

LP 24 – Mesures et contrôle

Manon LECONTE - ENS de Lyon

Dernière mise à jour : 2 juillet 2020

Merci à Solène Legrand et Arthur Lasbleiz pour leur précieuse aide.

Mots-clé : mesure, justesse, fidélité, incertitudes de type A, incertitudes de type B, formule de propagation des incertitudes, régression linéaire.

Niveau : BCPST 1

Pré-requis :

- Loi de Beer-Lambert, utilisation d'un spectrophotomètre [secondaire]
- Pendule simple : période [secondaire]
- Chiffres significatifs et écriture scientifique [secondaire]
- Statistiques : moyenne, écart-type [secondaire]

Bibliographie :

- Bellier, *Physique expérimentale aux concours de l'enseignement - Optique, mécanique, fluides, transferts thermiques*, éd. 3 [Niveau : **]
- Site du Collège français de métrologie [Niveau : ***]
- TP - Dosage des ions permanganate dans l'eau de Dakin par spectrophotométrie, lycée Jean Dautet (La Rochelle) [Niveau : *]
- Taillet, *Dictionnaire de physique* [Niveau : *]
- Cours sur les incertitudes de M. Vérot, ENS de Lyon [Niveau : ***]

Plan proposé

| | |
|--|----------|
| I - D'une grandeur à une valeur | 2 |
| A/ Définitions | 2 |
| B/ Choix d'un appareil | 3 |
| C/ Justesse et fidélité | 3 |
| II - Application à la mesure de la période d'un pendule | 4 |
| A/ Mesure | 4 |
| B/ Incertitudes de type A | 4 |
| C/ Les limites | 6 |
| III - Application à la mesure d'une concentration | 6 |
| A/ Mesure | 6 |
| B/ Incertitudes de type B | 6 |
| C/ Les limites | 8 |

Liste de matériel

Mesure de la période d'un pendule simple

- pendule simple ;
- chronomètre.

Mesure d'une concentration par spectrophotométrie

- solution de KMnO_4 à différentes concentrations (0,1 mM, 0,25 mM, 0,5 mM et 1 mM) ;
- eau de Dakin ;
- 1 cuve en PMMA et des pipettes Pasteur ;
- spectrophotomètre ;
- ordinateur équipé d'un logiciel de traitement des spectres d'absorption UV-visible.

Introduction pédagogique

Ce cours a pour vocation de faire prendre du recul aux élèves sur les résultats qu'ils peuvent obtenir en TP. Il sera mobilisé lors de chaque prise de mesure afin d'en déterminer les incertitudes.

Difficultés :

- savoir faire le bon choix entre incertitudes de type A et de type B quand on effectue une mesure ;
- déterminer toutes les sources d'incertitudes et savoir lesquelles sont majoritaires ;
- faire la différence entre incertitude relative, incertitude-type et incertitude élargie.

Introduction

Tous les jours, on est amené à mesurer des grandeurs. Par exemple, dans la vie quotidienne, on doit peser des ingrédients pour faire une recette. Dans ce cas, ce n'est pas gênant d'avoir 101 g ou 99 g au lieu de 100 g. En science, à l'inverse, la mesure ce doit d'être très précise. De plus, on doit prendre du recul sur la mesure brute que l'on vient de prendre car elle est loin d'être égale à la valeur que l'on veut mesurer.

Objectifs – Comprendre la différence entre grandeur et valeur.
Connaître les différents types d'erreur.
Savoir calculer l'incertitude associée à un résultat expérimental et écrire rigoureusement le résultat obtenu.

I - D'une grandeur à une valeur

A/ Définitions

Définition – Mesurande : grandeur physique que l'on veut mesurer (ex : longueur, masse, intensité, ...). Elle est associée à des unités.

Mesurage ou mesure : processus permettant d'obtenir la valeur de la mesurande.

Capteur : dispositif qui convertit une grandeur physique en une autre directement exploitable (ex : œil (convertit des signaux lumineux en une image), thermomètre au mercure (convertit une température par une hauteur de mercure)).

Avant de mesurer une grandeur, il est nécessaire de se poser plusieurs questions :

- Quelle grandeur souhaite-t-on mesurer ?
- Avec quel appareil ?

