

# LP01 - Contact entre deux solides. Frottement.

May 15, 2019

## Contents

<b>1</b>	<b>Contact entre deux solides ?</b>	<b>3</b>
1.1	Approche macroscopique : . . . . .	3
1.2	Forces de contact : . . . . .	4
1.2.1	Positionnement du problème . . . . .	4
1.2.2	vitesse de glissement . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Théorie du frottement solide :</b>	<b>6</b>
2.1	Phénoménologie : Lois d'Amontons-Coulomb . . . . .	6
2.1.1	Statique : . . . . .	7
2.1.2	Dynamique . . . . .	7
2.1.3	ODG . . . . .	7
2.1.4	Interprétation géométrique : . . . . .	7
2.2	Aspect énergétique : . . . . .	8
2.3	Aspect microscopique . . . . .	9
2.3.1	Expérience de De Vinci . . . . .	9
2.3.2	Explication microscopique : . . . . .	10
<b>3</b>	<b>Application : Collé-glissé</b>	<b>11</b>
3.1	Position du problème : . . . . .	11
3.2	Résolution : . . . . .	12
3.2.1	Phase Collée . . . . .	12
3.2.2	Phase glissée . . . . .	13
3.3	Bilan : . . . . .	14
<b>4</b>	<b>Annexe :</b>	<b>16</b>
4.1	Suite du calcul du collé glissé phase glissé . . . . .	16
4.2	Modèles microscopiques : . . . . .	16
4.2.1	Modèle des Brosses . . . . .	16
4.2.2	Dents de Scies . . . . .	17
4.3	Sur l'hystérésis : . . . . .	17
4.4	Sur le vieillissement : . . . . .	17
4.5	Arc-boutement : . . . . .	17
4.6	Retour de 2008 . . . . .	18

- 2017 Cette leçon gagne beaucoup à être illustrée par des exemples concrets maîtrisés.
- 2016 Cette leçon est l'occasion d'appliquer les lois de la mécanique du solide.

- 2015 Cette leçon est souvent présentée à un niveau trop élémentaire. La compréhension des aspects microscopiques en jeu est appréciée par le jury.
- 2013, le titre était : Contact entre deux solides. Frottement de glissement. Applications au glissement et au roulement.
- 2006 : L'approche énergétique du contact doit être développée et une description microscopique peut être esquissée.
- 2005 : Il serait pertinent d'étudier les aspects énergétiques et de décrire l'exemple d'un mouvement où intervient du roulement avec glissement et sans glissement.
- 2002 L'énoncé des lois de Coulomb relatives au frottement de glissement est souvent incomplet. Il faut éviter la confusion entre puissance des actions subies par un des solides en contact, et puissance totale des actions de contact. L'origine microscopique des actions de frottement mérite d'être évoquée.
- 1999 : Il faut préciser les référentiels et distinguer le mouvement du point d'un solide au voisinage du contact du mouvement du point de contact. Les candidats limitent leur exposé au frottement de glissement ; les mouvements de roulement (ou de pivotement) ne sont pas interdits. L'aspect microscopique est rarement abordé.
- 1998 : Les candidats sont invités à ne pas restreindre leurs exemples à des mouvements de translation. Il est rappelé que la loi d'Amontons, à savoir que la force de friction ne dépend que de la charge et non de l'aire du contact, est au moins aussi importante que les lois de Coulomb.

Au programme de *PCSI* : Lois de Coulomb du frottement de glissement dans le seul cas d'un solide en translation. Exploiter les lois de Coulomb fournies dans les trois situations : équilibre, mise en mouvement, freinage. Formuler une hypothèse (quant au glissement ou non) et la valider.

### Références :

- Les milieux granulaires, Andreotti pour des informations précises.
- BUP 822-1 (03/2000), Les étudiants et le sens des forces de frottements solide : le modèle de la brosse, Helena Caldas et Edith Saltiel Article complet sur les erreurs communes, et introduction au modèle de la brosse.
- Physique PCSI , Grécias Les bases du cours.

### Niveau : L3

#### Prérequis :

- Mécanique du point
- Mécanique du solide (élémentaire)

# Introduction

Un violon émet un son à partir de la vibration d'une corde frottée par un archet. Or, l'archet décrit un mouvement de translation rectiligne uniforme. Comment est réalisée l'excitation de la corde ?

