LP 22 – Phénomènes de diffusion

Manon LECONTE - ENS de Lyon

Dernière mise à jour : 5 mai 2020

Merci à Luc Pontoglio, Thibault Clarté et Joachim Galiana pour leur précieuse aide.

Mots-clé : diffusion, conduction électrique, diffusion particulaire, conduction thermique.
Niveau : L2
Pré-requis :
- Electrocinétique (loi d'Ohm, association de résistance) [L1]
- Force de Coulomb (lien entre champ, potentiel et force) [L1]
- Utilisation du papier pH [secondaire]
- Thermodynamique : premier principe [BCPST 1]
- Régime permanent [L1]

Bibliographie :
- Côte, *Physique-Chimie BCPST 2e année* [Niveau : ⋆]
- Sanz, *Physique tout-en-un PC* [Niveau : ⋆⋆⋆]
- Taillet, *Dictionnaire de physique* [Niveau : ⋆⋆]

Plan proposé

Liste de matériel

Diffusion d'ammoniac dans un tube

- Hôte, gants, blouse et lunettes de protection ;
- tube en verre ;
- tige en cuivre ;
- 2 bouchons pleins ;
- papier pH ;
- chronomètre ;
- réglet ;
- coton ;
- solution d'ammoniac concentrée ;
- pipette Pasteur.

Diffusion à travers une barre de cuivre calorifugée

- Barre de cuivre calorifugée ;
- Fils banane ;
- Carte d'acquisition Sysam ;
- Ordinateur avec Latispro.

Introduction pédagogique

Le présent cours introduit les phénomènes de diffusion aux élèves. Bien qu'elle ait déjà été discutée dans le secondaire et en BCPST 1, cette notion a été abordée de manière assez descriptive et macroscopique, et s'est restreinte à la seule conduction thermique. Dans ce cours, on va offrir une description microscopique des phénomènes de diffusion, en se focalisant sur la conduction électrique, la diffusion de matière et la conduction thermique.

Difficultés :
- déterminer le sens du flux ;
- établir un bilan de matière.

Exemples de TD :
- établir les équations de diffusion dans différents domaines de la physique ;
- déterminer l'expression d'un champ ou profil diffusif ;
- déterminer l'expression d'une résistance associée à un phénomène de diffusion (électrique ou thermique).

Exemples de TP :
- Diffusion d'ammoniac dans un tube ;
- Barre de cuivre calorifugée.

Introduction

> **Définition – Diffusion :** mode de transport de proche en proche sans déplacement de matière.

> **Exemple –** Diffusion d'un sirop de grenadine avec et sans convection.

La diffusion est un phénomène lent par rapport à la convection.

Il existe d'autres phénomènes de diffusion que la diffusion de matière : la conduction électrique, la conduction thermique, ...

> **Objectifs –** Comprendre le phénomène de diffusion et ses caractéristiques. Etablir une équation de diffusion.

I - Conduction électrique

A/ Origine du courant

Sous l'effet d'une tension, c'est-à-dire d'une différence de potentiel, les charges présentent dans un conducteur sont mises en mouvement. En effet, la différence de potentiel induit un champ électrique et les charges sont soumises à une force de Coulomb.

> **Définition – Courant électrique :** mouvement d'ensemble des charges électriques.

Il peut être vu comme un flux :

$$I = \iint_S \overrightarrow{j_{el}} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S} \tag{1}$$

où $\overrightarrow{j_{el}}$ est le **vecteur densité de courant électrique** [en A/m^2]. Il représente la charge traversant une surface S par unité de temps. On peut alors noter la variation de charges :

$$\mathrm{d}q = \overrightarrow{j_{el}} \cdot \overrightarrow{S}\,\mathrm{d}t \tag{2}$$

On retrouve ainsi que :

$$I = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} \tag{3}$$

B/ Loi d'Ohm locale et résistance électrique

> **Définition – Loi d'Ohm locale :** $\overrightarrow{j_{el}} = -\sigma\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}V = \sigma\overrightarrow{E}$, avec σ la **conductivité électrique** du milieu [en S/m], V le potentiel et $\overrightarrow{E}$ le champ électrique auquel sont soumises les charges.