B/ Choix d'un appareil

Définition – Chaîne de mesure : ensemble des procédés pour passer d'une grandeur à une valeur : Grandeur → Capteur → Conditionneur de signal → Visualisation ou utilisation des données.

Il faut prendre en compte toute la chaîne pour choisir un appareil, ce qui nécessite de lire la notice de l'appareil.

Exemple – Mesure d'une absorbance par un spectrophotomètre

Grandeur physique mesurée : intensité lumineuse.

Le capteur la convertit en une tension.

L'appareil affiche une valeur d'absorbance.

Ceci peut entraîner trois types d'erreurs :

- de **lecture** : si on a un affichage numérique, la valeur réelle est différente de la valeur affichée. Elle se trouve dans un intervalle centrée en la valeur affichée et de largeur égale au dernier *digit*. De même s'il s'agit d'un réglet ;
- due à l'**appareillage** : pour y avoir accès, il faut lire la notice et chercher les incertitudes-type ;
- de **montage**.

Il peut arriver qu'un appareil affiche une valeur qui diffère de la valeur vraie car une **grandeur d'influence** perturbe la relation entre l'indication et le résultat des mesures. Ainsi, la température peut dilater le verre d'une fiole jaugée et ainsi l'étalonnage qui avait été fait au niveau de la jauge n'est plus valable si la température d'étude diffère de celle de l'étalonnage.

C/ Justesse et fidélité

Définition – Justesse : degré de concordance entre les résultats et une valeur vraie/théorique.

Fidélité : concordance entre les valeurs mesurées entre elles.

On peut visualiser la différence entre ces deux termes à l'aide de cibles (figure 1).



Figure 1 – Source : "Qualité métrologique d'un appareil de mesure", Wikipédia.

On peut ainsi définir deux types d'erreurs liées à ces deux concepts :

- l'**erreur systématique** associée à une faible justesse (figure de gauche). Elle est présente sur toutes les mesures, et peut donc être corrigée ;
- l'**erreur aléatoire** associée à une faible fidélité (figure du milieu). Elle peut être corrigée si le nombre de mesures est suffisamment grand.

II - Application à la mesure de la période d'un pendule

Tout d'abord, on effectue une mesure directe, c'est-à-dire que l'on a directement accès à la grandeur que l'on souhaite mesurer.

A/ Mesure

| **Inspiré de** Bellier (p. 15).

Quelques rappels Période T d'un pendule simple :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad (1)$$

avec l la longueur du pendule et g l'accélération de pesanteur.

On mesure la période d'un pendule et on reproduit l'expérience neuf fois :

| n° | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| T [s] | 1,42 | 1,43 | 1,41 | 1,42 | 1,42 | 1,40 | 1,40 | 1,42 | 1,42 |

⇒ Peut-on faire confiance à ces résultats ? Quelle valeur de période faut-il prendre ?
Où s'arrêter avec les chiffres significatifs ?

B/ Incertitudes de type A

| **Source** – Cours de M. Vérot (p. 19).

| **Définition – Incertitude** : quantité numérique qui permet d'associer un intervalle de confiance à une mesure.

⇒ Comment la déterminer ?

Puisqu'on a effectué un grand nombre de mesures, on peut avoir recours aux incertitudes de type A.

On commence par déterminer la valeur moyenne de toutes les mesures :

$$\bar{T} = \frac{\sum_{i=1}^N T_i}{N} \quad (2)$$

| **Application numérique** – $N = 9$ ici donc $\bar{T} = 1,4156$ s.

Ensuite, on calcule l'**écart-type réduit** de la série de mesure :

$$\sigma_{N-1} = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (T_i - \bar{T})^2} \quad (3)$$

| **Application numérique** – $\sigma_{N-1} = 1,013 \times 10^{-2}$ s.

L'**incertitude-type** associée à la mesure est alors :

$$u_T = \frac{\sigma_{N-1}}{\sqrt{N}} \quad (4)$$

| **Application numérique** – $u_T = 3,379 \times 10^{-3}$ s.

