

## LP 29 – Filtrages

Manon LECONTE - ENS de Lyon

Dernière mise à jour : 17 juin 2020

*Merci à Luc Pontoglio, Patrick Rigord et Joachim Galiana pour leur précieuse aide.*

**Mots-clé :** filtrage, filtre passe-bas, filtre passe-bande, filtre passe-haut, fonction de transfert, gain, diagramme de Bode.

**Niveau :** BCPST 2

**Pré-requis :**

- Analyse spectrale et spectre de Fourier [TS]
- Circuits électriques du 1<sup>er</sup> et du 2<sup>nd</sup> ordre (circuits RC et RLC) [BCPST 1 et BCPST 2]
- Expression d'un signal sinusoïdal (lien entre fréquence et pulsation) [BCPST 1]
- Régime sinusoïdal forcé [BCPST 2]
- Notation complexe [BCPST 2]

**Bibliographie :**

- Taillet, *Dictionnaire de physique*
- Côte, *Physique-Chimie BCPST 2e année*

### Plan proposé

<b>I - Présentation des filtres linéaires passifs</b>	<b>2</b>
<b>II - Etude d'un filtre CR</b>	<b>2</b>
A/ Fonction de transfert . . . . .	2
B/ Diagramme de Bode . . . . .	3

## Introduction pédagogique

Le cours se situe juste après l'introduction des circuits du 2<sup>me</sup> ordre et du régime sinusoïdal forcé. Il permet de montrer une application de ces circuits et de manipuler les concepts et grandeurs d'électronique.

On fait le choix de présenter au maximum le sens physique derrière la notion de filtre. On part ainsi d'une problématique réelle et on n'effectue des calculs qu'une fois le problème bien ciblé.

### Difficultés :

- d'ordre mathématique pour la détermination de la fonction de transfert ;
- distinction des grandeurs réelles et complexes, fonction de transfert, gain et gain en décibel ;
- construction d'un diagramme de Bode (calcul du gain en décibel, de la phase, des pentes et de la fréquence de coupure).

**Exemples de TD** : analyse de filtres, étude de la transmission de la radio (modulation de fréquences).

**Exemples de TP** : construction d'un diagramme de Bode, détermination de la nature d'un filtre.

## Introduction

La radio utilise comme mode de transmission une plage de fréquence hertzienne. Pour écouter une chaîne, il faut sélectionner une fréquence et pour cela, on utilise un filtre.

**Définition – Filtre électronique** : dispositif permettant d'atténuer ou amplifier un signal électrique.

Il s'agit d'un quadripôle (composant présentant deux bornes d'entrée et deux bornes de sortie).



**Figure 1** – Représentation schématique d'un filtre (Source : Côte (p. 472)).

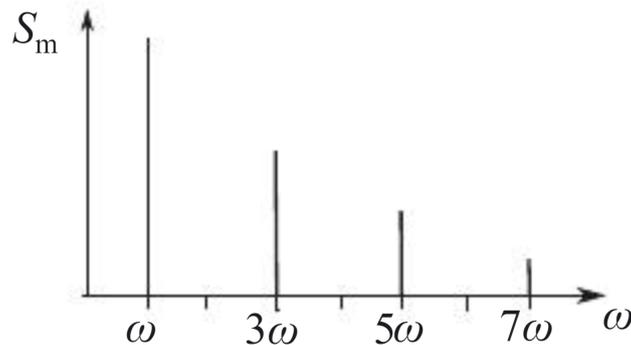
Dans ce cours, on s'intéressera à l'étude des filtres linéaires passifs, c'est-à-dire composés de dipôles passifs et de circuits linéaires.

**Objectifs** – Déterminer la nature d'un filtre à partir de sa fonction de transfert.

## I - Présentation des filtres linéaires passifs

Considérons le spectre de Fourier d'un signal créneau :

$$s(t) = S_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2i+1} \cos((2i+1)\omega t + \phi_i) \quad (1)$$



**Figure 2** – Spectre de Fourier d'un signal créneau (**Source** : Côte (p. 474)).

On peut isoler la composante continue du signal en utilisant un filtre **passé-bas** : il sélectionne les pulsations très petites devant  $\omega$  ce qui fait que les composantes sinusoïdales sont filtrées. On obtient alors un signal continu d'amplitude  $S_0$ . On peut de même sélectionner les pulsations inférieures ou égales à  $\omega$  pour obtenir un signal en sortie sinusoïdal :

$$s'(t) = S_0 + \cos(\omega t + \phi_i) \quad (2)$$

Si on reprend l'exemple de la radio, la fréquence de la chaîne qui nous intéresse n'est pas nécessairement  $\omega$ . On utilise alors un filtre **passé-bande** pour ne sélectionner qu'une fréquence (ou plusieurs) au milieu des autres.

Enfin, on pourrait vouloir supprimer la composante continue du signal, qui correspond sur le spectre de Fourier au signal en  $\omega = 0$ . Pour cela, on utilise un filtre **passé-haut**, qui sélectionne toutes les fréquences supérieures ou égales à  $\omega$ .