La conductivité électrique mesure l'aptitude du milieu à conduire les charges. C'est elle que l'on cherche à mesurer dans les expériences de conductimétrie en chimie. On peut définir également la **résistivité électrique** exprimée en Ω m :

$$\rho = \frac{1}{\sigma} \tag{4}$$

On remarque à travers cette équation que le vecteur densité de courant électrique, et donc le courant, sont dirigés des **zones de haut potentiel vers celles de bas potentiel**.

Lien avec la loi d'Ohm vue en électrocinétique Considérons un conducteur cylindrique de longueur l, de section S et de conductivité σ, traversé par un vecteur densité de courant électrique **uniforme** et dirigé selon l'axe du conducteur $\overrightarrow{e_x}$.

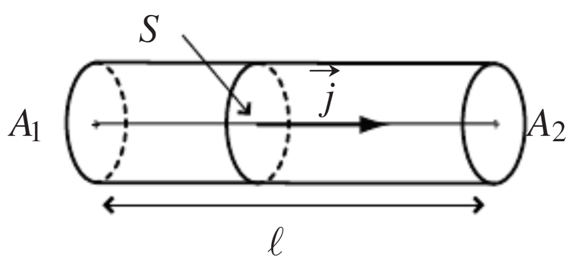


Figure 1 – Schéma du conducteur cylindrique (**Source :** Sanz (p. 590)).

L'intensité du courant traversant le conducteur s'exprime :

$$I = \iint_S \overrightarrow{j_{el}} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S} = j_{el}\ S \tag{5}$$

On exprime de même la tension aux bornes du conducteur :

$$V(A_2) - V(A_1) = \int_{x=0}^{l} \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, V \cdot \mathrm{d}x\ \overrightarrow{e_x} = -\frac{1}{\sigma}\int_{x=0}^{l} \overrightarrow{j_{el}} \cdot \mathrm{d}x\ \overrightarrow{e_x} = -\frac{l}{\sigma} j_{el} \tag{6}$$

En combinant les deux équations et en adoptant la convention récepteur, on retrouve la **loi d'Ohm**, dite "intégrale" :

$$U = V(A_1) - V(A_2) = RI = \frac{l}{\sigma S} I \tag{7}$$

On en déduit une expression de la **résistance électrique** dans un tel conducteur :

$$R = \frac{l}{\sigma S} = \frac{\rho\, l}{S} \tag{8}$$

> **Ordre de grandeur –** Pour un conducteur en cuivre (σ = 59,6 $\times$ 10^6 S/m) de rayon r = 1 mm, et de longueur l = 50 cm - un fil en somme - la résistance vaut 3 mΩ. Elle est ainsi très inférieure aux valeurs de résistance usuellement utilisées en TP, c'est pourquoi on peut la négliger.

II - Diffusion de matière ou particulaire

A/ Origine de la diffusion particulaire

La diffusion de matière apparaît lorsque la densité particulaire (ou concentration) $n^* = \frac{N}{V}$ (en m^{-3}) n'est pas uniforme partout dans le milieu.

> **Définition – Flux de particules :** $\Phi_p = \iint \overrightarrow{j_p} . \overrightarrow{\mathrm{d}S}$, avec $\overrightarrow{j_p}$ le **vecteur densité de courant particulaire** [en m^{-2}s^{-1}].

Le vecteur densité de courant particulaire peut être vu comme le nombre de particules qui traversent une surface S par unité de temps. On note alors la variation du nombre de particules :

$$\mathrm{d}N = \overrightarrow{j_p} . \overrightarrow{S}\, \mathrm{d}t \tag{9}$$

> **Définition – Loi de Fick (1855) :** $\overrightarrow{j_p} = -D\, \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, n^*$, avec D le **cœfficient de diffusion** [en m^2/s].