Cette incertitude étant largement sous-estimée, il faut plutôt considérer l'**incertitude-élargie** :

$$U_T = k u_T \quad (5)$$

où k est le **coefficient de Student**. Celui-ci prend une valeur différente en fonction du nombre de mesures effectuées et de l'**intervalle de confiance** souhaité. Pour 9 mesures et pour un intervalle de confiance à 95%, le coefficient de Student vaut : $k = 2,26$. En outre, l'incertitude élargie doit être écrite avec un seul chiffre significatif (plus de chiffres n'aurait aucun sens car il s'agit d'une incertitude qui ne peut, par définition, être précise). On effectue systématiquement l'arrondi à l'unité supérieure.

| **Application numérique** – $U_T = 8 \times 10^{-3}$ s (au lieu de $U_T = 7,637 \times 10^{-3}$ s).

La précision sur le résultat est alors tronquée par l'incertitude élargie. On écrit alors le résultat comme suit :

$$T = \bar{T} \pm U_T = 1,416 \pm 0,008 \text{ s.} \quad (6)$$

| **Remarque** – On voit ainsi que σ_{n-1} , u_T et U_T ont la même dimension que la grandeur évaluée.

C/ Les limites

Dans le cadre de la mesure de la période d'un pendule, on peut réduire l'erreur sur la lecture du temps (liée au temps de réaction de l'expérimentateur) en mesurant plutôt le temps nécessaire à un grand nombre d'oscillations. On divise alors ce temps par le nombre d'oscillations pour obtenir la période, mais également l'incertitude sur la lecture.

Les incertitudes de type A permettent d'éliminer les erreurs aléatoires en moyennant le résultat. Toutefois, elles ne peuvent éliminer les erreurs systématiques. Si le résultat semble trop aberrant, il faut reprendre le protocole pour éliminer l'erreur systématique avant de faire des incertitudes de type A. Sinon, elles n'auraient aucun sens.

III - Application à la mesure d'une concentration

Source – Dosage des ions permanganate dans l'eau de Dakin par spectrophotométrie, lycée Jean Dautet (La Rochelle).

Dans cette expérience, la grandeur physique mesurée (absorbance) n'est pas la grandeur que l'on cherche (concentration). Le calcul des incertitudes est donc légèrement plus long.

A/ Mesure

Quelques rappels Loi de Beer-Lambert :

$$A = \epsilon l c \quad (7)$$

avec A l'absorbance, ϵ le coefficient d'absorption molaire [$\text{L mol}^{-1} \text{cm}^{-1}$], l la longueur de la cuve [cm] et c la concentration en l'espèce qui absorbe [mol/L].

On veut mesurer la concentration du permanganate de potassium dans l'eau de Dakin.

1. on mesure le blanc avec une cuve remplie d'eau distillée → solution de référence ;
2. on trace une courbe d'étalonnage avec des solutions de différentes concentrations connues → on connaît $k = \epsilon l = 2,30 \cdot 10^3 \text{ L/mol}$;
3. on mesure l'absorbance de la solution de concentration inconnue : $A = 0,146$.
On la mesure dans la même cuve pour garder la même référence ;
4. on calcule $c = 6,3478 \cdot 10^{-5} \text{ mol/L}$.

B/ Incertitudes de type B

Ici, on n'effectue qu'une seule mesure. On va donc effectuer des **incertitudes de type B**. Pour cela, on fait l'inventaire de toutes les erreurs qui ont pu se produire lors de la manipulation.

On souhaite mesurer $c = \frac{A}{k}$. On a donc des incertitudes sur :

- A : incertitudes dues au spectrophotomètre ;
- k : incertitudes dues à l'obtention de la courbe d'étalonnage, sur l'absorbance et sur la concentration.

Comme la relation liant A , k et c est un quotient, l'expression de l'**incertitude relative** sur c est donnée par la **formule de propagation des incertitudes** :

$$\frac{\Delta c}{c} = \sqrt{\left(\frac{\Delta A}{A}\right)^2 + \left(\frac{\Delta k}{k}\right)^2} \quad (8)$$

L'incertitude relative est adimensionnée. Elle permet de comparer deux à deux les poids des incertitudes de chaque terme.