**| Remarque** – Observer les évolutions du signal sur GeoGebra.

## II - Etude d'un filtre CR

On considère un filtre constitué d'un circuit CR.

### A/ Fonction de transfert

On impose une tension  $u_e$  sinusoïdale en entrée et on cherche à déterminer la tension en sortie  $u_s$ . On mène alors une étude en complexes.

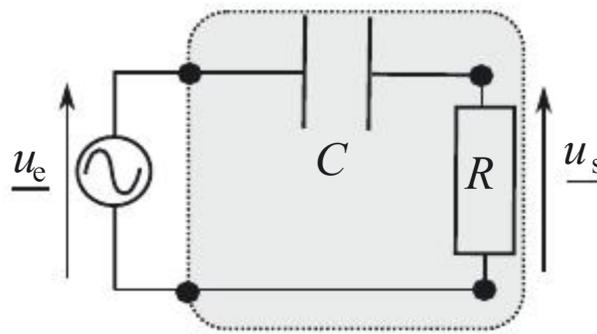


Figure 3 – Représentation schématique d'un filtre RC (Source : Côte (p. 473)).

**Définition – Fonction de transfert :**

$$\underline{H}(\omega) = \frac{u_s}{u_e} \quad (3)$$

La fonction de transfert d'un filtre permet de retrouver aisément la tension en sortie connaissant celle en entrée. Pour la déterminer, on écrit l'équation différentielle du circuit, que l'on passe en notations complexes :

$$\frac{du_e}{dt} = \frac{du_s}{dt} + \frac{1}{RC}u_s \Leftrightarrow j\omega u_e = \left(j\omega + \frac{1}{RC}\right)u_s$$

On en déduit l'expression de la fonction de transfert ( $\tau = RC$ ) :

$$\underline{H} = \frac{j\omega}{j\omega + \frac{1}{\tau}} = \frac{j\omega\tau}{1 + j\omega\tau} \quad (4)$$

On définit alors le **gain** du filtre, qui correspond au module de la fonction de transfert. Pour le filtre CR, on a :

$$G = \left| \frac{j\omega\tau}{1 + j\omega\tau} \right| = \frac{\omega\tau}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}} \quad (5)$$

L'étude du comportement asymptotique du gain permet de déterminer la nature du filtre :

- à basse fréquence ( $\omega \rightarrow 0$ ),  $G \rightarrow 0$  : le signal sortie est complètement atténué ;
- à haute fréquence ( $\omega \rightarrow \infty$ ),  $G \rightarrow 1$  : le signal sortie est égal au signal d'entrée, à un déphasage près.

Il s'agit donc d'un filtre passe-haut.

## B/ Diagramme de Bode

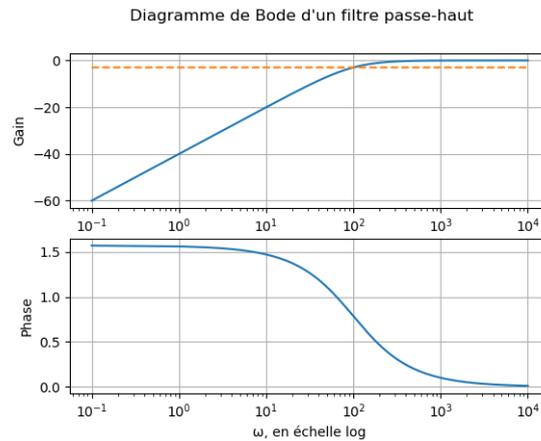
On peut chercher à représenter l'allure de la fonction de transfert d'un filtre en fonction de la pulsation. Ce diagramme est appelé **diagramme de Bode** et représente en ordonnées le **gain en décibels** :

$$G_{dB} = 20 \log G \quad (6)$$

On représente également la phase du signal en fonction de la pulsation sur un diagramme de Bode :

$$\phi = \arg \underline{H} = \frac{\pi}{2} - \arctan(\omega\tau) \quad (7)$$

### | Script Python – Diagramme de Bode du filtre CR.



La particularité des filtres du 1<sup>er</sup> ordre est la pente du diagramme de Bode en -20 dB/décade. Pour un filtre du 2<sup>nd</sup> ordre, on aurait une pente en -40 dB/décade.

**Définition – Pulsation de coupure** : pulsation telle que  $G(\omega_c) = \frac{G_{max}}{\sqrt{2}}$ , ce qui revient à  $G_{dB}(\omega_c) = G_{dB,max} - 3$  dB. On définit alors le domaine de fréquences pour lesquelles  $G(\omega_c) < G(\omega)$  la **bande passante** du filtre.

Pour le filtre CR, la pulsation de coupure vaut  $\omega_c = \frac{1}{\tau}$ .

## Conclusion

Les filtres permettent de sélectionner certaines fréquences de signaux périodiques. On définit ainsi les filtres passe-bas, passe-haut et passe-bande.

La fonction de transfert d'un filtre est un outil mathématique permettant de déterminer sa nature et le signal de sortie. On peut l'étudier en traçant le diagramme de Bode du filtre ou en étudiant son comportement asymptotique.