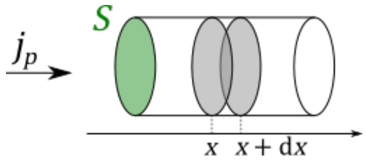
Le cœfficient de diffusion mesure l'aptitude du milieu à transporter les particules.

On observe que le flux de particules est dirigé des zones les plus concentrées vers les zones les moins concentrées en particules.

On retrouve ainsi des résultats proches de la conductivité électrique en faisant un parallèle entre le flux particulaire Φ_p et l'intensité du courant I, les vecteurs densité de courants particulaire $\overrightarrow{j_p}$ et électrique $\overrightarrow{j_{el}}$, ...

B/ Equation de diffusion

On effectue un bilan de particules dans un système de section S situé entre x et $x + \mathrm{d}x$ pendant un temps $\mathrm{d}t$.



On cherche à exprimer la variation du nombre de particules $\mathrm{d}N$ dans le système :

$$\mathrm{d}N = \delta N_e - \delta N_s + \delta N_c - \delta N_d \tag{10}$$

avec :
- δN_e le nombre de particules entrant dans le système pendant $\mathrm{d}t$:
  $\delta N_e = j_p(x,t)\ S\mathrm{d}t$;
- δN_s le nombre de particules sortant du système pendant $\mathrm{d}t$:
  $\delta N_s = j_p(x+\mathrm{d}x,t)\ S\mathrm{d}t$;
- δN_c le nombre de particules créées dans le système pendant $\mathrm{d}t$. Ce terme est appelé **terme de source** et peut correspondre à une réaction chimique. On le suppose nul dans notre exemple ;
- δN_d le nombre de particules disparaissant dans le système pendant $\mathrm{d}t$. Ce terme est appelé **terme de puits**. On le suppose nul dans notre exemple.

On a donc que :

$$\mathrm{d}N = j_p(x,t)\ S\mathrm{d}t - j_p(x+\mathrm{d}x,t)\ S\ \mathrm{d}t = -\frac{\partial j_p}{\partial x}(x,t)\ S\ \mathrm{d}t\ \mathrm{d}x \tag{11}$$

En outre, la variation du nombre de particules dans le système est liée à la variation de la concentration au point x pendant $\mathrm{d}t$:

$$\mathrm{d}N = (n^*(x,t+\mathrm{d}t) - n^*(x,t))\ S\ \mathrm{d}x = \frac{\partial n^*}{\partial t}(x,t)\ S\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}t \tag{12}$$

On identifie les deux expressions :

$$\frac{\partial\ n^*(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial j_N(x,t)}{\partial x} \tag{13}$$

On utilise la loi de Fick pour déterminer l'expression du vecteur densité de courant particulaire, que l'on injecte dans l'équation précédente.

Définition – Equation de diffusion : $\frac{\partial n^*}{\partial t}(x,t) = D\frac{\partial^2\ n^*}{\partial x^2}(x,t)$.

On remarque que ce phénomène est **irréversible**. En effet, si l'on fait le changement de variable $t \to -t$, on trouve l'opposé de l'équation de diffusion, ce qui signifie qu'elle n'est pas renversable dans le temps.

Généralisation à trois dimensions

$$\frac{\partial n^*}{\partial t}(\overrightarrow{r},t) = D\ \Delta n^*(\overrightarrow{r},t) \tag{14}$$

C/ Durée du phénomène de diffusion

Expérience – On fait diffuser de l'ammoniac dans un tube et l'on repère son avancement par la coloration de papiers pH régulièrement espacés (lien vers la vidéo).

Par analyse dimensionnelle, on peut déterminer une relation entre la durée caractéristique τ du phénomène de diffusion et la longueur caractéristique L du problème :

$$\frac{\partial n^*}{\partial t}(x,t) \propto \frac{n^*}{\tau}\,;\ \frac{\partial^2 n^*}{\partial x^2}(x,t) \propto \frac{n^*}{L^2}$$

$$\Leftrightarrow \tau = \frac{L^2}{D} \tag{15}$$

Ordre de grandeur – Si l'on revient à l'exemple de la grenadine, on peut supposer que le cœfficient de diffusion du sirop est de l'ordre de 10^{-10} m^2/s pour un verre de dimension caractéristique $L = 5$ cm. Il faut donc attendre un temps $\tau = 3 \times 10^7$ s, soit presqu'une année pour que la concentration en sirop soit homogène dans le verre. En pratique, le fait de verser l'eau sur le sirop entraîne de la convection et permet d'homogénéiser plus vite les concentrations.

