écoulement dans une conduite cylindrique de longueur L et de rayon R dû à un gradient de pression.

Hypothèses

- Le fluide est réel, newtonien et incompressible ;
- L'écoulement est permanent ;
- Le gradient de pression est uniforme et négatif : $P(0) > P(L)$.

Animation – Allure de l'écoulement de Poiseuille (fixer la vitesse de la plaque supérieure à 0).

L'expression du champ de vitesse est :

$$\vec{v} = \frac{1}{4\eta} \frac{\Delta P}{L} R^2 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \vec{e}_x \quad (16)$$

On peut calculer le débit volumique de l'écoulement :

$$\begin{aligned} D_V &= \iint \vec{v}(r) \cdot d\vec{S} = \int_{r=0}^R \frac{1}{4\eta} \frac{\Delta P}{L} R^2 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \vec{e}_x \cdot 2\pi r dr \vec{e}_x \\ &= \frac{1}{4\eta} \frac{\Delta P}{L} R^2 \times 2\pi \int_{r=0}^R \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) r dr \end{aligned}$$

Définition – **Loi de Poiseuille** : $D_V = \frac{\pi R^4}{8\eta} \frac{\Delta P}{L}$.

On peut en déduire la vitesse moyenne du fluide :

$$v_{moy} = \frac{D_V}{S} = \frac{\pi R^4}{8\eta} \frac{\Delta P}{L} \times \frac{1}{\pi R^2} = \frac{R^2 \Delta P}{8\eta L} \quad (17)$$

On remarque que la vitesse moyenne est égale à la moitié de la vitesse maximale dans la conduite, en $r = 0$.

2) Analogie électrocinétique-mécanique des fluides

On peut faire l'analogie entre l'électrocinétique et l'écoulement de Poiseuille :

Electrocinétique	Écoulement de Poiseuille
Intensité du courant I	Débit volumique D_V
Tension $U = \Delta V$	Différence de pressions ΔP
Loi d'Ohm : $R = \frac{U}{I}$	Résistance hydraulique : $R_{hyd} = \frac{\Delta P}{D_V}$

On peut ainsi utiliser les lois de l'électrocinétique pour déterminer la résistance équivalente d'une série d'écoulements de Poiseuille ou de conduites en parallèle.

III - Nombre de Reynolds

A/ Significations physiques du nombre de Reynolds

Dans un écoulement, on peut chercher à déterminer quel mode de transport prévaut. Pour cela, on définit un indicateur adimensionné.

Définition – Nombre de Reynolds : nombre adimensionné caractéristique d'un écoulement visqueux quantifiant le rapport du transport de quantité de mouvement par convection sur celui par diffusion.

On peut également voir le nombre de Reynolds comme le rapport des forces inertielles sur les forces visqueuses qui s'appliquent dans le fluide.

On peut l'exprimer à partir des grandeurs caractéristiques du système étudié :

$$Re = \frac{L \times U}{\nu} \quad (18)$$

où L est la longueur caractéristique de l'écoulement, U sa vitesse et ν la viscosité cinématique du fluide.

Exemple – Inspiré de l'exercice 22.1 du Côte.

Le nombre de Reynolds associé à l'écoulement du sang dans l'aorte s'exprime :

$$Re = \frac{D_V \rho}{\pi \frac{D}{2} \eta} \quad (19)$$

où $D_V = 5,0$ L/min le débit volumique, $D = 2,0$ cm le diamètre de l'aorte, $\rho = 1,0$ kg/L la masse volumique du sang et $\eta = 6,0 \times 10^{-3}$ Pl sa viscosité dynamique. On a pris comme distance caractéristique de l'écoulement le rayon de l'aorte, mais on aurait également pu prendre son diamètre.

Donc $Re = 440$.

On peut caractériser un écoulement en fonction de son nombre de Reynolds :

- si $Re < 1$, l'écoulement est dit **rampant** car la viscosité est très élevée, la longueur caractéristique très petite ou la vitesse très faible. On parle également de régime de Stokes ;
- si Re est compris entre 1 et 2 000, l'écoulement est **laminaire**. On peut considérer que les lignes de courant sont parallèles. C'est ce type d'écoulement qu'on a étudié dans le paragraphe sur les fluides réels. On voit ainsi que le sang est un fluide réel et que l'on peut utiliser le modèle de Poiseuille pour le décrire ;
- si $Re > 2 000$, l'écoulement est **turbulent**. L'écoulement est très chaotique et il n'y a pas d'ordre dans les lignes de champ (voir la figure 9.13 du Sanz (p. 321)) ;
- si $Re \rightarrow +\infty$, on peut considérer que l'écoulement est **parfait**.

B/ Régime de Stokes

Dans un écoulement rampant de vitesse caractéristique \vec{v} et de viscosité dynamique η , la force de frottements que subit un objet sphérique de rayon r est appelée **force de**

Stokes et s'exprime :

$$\overrightarrow{F}_{Stokes} = -6\pi\eta r \overrightarrow{v} \quad (20)$$

Considérons la chute d'une bille de rayon $r = 0,60$ cm dans le glycérol, de viscosité $\eta = 1,5$ Pa·s à 20°C dans les conditions normales de pression, et de masse volumique $\rho = 1\,260$ kg/m³. Sa vitesse de chute finit par atteindre $v_{lim} = 0,35$ m/s. Le nombre de Reynolds associé vaut donc :

$$Re = \frac{r \times v_{lim} \rho}{\eta} = 1,47 \quad (21)$$

Remarque – Ici, la grandeur caractéristique de l'écoulement est le rayon de la bille et non la largeur du contenant du fluide. On peut retrouver facilement la grandeur caractéristique d'un fluide en cherchant quelle longueur modifierait grandement l'écoulement par sa variation.

On peut considérer que l'écoulement autour de la bille est rampant. On peut donc effectuer un bilan des forces sur la bille pour déterminer son mouvement, sachant que la force de frottements appliquée sur elle est la force de Stokes (voir la correction du sujet "Détermination de la viscosité du glycérol", bac S Amérique du Nord 2008). À l'aide de ce dispositif on peut mesurer précisément la viscosité d'un fluide : c'est le principe du **viscosimètre à bille**.

Analyse de documents – Sédimentation d'une suspension (voir le Côte, exercice 22.10 (p. 681)).

Conclusion

Le nombre de Reynolds permet de déterminer la nature d'un écoulement :

- si $Re < 1$, l'écoulement est rampant et la force de frottement appliquée sur les objets est la force de Stokes. On peut alors utiliser cette force pour mesurer la viscosité du fluide dans un viscosimètre à bille ;
- si Re est compris entre 1 et 2 000, l'écoulement laminaire et correspond à un fluide réel. On étudiera principalement deux types d'écoulements : celui de Couette (le fluide est mis en mouvement par une paroi mobile) et celui de Poiseuille (le fluide est mis en mouvement par une variation de pression entre l'entrée et la sortie de la tuyère) ;
- si $Re > 2000$, l'écoulement est turbulent ;
- si $Re \rightarrow +\infty$, on peut considérer que l'écoulement est parfait. Alors, on applique le théorème de Bernoulli pour retrouver des grandeurs d'intérêt, notamment la vitesse (tube de Pitot) ou le débit volumique (tube de Venturi) de l'écoulement.