Les frottements fluides ne sont pas les seuls frottements existants. Il existe aussi des frottements entre solides, de nature différente. Sans ces frottements solides<sup>1</sup>, nous ne pourrions pas faire avancer de voiture ni même marcher. Ce sont ces mêmes frottements qui sont à l'origine du grincement des portes et de la vibration des cordes d'un violon.

L'objectif de ce cours est de déterminer les origines de ces frottements par l'étude et la modélisation du contact ponctuel entre deux solides indéformables. Les lois de Coulomb pour les frottements solides seront formulées, et nous étudierons leurs conséquences.

## 1 Contact entre deux solides ?

### 1.1 Approche macroscopique :

Macroscopiquement, on a pour habitude de distinguer plusieurs types de contacts entre solides : surfacique (exemple : pavé sur plan), linéique (exemple : cylindre sur plan), et ponctuelle (exemple : sphère sur plan). (avec éventuellement plusieurs points de contact), comme illustré sur la figure)

Les solides sont dits en contact dès qu'il existe au moins un point  $I$  de contact. En réalité, les solides se déforment légèrement, si bien qu'il existe toujours une certaine surface de contact autour de  $I$  : les contacts linéique et ponctuel ne sont donc qu'une approximation.

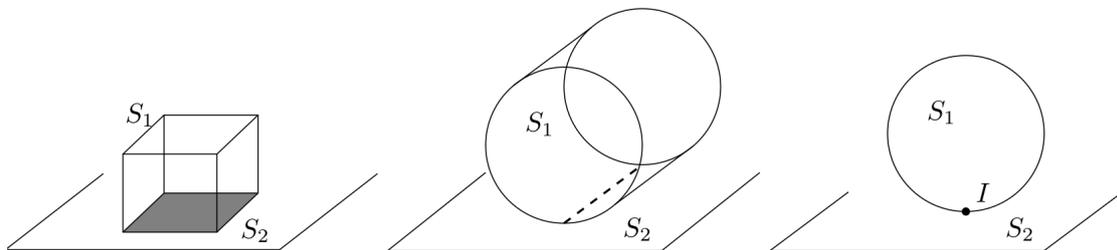


Figure 1: Exemple de types de contacts entre des solides indéformables et un plan.

Tr

Le contact entre deux solides donne lieu à des **actions mécaniques**, nous allons les caractériser.

<sup>1</sup>Un solide c'est un ensemble dense de points de l'espace. Ils sont donc décrits dans une approximation continue de la matière. Un solide est indéformable quand la distance entre tout couple de points lui appartenant est constante.

## 1.2 Forces de contact :

### 1.2.1 Positionnement du problème

Lorsque les deux solides ( $S_2$ ) et ( $S_1$ ) sont en contact, il existe plusieurs actions mécaniques exercées par ( $S_2$ ) sur ( $S_1$ ). Elles sont modélisables par une force résultante  $\vec{R}$  associée à un moment  $\vec{M}$ .

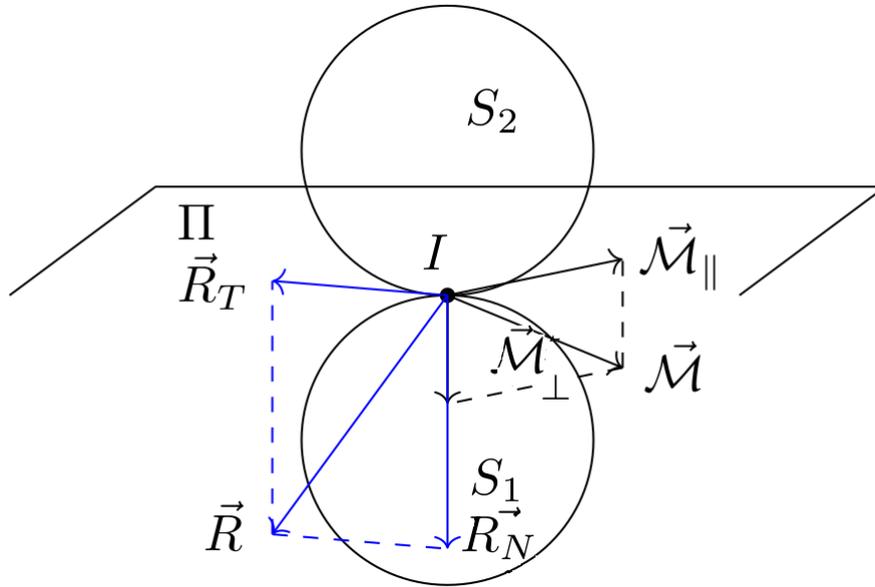


Figure 2: 2 solides  $S_1$  et  $S_2$  en contact. De ce dernier résulte une force  $R$  de moment  $M$ .

