LP 13 – Gravitation et poids

Manon LECONTE - ENS de Lyon

Dernière mise à jour : 5 mai 2020

Merci à Arthur Lasbleiz, Solène Legrand, Karine Braganti et Joachim Galiana pour leur précieuse aide.

Mots-clé : poids, chute libre, lois de Newton, force gravitationnelle, lois de Kepler.
Niveau : TS
Pré-requis :

— Expressions du poids et de la force gravitationnelle [1S]
— Notion de frottements [1S]
— Cinématique (vecteurs position, vitesse et accélération) [TS]
— Référentiels galiléens [TS]
— Lois de Newton [TS]
— Intégration de polynômes [TS]
— Incertitudes et chiffres significatifs [TS]

Bibliographie :

— Taillet, *Dictionnaire de physique* [Niveau : ⋆⋆]
— *TS Physique-Chimie - Enseignement spécifique*, coll. Dulaurans Durupthy, Hachette éducation [Niveau : ⋆]
— *Physique-Chimie TS - Enseignement spécifique*, coll. Micromega, Hatier [Niveau : ⋆]
— Page web sur les satellites géostationnaires [Niveau : ⋆]
`http://gguenin.free.fr/theo/sat_geos.htm`

Plan proposé

Liste de matériel

Chute libre d'une bille

— Bille ;
— Webcam ;
— Ordinateur sur lequel le logiciel Latispro est installé.

Introduction pédagogique

Le cours s'inclut dans le sous-thème "Temps, mouvement et évolution" du programme officiel de terminale S. Il sert de première application aux lois de Newton qui viennent d'être introduites. On ne traitera en revanche pas des forces de Coulomb, bien que l'esprit du programme cherche systématiquement l'analogie entre ces forces et les forces de gravitation.

Temps, mouvement et évolution

Notions et contenus	**Compétences exigibles**
Référentiel galiléen. Lois de Newton : principe d'inertie, $\sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ et principe des actions réciproques.	Définir la quantité de mouvement $\vec{p}$ d'un point matériel. Connaître et exploiter les trois lois de Newton ; les mettre en œuvre pour étudier des mouvements dans des champs de pesanteur et électrostatique uniformes. *Mettre en œuvre une démarche expérimentale pour étudier un mouvement.*
Conservation de la quantité de mouvement d'un système isolé.	*Mettre en œuvre une démarche expérimentale pour interpréter un mode de propulsion par réaction à l'aide d'un bilan qualitatif de quantité de mouvement.*
Mouvement d'un satellite. Révolution de la Terre autour du Soleil.	Démontrer que, dans l'approximation des trajectoires circulaires, le mouvement d'un satellite, d'une planète, est uniforme. Établir l'expression de sa vitesse et de sa période.
Lois de Kepler.	Connaître les trois lois de Kepler ; exploiter la troisième dans le cas d'un mouvement circulaire.

Figure 1 – Extrait du Bulletin officiel spécial n°8 du 13 octobre 2011 énonçant le programme de physique-chimie de TS.

Difficultés :
- intégration de la 2me loi de Newton pour trouver l'équation horaire du système ;
- projeter le vecteur vitesse initial connaissant l'angle qu'il fait avec l'horizontale.

Exemples de TD :
- déterminer la trajectoire d'un objet soumis uniquement à son poids à l'aide des lois de Newton ;
- décrire le mouvement des astres à l'aide des lois de Kepler.

Exemples de TP : utilisation du pointage vidéo pour décrire la trajectoire d'objets (chute libre, lancer, ...).

Introduction

Lorsque l'on fait tomber un objet, il subit une accélération due à son propre poids. On peut décrire très précisément sa trajectoire à l'aide des lois de Newton.

On peut également les utiliser pour décrire le mouvement des astres, puisqu'ils sont eux aussi soumis à des forces gravitationnelles.

> **Objectifs –** Déterminer l'équation horaire d'un système soumis uniquement à son poids ou à une force gravitationnelle à partir des lois de Newton.
> Décrire le mouvement des astres à l'aide des lois de Kepler.

