LP 23 – Oscillations

Manon LECONTE - ENS de Lyon

Dernière mise à jour : 10 mai 2020

Merci à Fënril Montorier, Patrick Rigord et Joachim Galiana pour leur précieuse aide.

Mots-clé : oscillations, approximation des petits angles, oscillateur amorti, régime sinusoïdal forcé.
Niveau : BCPST 2
Pré-requis :
- Mécanique du point (PFD, forces usuelles) [BCPST 1]
- Forces de frottement (fluide, solide) [BCPST 1]
- Pendule simple et système masse-ressort [BCPST 1]
- Conservation de l'énergie (équilibres stables et instables) [BCPST 1]
- Régime transitoire et régime permanent [BCPST 1]
- Notation complexe [BCPST 2]

Bibliographie :

- Taillet, *Dictionnaire de physique* [Niveau : ⋆]
- Sanz, *Physique tout-en-un MPSI-PCSI-PTSI* [Niveau : ⋆⋆]
- Côte, *Physique-Chimie BCPST 2e année* [Niveau : ⋆]
- Notice du pendule simple utilisé pour les expériences

Plan proposé

Liste de matériel

Oscillations d'un pendule simple

— pendule à oscillations libres ou forcées ;
— boîtier électronique "Alimentation et mesure" (potentiomètre) ;
— GBF ;
— carte d'acquisition Sysam ;
— ordinateur équipé du logiciel Latispro.

Introduction pédagogique

Dans le programme de BCPST 2, les oscillations sont traitées en électrocinétique et en mécanique. Le choix est fait de présenter que de la mécanique dans ce cours. Bien que l'oscillateur harmonique soit vu en profondeur en BCPST 1, on reviendra dessus rapidement pour retrouver les résultats que l'on connaît.

Difficultés :
— calculs ;
— différence entre régime transitoire et régime permanent.

Exemples de TD : établissement et résolution des équations différentielles d'oscillateurs (libres ou forcés). *Exemple :* amortisseurs de voiture.

Exemples de TP : étude de pendules ou de systèmes masse-ressort (banc à coussin d'air) avec et sans frottements, avec et sans excitation.

Introduction

> **Définition – Oscillation :** variation périodique d'une quantité physique.

On rencontre des oscillations dans la vie de tous les jours : pendule d'une horloge, balançoire, ... Dans ce cours, on va chercher à comprendre pourquoi on observe des oscillations et comment les modéliser.

En BCPST 1, on a essentiellement décrit des systèmes oscillants simples : les oscillateurs harmoniques.

> **Définition – Oscillateur harmonique :** système oscillant dont l'évolution est décrite par l'équation différentielle :
>
> $$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \tag{1}$$
>
> Son mouvement est sinusoïdal, de pulsation ω_0 indépendante de l'amplitude du mouvement.

Dans ce cours, on va agrandir le champ d'étude à d'autres oscillateurs libres, notamment amortis, et à des oscillateurs forcés.

> **Objectifs –** Modéliser un oscillateur mécanique libre avec et sans frottements.
> Faire la différence entre régime transitoire et régime permanent.
> Modéliser un oscillateur en régime sinusoïdal forcé.

I - Oscillations libres non amorties

A/ Approximation harmonique

Considérons le graphe d'énergie potentielle de la figure 1.

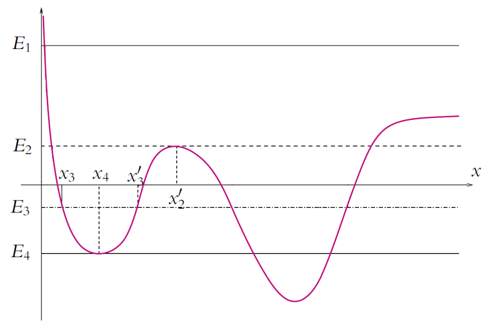


Figure 1 – Graphe d'énergie potentielle (**Source :** Sanz (p. 159)

Si on se place au voisinage du minimum x_4, on peut faire un développement limité à l'ordre 2 en utilisant la formule de Taylor :

$$E_p(x) = E_p(x_4) + (x - x_4) \left.\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x}\right|_{x_4} + \frac{(x-x_4)^2}{2} \left.\frac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x_4} \tag{2}$$

x_4 est un minimum d'énergie potentielle donc $\left.\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x}\right|_{x_4} = 0$.