Nous pouvons décomposer ces 2 vecteurs en une composante dans le plan tangent au deux solides et contenant le point de contact et une composante orthogonale à ce plan. Nous définissons ainsi les résultantes normale  $\vec{R}_N$  (orthogonale au plan) et tangentielle  $\vec{R}_T$  ainsi que les moments de pivotement  $\vec{M}_\perp$  et de roulement  $\vec{M}_\parallel$ . Un schéma illustrant cette décomposition est donné en figure 2.

Nous savons d'après le théorème du moment cinétique que la variation au cours du temps du moment cinétique est égale à la somme des moments associés aux forces agissant sur le système.

$$\frac{d}{dt} \vec{\mathcal{L}} = \sum_i \vec{\mathcal{M}}_i \quad (1)$$

### 2 exemples :

- la toupie

Si nous prenons l'exemple d'une toupie dont le moment cinétique  $\vec{\mathcal{L}}$  est orienté suivant la normale au plan de contact, alors le moment responsable de la diminution de la vitesse de rotation jusqu'à l'arrêt d'une toupie est le moment de pivotement  $\vec{M}_\perp$ . Il s'oppose à  $\vec{\mathcal{L}}$ , diminuant ainsi sa norme.

Notons ici que contrairement à ce que laisse penser la figure 2, le contact n'est pas ponctuel. Si c'était réellement le cas, les moments des forces de frottements en  $I$  suivant n'importe quel axe seraient nuls. En effet, il ne peut pas avoir de phénomène de bras de levier si le seul point de contact est le point où s'applique les forces  $\overrightarrow{OM} = \vec{0}$  dans  $\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{F}$ .

- la roue de vélo

Dans le cas d'une roue, malgré que les moments en  $I$  sont nuls, cela ne l'empêchera pas de tourner car les forces de frottement introduites exercent un moment sur le centre de gravité du système qui définit le point  $O$  pour le calcul du vecteur  $\overrightarrow{OM}$ !

### Restriction de l'étude :

- Un contact ponctuel

Dans la suite de la leçon, nous nous limiterons cependant à cette approximation d'un contact rigoureusement ponctuel pour faciliter les calculs. La résultante des actions de contact s'appliquera alors nécessairement au point de contact. Si nous prenons l'exemple d'un pavé, on considérera que le point d'application des forces de frottement est le projeté du centre de gravité sur la surface de contact suivant la direction de la force résultante  $R$  (voir figure 4)<sup>2</sup>.

Nous avons vu dans le premier exemple que cette approximation pouvait faire perdre la réalité physique du système et nous perdrons ainsi accès à sa dynamique. Dans ce cas, il est possible de tenir compte des moments dû au caractère non-ponctuel de la surface de contact en gardant l'hypothèse de ponctualité et en ajoutant ces moments sous forme de moments fictifs .

- Un système en deux dimensions

Pour beaucoup de problème, nous réaliserons un schéma dans le plan de la feuille. Cette restriction peut poser problème pour certaines études. Par exemple, si nous étudions le mouvement d'un ballon dans un plan incliné, nous remarquons que sa trajectoire n'est pas forcément rectiligne. Pour le comprendre, il faut tenir compte de la présence de moments orientés perpendiculairement au plan de descente.

Tr

Nous avons décrit les forces en présence, mais que peut-on dire du **mouvement** des solides en contact ?

### 1.2.2 vitesse de glissement

Lorsque les deux solides sont en contact, ils peuvent être en mouvement l'un par rapport à l'autre. Ce mouvement est décrit dans un référentiel  $R$  on prend celui du laboratoire. Prenons par exemple une balle rigide indéformable (sphère) ( $S_1$ ) qui roule sur une route (plan infini) ( $S_2$ ). On note  $I(t)$  le point de contact entre les deux solides. Au cours du temps,  $I$  ne correspond pas au même point à chaque instant puisque la balle **roule** sur le plan.

<sup>2</sup>Tant que nos objets sont simplement convexes, et avec  $G$  au dessus de la surface de contact (si non, l'objet tombe à cause de son poids), ça va marcher je pense.