I - Mouvement de chute libre

Définition – Chute libre : mouvement d'un corps sous l'action de la pesanteur.

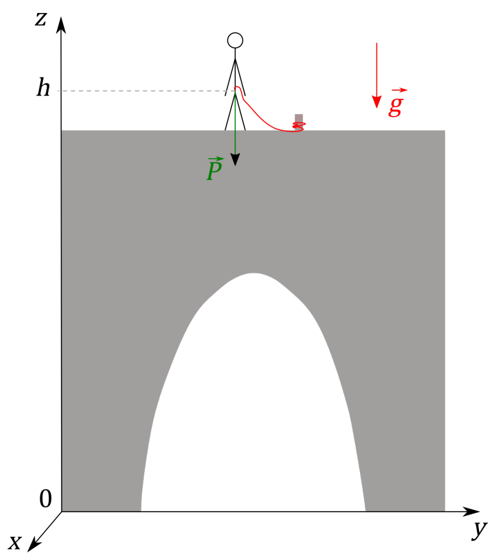
Dans ce cours, on va considérer que le corps ne subit aucune force de frottements pouvant le ralentir. La seule force qui s'exerce sur les objets que l'on va étudier est donc le poids.

A/ Lâcher d'un objet

1) Equation horaire du mouvement

On veut modéliser le mouvement d'une personne faisant du saut à l'élastique (uniquement le début du saut). On assimile cette personne à un point matériel de masse constante $m = 70$ kg, initialement à une altitude $h = 60$ m du sol. La seule force qui s'applique sur la personne est son poids.

On se place dans le référentiel terrestre supposé galiléen. On utilise un repère cartésien de verticale ascendante.



On applique la 2^{me} loi de Newton :

$$\sum \vec{F} = \vec{P} = m\vec{g} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = m\vec{a} \qquad (1)$$

On projette selon les axes : $\begin{cases} \text{selon } \vec{e_x} & a_x = 0 \\ \text{selon } \vec{e_y} & a_y = 0 \\ \text{selon } \vec{e_z} & a_z = -g \end{cases}$

On sait que l'accélération est la dérivée de la vitesse du système. On peut donc **intégrer** les expressions de l'accélération pour déterminer celles de la vitesse. Pour cela, on cherche la **primitive** d'une constante a : $P(t) = a \times t + b$, où b est une constante.

On intègre par rapport au temps les expressions de l'accélération :

$$\begin{cases} \text{selon } \overrightarrow{e_x} & v_x = v_{x,0} \\ \text{selon } \overrightarrow{e_y} & v_y = v_{y,0} \\ \text{selon } \overrightarrow{e_z} & v_z = -g \times t + v_{z,0} \end{cases} \tag{2}$$

$v_{x,0}$, $v_{y,0}$ et $v_{z,0}$ représentent les **conditions initiales**. On suppose que la personne se laisse tomber dans le vide sans vitesse. Elles sont donc toutes les trois nulles.

On intègre de nouveau la vitesse pour déterminer la position du système. On utilise alors le fait que la primitive d'une fonction affine $a\,t + b$ vaut $P' = \frac{1}{2}a\,t^2 + b\,t + c$, où c est une constante.

$$\begin{cases} \text{selon } \overrightarrow{e_x} & x = x_0 \\ \text{selon } \overrightarrow{e_y} & y = y_0 \\ \text{selon } \overrightarrow{e_z} & z = -\frac{g}{2}\,t^2 + z_0 \end{cases} \tag{3}$$

Initialement, la personne se trouve en $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ et $z_0 = h$. On en déduit que le mouvement au cours du saut n'est décrit que par l'altitude z est que l'équation horaire du mouvement est :

$$z(t) = -\frac{g}{2}\,t^2 + h \tag{4}$$

On constate que la position de la personne est indépendante de sa masse.

> **Vidéo –** Chute libre d'une boule de bowling et d'une plume dans le vide (arrêter la vidéo à 3'20").

En fait, on ne peut pas toujours négliger les forces de frottement avec l'air, particulièrement pour cet exemple. C'est ce qui explique pourquoi la plume et la boule de bowling ne devrait pas tomber en même temps.