On peut alors écrire l'expression de l'énergie mécanique du système :

$$E_m = E_p + E_c = E_p(x_4) + (x - x_4) + \frac{(x-x_4)^2}{2} \left.\frac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x_4} + \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \tag{3}$$

On fait l'hypothèse qu'aucune force de frottements ne s'applique sur le système et qu'aucune autre force non conservative ne travaille. D'après le théorème de l'énergie mécanique, cette dernière se conserve et on a :

$$\frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = 0 = \dot{x}(x - x_4) \left.\frac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x_4} + m\dot{x}\ddot{x} \tag{4}$$

On pose $X = x - x_4$:

$$\ddot{X} + \frac{1}{m} \left.\frac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x_4} X = 0 \tag{5}$$

On reconnaît l'équation du mouvement d'un oscillateur harmonique de pulsation $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{m} \left.\frac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x_4}}$. On peut ainsi approcher tout potentiel en un potentiel harmonique au voisinage de sa position d'équilibre stable.

B/ Mise en évidence expérimentale

Expérience – Oscillations d'un pendule non amorti dans la limite des petits angles et au-delà.

Le pendule est régi par l'équation du mouvement :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin\theta = 0 \tag{6}$$

On mesure la période d'un pendule dans la limite des petits angles. Celle-ci est constante et donc indépendante de l'amplitude des oscillations. Il s'agit bien d'un oscillateur harmonique.

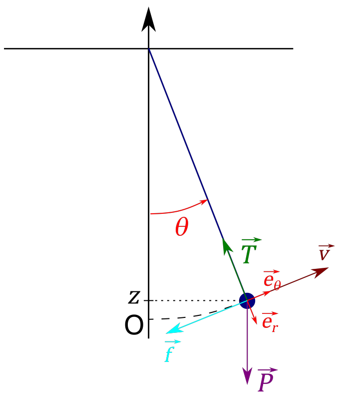
On mesure la période d'un pendule pour un grand angle initial (supérieur à 20°). Celle-ci varie et dépend de l'amplitude des oscillations.

On voit ainsi que le développement limité $\sin\theta \simeq \theta$ n'est valable que pour des angles inférieurs à 20°.

II - Oscillations libres amorties

A/ Amortissement dû à des frottements fluides

On considère de nouveau un pendule, auquel on ajoute des frottements fluides ($\overrightarrow{f} = -\lambda\overrightarrow{v}$). Ces derniers **amortissent** le mouvement de la masse. Intuitivement, on comprend que les oscillations vont finir par s'arrêter, mais peut-on quantifier le nombre d'oscillations ?



On applique le principe fondamental de la dynamique sur le système {masse} :

$$m\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t} = m\overrightarrow{g} + \overrightarrow{T} - \lambda\overrightarrow{v} \tag{7}$$

On projette selon $\overrightarrow{u_\theta}$ pour obtenir l'équation du mouvement :

$$\ddot{\theta} + \frac{\lambda}{m}\dot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = \ddot{\theta} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0 \tag{8}$$

avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ et $Q = \frac{m}{\lambda}\sqrt{\frac{g}{l}}$.

Pour résoudre cette équation différentielle, on cherche les racines de son polynôme caractéristique :

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2 = 0 \tag{9}$$

dont le discriminant vaut :

$$\Delta = 4\,\omega_0^2\left(\frac{1}{4\,Q^2} - 1\right) \tag{10}$$

On identifie alors trois types de régimes transitoires (figure 2) :

— Si $\Delta > 0$, soit $Q < 1/2$, le régime est **apériodique** : il n'y a pas d'oscillations ;
— Si $\Delta < 0$, soit $Q > 1/2$, le régime est **pseudo-périodique** : il y a quelques oscillations avant l'arrêt du pendule ;
— Si $\Delta = 0$, soit $Q = 1/2$, le régime est **critique** : on est à la limite des oscillations.

Au delà, c'est-à-dire au régime permanent, la pendule ne bouge plus.

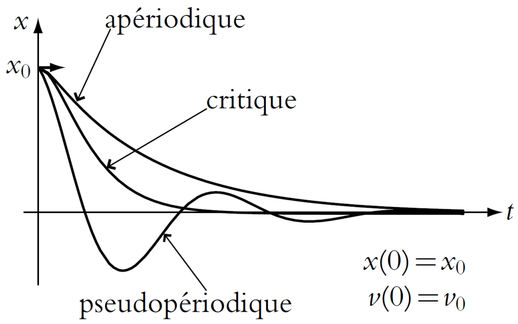


Figure 2 – Représentation des régimes pseudo-périodique, critique et apériodique d'un oscillateur amorti (**Source** : Sanz (p. 180)).

Définition – **Facteur de qualité Q :** grandeur caractéristique des systèmes oscillants amortis qui mesure l'importance de l'amortissement sur les oscillations.

Un facteur de qualité élevé correspond à un grand nombre d'oscillations.

B/ Mise en évidence expérimentale

Expérience – On impose sur le pendule des frottements fluides par induction : la masse sur le pendule est aimantée et son mouvement est ralenti par la plaque aimantée qui lui fait face par création de courants de Foucault.