$I(t)$  coïncide avec le point  $I_1(t)$  appartenant au solide  $(S_1)$  à chaque instant.

$I(t)$  coïncide avec le point  $I_2(t)$  appartenant au solide  $(S_2)$  à chaque instant.

Nous définissons alors **la vitesse de glissement de  $(S_1)$  par rapport à  $(S_2)$  comme la différence de vitesse entre les points coïncidant avec le point de contact dans  $R^3$**  :

$$\vec{v}_g(S_1/S_2) = \vec{v}(I_1 | R) - \vec{v}(I_2 | R) (= \vec{v}(I_1 | R_2)) \quad (2)$$

où  $R_2$  est le référentiel propre du solide  $(S_2)$ <sup>4</sup>.

Comme les solides ne peuvent pas s'interpénétrer, on a nécessairement que  $\vec{v}_g$  est contenue dans le plan tangent au contact.

Attention,  $I$  change d'endroit au cours du temps, mais  $I_2$  peut très bien avoir une vitesse identiquement nulle comme on va le voir ci-après.

**Lorsque  $\vec{v}_g(S_1/S_2) = \vec{0}$ , on dit qu'il y a non glissement.**

On peut aussi s'intéresser aux vitesses de rotations relatives :

$$\vec{\Omega}(S_1 | S_2) = \vec{\Omega}(S_1 | R) - \vec{\Omega}(S_2 | R) \quad (3)$$

$\vec{\Omega}$  se décompose en une partie normale au plan de contact (pivotement) et une partie dans le plan de contact (roulement)

Le roulement peut avoir lieu avec ou sans glissement.

Tr

Maintenant que l'on a découvert le cadre, il est temps d'entrer dans le vif du sujet :  
Pouvons nous trouver des lois pour comprendre le frottement solide ?

## 2 Théorie du frottement solide :

### 2.1 Phénoménologie : Lois d'Amontons-Coulomb

#### **Expérience :**

Matériel : masses en bois avec surface au choix P82 ; plan incliné P82.

On observe l'angle minimal de mise en mouvement de trois patins de surfaces différentes pour montrer l'influence de la nature des surfaces sur  $f_s$  : les patins ont des angles de mise en mouvement différents.

Avec le patin qui accroche le plus, on refait l'expérience en inclinant jusqu'à la mise en mouvement, puis on réduit l'angle tout en gardant le mouvement pour visualiser  $f_d < f_s$ .

<sup>3</sup>En fait, la définition donnée ne dépend aucunement du choix de  $R$ . Il s'agit juste de regarder la vitesse du point coïncidant avec le contact dans un solide dans le référentiel propre de l'autre solide.

<sup>4</sup>Pour les notations :  $\vec{v}(I_1 | R_2)$  désigne la vitesse du point  $I_1$  mesurée dans le référentiel  $R_2$

### 2.1.1 Statique :

Pour<sup>5</sup> mettre un mouvement un système initialement au repos, il faut que :

$$\|\vec{R}_T\| = f_s \times \|\vec{R}_N\| \quad (4)$$

avec  $f_s$  le coefficient de frottements statique.

- C'est une relation sur les normes des forces.
- Tant que l'objet est immobile, on sait seulement que

$$\|\vec{R}_T\| \leq f_s \times \|\vec{R}_N\| \quad (5)$$

En effet, un objet immobile peut soudain basculer sans se mettre à glisser. C'est ce qu'il se passe pour les roues d'un vélo.

### 2.1.2 Dynamique

Lorsque le solide est en mouvement (glissement) à la vitesse  $\vec{v}$  :

$$\|\vec{R}_T\| = f_d \times \|\vec{R}_N\| \quad (6)$$

avec  $f_d$  le coefficient de frottements dynamique. et que  $\vec{R}_T$  est dans le sens opposé à la vitesse  $\vec{v}$

- C'est une relation sur les normes des forces.
- On voit que  $\vec{R}_T$
- $f_d \neq f_s$  donc la réponse dépend des moments antérieurs. C'est de l'hystérésis. La réponse du système dépend de son histoire.
- On constate également un phénomène de vieillissement des contact qui fait que  $f_s$  augmente au cours du temps

### 2.1.3 ODG

Les coefficients  $f_s$  et  $f_d$  sont des constantes ne dépendant que de la nature des matériaux en contact, avec typiquement  $0, 1 \leq f_d < f_s \leq 1$  : D'après cette loi, il est plus difficile de mettre le solide en mouvement que d'entretenir le mouvement à vitesse constante. C'est pourquoi quand on déplace un frigo, c'est difficile au début<sup>6</sup>.