> **Vidéo –** Chute libre d'une boule de bowling et d'une plume dans l'air (arrêter la vidéo à 1'37").

Application numérique Combien de temps dure le saut sachant que la corde a une longueur $L = 40$ m ? (on néglige toujours les forces de frottements)
On cherche le temps au bout duquel la personne atteint l'altitude $z_f = h - L = 20$ m. L'expression de ce temps est :

$$t_f = \sqrt{\frac{2(h - z_f)}{g}} = \sqrt{\frac{2L}{g}} \tag{5}$$

> **Application numérique –** $t_f = 2{,}9$ s ($g = 9{,}81$ m/s^2).

2) Mesure du champ de pesanteur

Expérience – Chute d'une bille suivie par pointage vidéo.

On mesure plusieurs fois le temps que met la bille pour atteindre le sol sachant qu'elle est lâchée à une altitude $h = 1{,}5$ m.

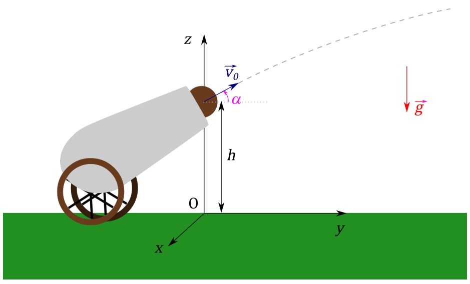
On peut faire un grand nombre de mesures pour en effectuer un traitement statistique. On obtient alors des incertitudes de type A.

B/ Lancer d'un objet

1) Equations horaires du mouvement

On cherche à déterminer la trajectoire d'un boulet de canon de masse constante $m = 18$ kg. Le boulet est lancé à une vitesse v_0 avec un angle α par rapport à l'horizontale. Le boulet n'est soumis qu'à son propre poids.

On se place dans le référentiel terrestre supposé galiléen et on utilise le système de coordonnées cartésien, conformément au schéma suivant :



On applique la 2me loi de Newton :

$$\sum \overrightarrow{F} = \overrightarrow{P} = m\overrightarrow{g} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{p}}{\mathrm{d}t} = m\overrightarrow{a} \tag{6}$$

On projette selon les axes : $\begin{cases} \text{selon } \overrightarrow{e_x} & a_x = 0 \\ \text{selon } \overrightarrow{e_y} & a_y = 0 \\ \text{selon } \overrightarrow{e_z} & a_z = -g \end{cases}$

On intègre par rapport au temps les expressions de l'accélération :

$$\begin{cases} \text{selon } \overrightarrow{e_x} & v_x = v_{x,0} \\ \text{selon } \overrightarrow{e_y} & v_y = v_{y,0} \\ \text{selon } \overrightarrow{e_z} & v_z = -g \times t + v_{z,0} \end{cases} \tag{7}$$

$v_{x,0}$, $v_{y,0}$ et $v_{z,0}$ représentent les **conditions initiales**. La vitesse initiale s'exprime : $\overrightarrow{v_0} = v_0(\cos\alpha\overrightarrow{e_y} + \sin\alpha\overrightarrow{e_z}) = v_{y,0}\overrightarrow{e_y} + v_{z,0}\overrightarrow{e_z}$.

On intègre de nouveau la vitesse pour déterminer la position du système :

$$\begin{cases} \text{selon } \overrightarrow{e_x} & x = x_0 \\ \text{selon } \overrightarrow{e_y} & y = v_0\cos\alpha\ t + y_0 \\ \text{selon } \overrightarrow{e_z} & z = -\frac{g}{2}\ t^2 + v_0\sin\alpha\ t + z_0 \end{cases} \tag{8}$$

Initialement, le boulet se trouve en $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ et $z_0 = h$. On en déduit les équations horaires du mouvement :

$$\begin{cases} \text{selon } \overrightarrow{e_y} & y = v_0 \cos\alpha \ t \\ \text{selon } \overrightarrow{e_z} & z = -\frac{g}{2} \ t^2 + v_0 \sin\alpha \ t + h \end{cases} \tag{9}$$

On constate que la trajectoire du boulet est également indépendante de sa masse.