III - Diffusion thermique

La diffusion ou conduction thermique apparaît lorsque la température n'est pas uniforme partout dans le milieu. On peut utiliser les résultats des deux parties précédentes pour définir les grandeurs associées à la diffusion thermique.

A/ Analogie avec la diffusion de particules

Définition – **Flux thermique** : $\Phi_{th} = \iint \overrightarrow{j_{th}}.\overrightarrow{dS}$, avec $\overrightarrow{j_{th}}$ le **vecteur densité de courant thermique** [en W/m^2].

Définition – **Loi de Fourier (1807)** : $\overrightarrow{j_{th}} = -\lambda_{th}\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,T$, avec λ_{th} la **conductivité thermique** du milieu [en W/m/K].

La conductivité thermique mesure l'aptitude du milieu à transporter l'énergie thermique.

Remarque – La loi de Fourier est une loi **empirique** qui a été déterminée avant la loi de Fick. Elle n'est valable que pour de faibles gradients de température, variant peu dans le temps et dans un milieu isotrope.

On observe que le flux thermique est dirigé des zones de températures les plus élevées vers celles de températures les plus faibles.

Pour établir l'équation de diffusion thermique, appelée équation de la chaleur, on adopte la même démarche que pour la diffusion de particules. On effectue un bilan d'énergie sur un système de masse volumique ρ constante et de capacité calorifique massique c, en utilisant le 1er principe de la thermodynamique.

Définition – **Equation de la chaleur** : $\frac{\partial T}{\partial t} = D_{th} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$, avec $D_{th} = \frac{\lambda_{th}}{\rho \ c}$ la **diffusivité thermique** [en m^2/s].

Démonstration – Sanz (p. 127).

Généralisation à trois dimensions

$$\frac{\partial T}{\partial t}(\overrightarrow{r}, t) = D_{th} \ \Delta T(\overrightarrow{r}, t) \tag{16}$$

B/ Exploitation de l'équation de diffusion en régime permanent

Expérience – Barre de cuivre calorifugée

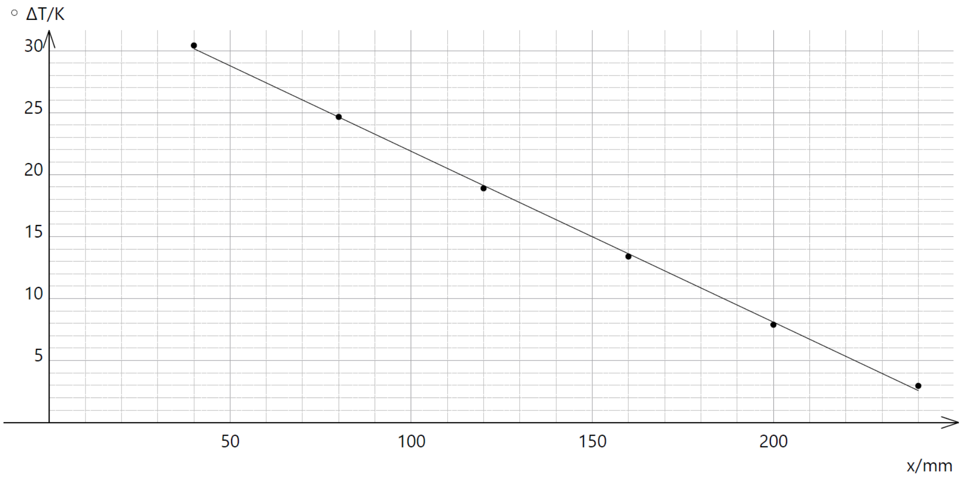
En régime permanent, l'équation de la chaleur devient :