### 2.1.4 Interprétation géométrique :

On définit le cône de frottement comme le cône d'angle au sommet  $2\phi$  avec :

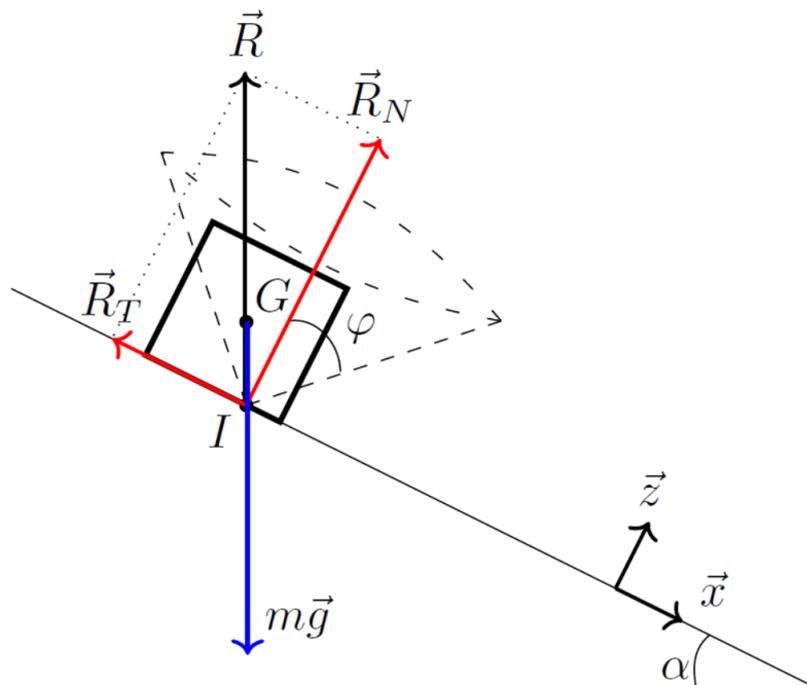
$$\tan(\phi) = \frac{\|\vec{R}_T\|}{\|\vec{R}_N\|} \quad (7)$$

<sup>5</sup>pour un ordre d'idée : Coulomb : (1736–1806) Amontons (qui a inventé le zéro absolu (1663-1705) De Vinci (1452–1519)

<sup>6</sup>Ce théorème fonctionne également sur les armoires ou les buffets...

Type de contact	$f_d$	$f_s$
acier-acier sec	0,6	0,4
acier-acier graissé	0,1	0,05
pneu-chaussée sèche	1	0,7
pneu-chaussée humide	0,7	0,3
bois-bois	0,5	0,3
bois-métal	0,6	0,1
téflon-acier	0,04	0,04

Figure 3: extrait de Taillet, Dictionnaire de la physique

Figure 4: Retours sur l'expérience du plan incliné (situation de non-glissement). Notez que la position du point  $I$  n'est pas au centre de la surface de contact ! Il est la projection de  $G$  sur la surface de contact suivant la direction de  $R$ 

- Le cône de frottement statique est défini , avec  $\tan\phi = f_s$  . **Tant que la résultante  $R$  est à l'intérieur du cône, il n'y a pas glissement** (c'est la condition  $\|\vec{R}_T\| = f_s \times \|\vec{R}_N\|$ ).
- Lors du glissement<sup>7</sup>,  $\|\vec{R}_T\| = f_d \times \|\vec{R}_N\|$  et  **$R$  est donc sur la surface du cône de frottement dynamique.** (qui est plus petit que le cône statique)

## 2.2 Aspect énergétique :

Il s'agit ici de se rendre compte que la puissance totale des actions de contact est négative.

<sup>7</sup>Attention, le cône de frottement dynamique est différent :  $\tan(\phi') = f_d < f_s$  !

Considérons deux solides ( $S_1$ ) et ( $S_2$ ) en contact au point  $I$ . On note à nouveau  $I_1$  et  $I_2$  les points coïncidents.