On peut augmenter le facteur de qualité du système en rapprochant la masse de la plaque. On peut alors visualiser un régime pseudo-périodique plus ou moins amorti.

III - Oscillations forcées

A/ Etude d'un système masse-ressort

On considère le dispositif de la figure 3.

La masse est plongée dans un liquide induisant une force de frottement fluide $\overrightarrow{f} = -\lambda\overrightarrow{v}$. En outre, l'extrémité du ressort est excitée sinusoïdalement par le moteur, ce qui exerce sur la masse une force supplémentaire $\overrightarrow{F_e} = F_0\cos(\omega t)\overrightarrow{u_x}$.

L'équation différentielle vérifiée par la position de la masse est alors :

$$\ddot{x} + \frac{\lambda}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t) \tag{11}$$

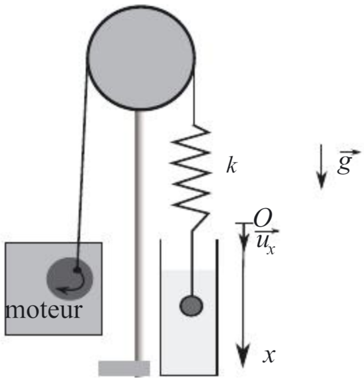


Figure 3 – Schéma du dispositif étudié (**Source :** Côte, exercice 17.5 (p. 554)).

On introduit de nouveau une pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et un facteur de qualité $Q = \frac{m}{\lambda}\sqrt{\frac{k}{m}}$.

Le régime transitoire correspond à la solution de l'équation homogène. La forme est décrite dans la sous-partie A/.

Le régime permanent peut être déterminé en passant en notation complexe, puisque l'équation différentielle que l'on souhaite résoudre est linéaire :
$\underline{x} = x_0\ e^{j(\omega t + \phi)} = \underline{x_0}\ e^{j(\omega t}$. L'équation différentielle devient :

$$-\omega^2 \underline{x_0} + j\omega\frac{\omega_0}{Q}\underline{x_0} + \omega_0^2\underline{x_0} = \frac{F_0}{m} \tag{12}$$

On en déduit l'expression de l'amplitude des oscillations de la masse :

$$x_0 = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega_0}{Q}\omega\right)^2}} \tag{13}$$

La phase est quant à elle définie par :

$$\phi = \arg(\underline{x_0}) \tag{14}$$

On a représenté la succession des régimes transitoire et permanent sur la figure 4.
Le dispositif étudié peut modéliser un amortisseur de voiture, l'excitation du moteur correspondant aux oscillations de la route.

B/ Mise en évidence expérimentale

Expérience – On laisse la masse aimantée sur le pendule et on active les oscillations forcées (l'arceau relié à la tige du pendule passe dans une bobine, ce qui crée une excitation sinusoïdale).

On peut ainsi visualiser sur Latispro la succesion du régime transitoire et du régime permanent.

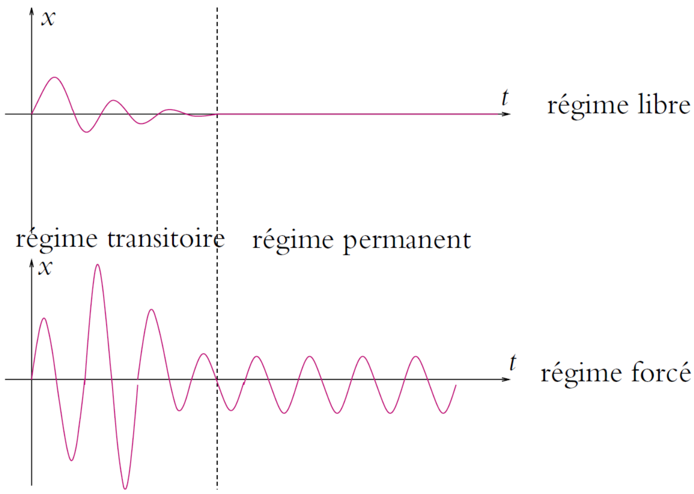


Figure 4 – Régimes transitoires (pseudo-périodiques) et permanents d'un oscillateur libre amorti et d'un oscillateur forcé (**Source :** Sanz (p. 612)).

Conclusion

Les oscillations peuvent facilement être modélisées par des équations différentielles du second ordre. Elles sont composées - mis à part les oscillations libres non amorties - d'un régime transitoire puis d'un régime permanent. Le premier se détermine par la résolution de l'équation homogène. Le second dépend du terme d'excitation (nul si les oscillations sont libres, sinusoïdal si l'excitation est sinusoïdale, ...).

Dans ce cours, on a également introduit le facteur de qualité Q. Dans de nombreux exemples, par exemple pour les amortisseurs d'une voiture, on cherche à la maximiser. Pour cela, on pourra étudier le phénomène de résonance.