Détermination de $\frac{\Delta k}{k}$ L'incertitude sur la mesure du coefficient d'étalonnage peut être calculée par deux méthodes, donnant des résultats au sens physique très différent :

- à partir des incertitudes sur chaque points liées à la prise de volume et aux concentrations des solutions utilisées ;
- sur le logiciel de régression linéaire (par exemple Regressi). L'incertitude quantifie alors l'écart entre les points et la modélisation.

On remarque ainsi que la première méthode est la plus pertinente car elle prend bien en compte les points aberrants.

Remarque – Ici, faute d'avoir accès aux incertitudes sur les prises de volume, on utilise la deuxième méthode que l'on sait moins satisfaisante. On trouve alors : $k = (2,30 \pm 0,10) \times 10^3$ L/mol.

Les régressions linéaires affichent un coefficient de corrélation r qui est sensé quantifier l'écart entre la modélisation et les points expérimentaux. Cependant, ce coefficient de corrélation a des limites. Il faut toujours vérifier à l'œil nu que les points expérimentaux suivent bien une fonction affine avant de donner la valeur de r ou r^2 (cf. quartet d'Anscombe).

Détermination de $\frac{\Delta A}{A}$ $\Delta A = 0,00029$. Alors $\frac{\Delta A}{A} = 0,001986$.

Application numérique : $\Delta c = 2,7628 \cdot 10^{-6}$ mol/L.

Il s'agit de l'**incertitude absolue** sur c ou encore l'**incertitude-type** sur c .

Pour représenter un résultat, on utilise également un intervalle de confiance à 95%. Il faut donc considérer l'incertitude élargie $U_c = k \Delta c$, où k est de nouveau le **coefficient de Student**. Pour des incertitudes de type B, on suppose que la répartition du résultat est une gaussienne, donc $k = 2$.

On présente le résultat sous la forme : $c = (6,3 \pm 0,6) \cdot 10^{-5}$ mol/L.

La valeur donnée par l'étiquette de l'eau de Dakin est $c_m = 10$ mg/L, soit $c_{notice} = 6,3 \cdot 10^{-5}$ mol/L. L'intervalle de confiance intègre bien la valeur de concentration indiquée par la notice.

Complément – Incertitudes pour différentes formules

- pour une addition ($z_i = \sum_{i=1}^N x_i$), $\Delta z = \sqrt{\sum_{i=1}^N (\Delta x_i)^2}$;
- pour un quotient simple ($z_i = \frac{\prod_{i=1}^M x_i}{\prod_{i=1}^N y_i}$), $\frac{\Delta z_i}{z_i} = \sqrt{\sum_{i=1}^N \left(\frac{\Delta x_i}{x_i}\right)^2 + \sum_{i=1}^M \left(\frac{\Delta y_i}{y_i}\right)^2}$

C/ Les limites

Plusieurs limites à considérer :

- les **limites du modèle** : la loi de Beer-Lambert n'est valable que si la concentration de l'espèce en solution n'est pas trop élevée ;
- la **limite de l'appareil** : l'appareil peut mesurer jusqu'aux limites de la loi de Beer-Lambert. Mais, a-t-on besoin d'une référence ? Y a-t-il des défauts de conception ? Ici, il y a un changement de lampe à 800 nm, ce qui produit un pic ou une discontinuité. Il faut s'y attendre et ne pas exploiter de résultats à cet endroit.

Conclusion

Quand on fait une mesure, il faut toujours avoir un **regard critique** sur ce que l'on fait. Pour cela, il est indispensable de calculer les incertitudes associées, si possible en faisant un grand nombre de mesures.

Quand on utilise un appareil pour effectuer une mesure, il faut lire sa notice dans laquelle on y trouve des incertitudes-types.

On pourrait davantage affiner l'incertitude sur la première expérience en combinant incertitudes de type A et incertitudes de type B. Pour cela, on utilise la **formule générale de propagation des incertitudes** :

$$u_r = \sqrt{u_A^2 + \sum_{i=1}^M u_{i,B}^2} \quad (9)$$

avec u_r l'incertitude-type sur le résultat, u_A l'incertitude-type associée au traitement de type A et $u_{i,B}$ les incertitudes-type associées au traitement de type B.