2) Equation de la trajectoire

L'équation de la trajectoire correspond à l'équation $z = f(y)$.
On sait que :

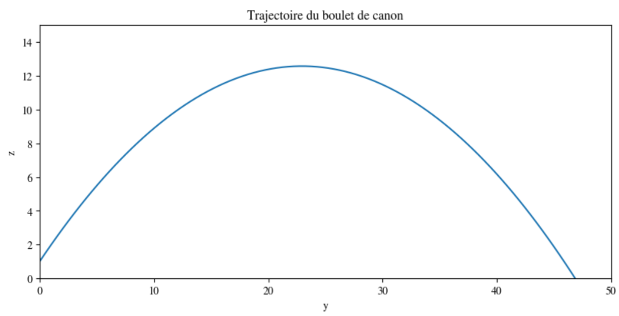
$$t = \frac{y}{v_0 \cos\alpha} \tag{10}$$

On injecte cette expression dans l'équation horaire de l'altitude :

$$z = -\frac{g}{2} \left(\frac{y}{v_0 \cos\alpha}\right)^2 + v_0 \sin\alpha \ \frac{y}{v_0 \cos\alpha} + h = -\frac{g \ y^2}{2 \ v_0^2 \cos^2\alpha} + \tan\alpha \ y + h \tag{11}$$

La trajectoire du boulet est une parabole. On pourra montrer que l'angle initial permettant de lancer le boulet le plus loin possible vaut $\alpha = 45°$.

Script Python – Tracé de la trajectoire ($\alpha = 45°$, $h = 1$ m, $v_0 = 450$ m/s).



A l'aide de la fonction `scipy.optimize.fsolve(z,50)`, on peut déterminer le point d'impact du boulet de canon. Le shell Python nous renvoie la valeur 46,83992952 lorsque l'on compile le code, ce qui correspond bien à ce que l'on peut lire sur le graphe.

II - Mouvement des planètes

A/ Lien entre gravitation et poids

En 1S, on a donné les expressions du poids $\overrightarrow{P} = m\overrightarrow{g}$ et de la force gravitationnelle $\overrightarrow{F_{grav}} = -\mathcal{G}\frac{m_A \ m_B}{d^2}\overrightarrow{e_r}$.

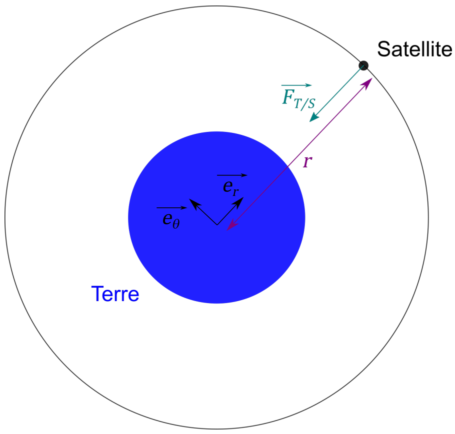
On peut considérer que le poids représente la force gravitationnelle que la Terre exerce sur tout objet à sa surface. On en déduit une expression de l'accélération de pesanteur :

$$\overrightarrow{g} = -\frac{\mathcal{G} M_T}{R_T^2} \overrightarrow{e_r} \tag{12}$$

avec M_T la masse de la Terre, R_T le rayon de la Terre et $\overrightarrow{e_r}$ le vecteur unitaire dirigé du centre de la Terre vers l'objet.

B/ Description du mouvement d'un satellite grâce aux lois de Newton

On souhaite décrire le mouvement d'un satellite de masse m autour de la Terre. Pour cela, on se place dans le référentiel géocentrique supposé galiléen et on utilise un repère polaire (la trajectoire est supposée circulaire). On suppose que le satellite n'est soumis qu'à la force gravitationnelle exercée par la Terre. On néglige les forces gravitationnelles exercées par les autres astres de l'Univers. Le satellite se trouve dans le vide sidéral donc il ne subit aucune force de frottement.