$$\frac{\mathrm{d}^2 T}{\mathrm{d}x^2} = 0 \tag{17}$$

On en déduit que la température est une fonction affine de l'abscisse : $T(x) = ax + b$.
Les conditions aux limites sont les suivantes :
— en $x = 0$, $T(0) = b = T_c$;
— $x = L$, $T(L) = aL + T_c \Rightarrow a = \frac{T_{air} - T_c}{L}$
Ainsi,

$$T(x) = \frac{T_{air} - T_c}{L} \ x + T_c \tag{18}$$

Si l'on trace le graphe de la température en fonction de l'abscisse, on obtient bien une fonction affine :



C/ Résistance thermique

On peut faire l'analogie entre la différence de potentiel et la différence de température, entre l'intensité du courant et le flux thermique. On peut donc définir une résistance thermique par analogie avec la loi d'Ohm.

Définition – Résistance thermique : $R_{th} = \frac{\Delta T}{\Phi_{th}}$ [en K/W].

Dans le cadre d'un conducteur thermique de section S et de longueur L, la résistance thermique a également pour expression :

$$R_{th} = \frac{l}{\lambda S} \tag{19}$$

On peut utiliser les mêmes formules qu'en électrocinétique pour l'association de résistances.

Ordre de grandeur – La résistance thermique d'une vitre d'épaisseur $e =$ 5,0 mm et de surface S= 1,0 m^2 vaut R_{th} = 6,4 × 10^{-3} K/W (λ_{verre} = 0,78 W/m/K). Pour une vitre comportant du double vitrage, à savoir deux plaques de verre d'épaisseur e = 2,0 mm et un espace contenant de l'air d'épaisseur e_{air} = 1,0 mm entre les deux, la résistance thermique devient $R_{th} = 2R_{verre} + R_{air}$ = 4,4 × 10^{-2} K/W (λ_{air} = 2,6 × 10^{-2} W/m/K). On comprend tout l'intérêt du double vitrage car, pour une même épaisseur de vitre, la résistance thermique est supérieure.

Conclusion

La diffusion est un mode de transport de grandeurs physiques extensives (charges, particules, énergie, ...) décrit par une équation de diffusion et dû à une inhomogénéité d'une grandeur intensive (potentiel, concentration, température, ...). Elle tend à homogénéiser la répartition de la grandeur, sur une durée $\tau = \frac{L^2}{D}$ avec L la longueur caractéristique du système et D le cœfficient de diffusion.

En mécanique des fluides, on pourra étudier un dernier type de diffusion : la diffusion de quantité de mouvement due à la viscosité du fluide.

	Loi d'Ohm locale	**Loi de Fourier**	**Loi de Fick**
Grandeur transportée	Charges	Énergie thermique	Particules
Densité de courant	$\overrightarrow{j_{\mathrm{el}}}$ (A.m^{-2})	$\overrightarrow{j_{\mathrm{th}}}$ (W.m^{-2})	$\overrightarrow{j_{\mathrm{p}}}$ (m^{-2}.s^{-1})
Cause du transport : gradient de ...	Potentiel électrique V_{el} (V)	Température T (K)	Densité particulaire n^* (m^{-3})
Coefficient de transport	Conductivité électrique σ (S.m^{-1})	Conductivité thermique λ_{th} (W.m^{-1}.K^{-1})	Diffusivité D (m^2.s^{-1})
Loi de transport	$\overrightarrow{j_{\mathrm{el}}} = -\sigma\overrightarrow{\mathrm{grad}}V_{\mathrm{el}}$	$\overrightarrow{j_{\mathrm{th}}} = -\lambda_{\mathrm{th}}\overrightarrow{\mathrm{grad}}(T)$	$\overrightarrow{j_{\mathrm{p}}} = -D\overrightarrow{\mathrm{grad}}(n^*)$

Figure 2 – Analogie entre les trois types de conduction étudiés dans ce cours (**Source** : Côte (p. 666)).