On applique la 2me loi de Newton :

$$\sum \overrightarrow{F} = \overrightarrow{F_{T/S}} = -\mathcal{G}\, \frac{m\, M_T}{r^2} \overrightarrow{e_r} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{p}}{\mathrm{d}t} = m\,\overrightarrow{a} \tag{13}$$

On utilise le fait que pour une trajectoire circulaire,

$$a_r = \frac{v^2}{r} \; ; \; a_\theta = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \tag{14}$$

On identifie pour déterminer l'expression de la vitesse :

$$v = \sqrt{\frac{\mathcal{G} M_T}{r}} \; ; \; \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{15}$$

On en déduit que la vitesse du satellite est **constante**.
On peut déterminer la **période de révolution** du satellite autour de la Terre :

$$T = 2\pi \frac{r}{v} = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{\mathcal{G} M_T}} \tag{16}$$

Application numérique Quelle est la période de révolution du satellite Astra, qui sert à transmettre la télévision ?

Le satellite se situe à une altitude $h = 3{,}6 \times 10^7$ m et possède une vitesse $v = 3{,}1 \times 10^3$ m/s. On en déduit que la période de révolution du satellite autour de la Terre vaut $T = 8{,}7 \times 10^4$ s = 24 h.

Il s'agit en fait d'un satellite géostationnaire, qui reste constamment au-dessus d'un même point précis de la Terre, au niveau de l'équateur.

C/ Introduction des lois de Kepler

Ces lois décrivent le mouvement d'un objet autour d'un astre plus massif.

> **Définition – 1re loi de Kepler : loi des orbites** Un corps en orbite autour d'un objet massif (par exemple la Terre autour du Soleil) décrit une ellipse dont le centre de l'objet massif occupe l'un des foyers.

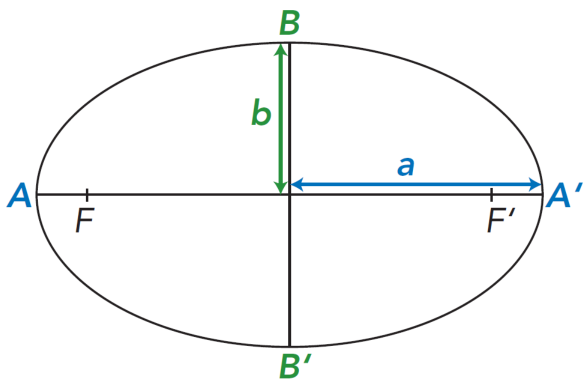


Figure 2 – Représentation d'une ellipse (**Source** : Hachette TS (p. 167)).
F et F' représentent les deux foyers de l'ellipse, a représente son demi-grand axe.

Le cercle est un cas particulier de l'ellipse où les deux foyers sont confondus.

> **Définition – 2me loi de Kepler : loi des aires** Le segment de droite reliant les centres de gravité des deux astres balaye des aires égales pendant des durées égales.

La vitesse sur une trajectoire elliptique n'est donc pas constante (vidéo à regarder).

> **Définition – 3me loi de Kepler : loi des périodes** le rapport entre le carré de la période et le cube du demi-grand axe de l'ellipse $\frac{T^2}{a^3}$ ne dépend que des propriétés de l'astre massif mais pas de la trajectoire.

On retiendra que pour un système de deux astres, le rapport $\frac{T^2}{a^3}$ est constant.

Pour une trajectoire circulaire, on peut reprendre les résultats de la sous-partie B/, sachant que $a = r$:

$$\frac{T^2}{r^3} = 4\pi^2 \frac{r^3}{\mathcal{G} M_T} \times \frac{1}{r^3} = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G} M_T} \qquad (17)$$

Conclusion

Dans ce cours, on a vu comment les lois de Newton permettent de déterminer les équations horaires d'un système en mouvement soumis uniquement à son poids. On pourra également étudier des systèmes soumis uniquement à une force de Coulomb et retrouver des résultats similaires en appliquant la même méthode.

Le mouvement des astres peut être décrit par les lois de Kepler. On retient que les trajectoires des planètes autour du Soleil ou des satellites autour de la Terre sont toujours elliptiques et que leurs caractéristiques peuvent être déterminées en combinant les lois de Kepler et les lois de Newton.