La puissance reçue par ( $S_1$ ) est

$$P_1 = \vec{R} \cdot \vec{v}(I_1 | R) \quad (8)$$

La puissance reçue par ( $S_2$ ) est, après application de la troisième loi de Newton ( $S_2$  subit  $-\vec{R}$ ),

$$P_2 = -\vec{R} \cdot \vec{v}(I_2 | R). \quad (9)$$

La puissance totale vaut donc

$$P_{tot} = P_1 + P_2 = \vec{R} \cdot \vec{v}_g(S_1/S_2) \quad (10)$$

soit, d'après les lois de Coulomb :

$$P_{tot} = - \| \vec{R}_T \| \cdot \| \vec{v}_g(S_1/S_2) \| = -f_d \| \vec{R}_N \| \cdot \| \vec{v}_g(S_1/S_2) \| \leq 0 \quad (11)$$

Ainsi, La puissance des forces dues aux frottements solides est négative. Cela justifie le terme de "frottements".

En particulier, il convient de faire remarquer que **la puissance totale des forces de frottement est nulle** s'il n'y a pas de frottement (bien entendu), ou **s'il n'y a pas de glissement**. On peut donc bien avoir une force de frottement non nulle sans avoir de dissipation d'énergie par frottement.

Tr

| Très tôt, on a voulu savoir de quel paramètre dépendaient  $f_s$  et  $f_d$ .

## 2.3 Aspect microscopique

### 2.3.1 Expérience de De Vinci

Léonard de Vinci a déterminé au  $XIV^e$  siècle des lois du frottement entre deux solides en réalisant des expériences de glissement de patin. Il a alors fait les observations suivantes :

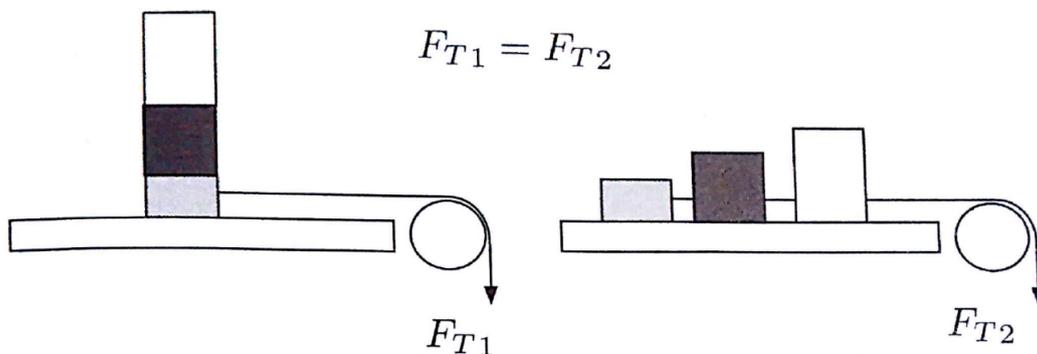


Figure 5: L'expérience de Léonard de Vinci. Trois masses différentes et de même matériau. La force nécessaire pour faire glisser les masses est identique dans les deux situations. Elle est indépendante de la surface de contact.

- Les masses ne se déplacent qu'à partir d'une certaine force  $F_T$  appliquée sur la corde.
- Dans les deux situations,  $F_T$  est identique. Ainsi,  $F_T$  est indépendante de la surface de contact.
- $F_T$  est proportionnelle à la charge normale (ici, l'opposé du poids).
- Une fois le mouvement initié, la force nécessaire à entretenir le mouvement est inférieure à la force nécessaire pour l'initier. Ceci pourrait être vu en montrant que la chute est accélérée.

Ces observations sont conformes aux lois de Coulomb. Cependant, le fait que  $F_T$  ne dépend pas de la surface de l'objet indique que  $f_s$  et  $f_d$  ne dépendent pas de la surface de l'objet.

Tr

Donc finalement, pousser une masse de 1 kg posée sur une petite feuille de papier nécessite la même force que de pousser une ramette de 1 kg de papier A4 ! Comment explique ce phénomène ? On va faire appel à un modèle microscopique :

### 2.3.2 Explication microscopique :

En regardant à l'échelle microscopique le contact entre deux solides, les surfaces ne sont pas lisses mais constituées de nombreuses aspérités. La surface de contact est donc souvent très inférieure à la surface macroscopique<sup>8</sup>.

Les aspérités peuvent s'enchevêtrer, mais pour des raisons de forces électrostatiques répulsives, elles ne vont pas se pénétrer. Ainsi, si on applique une force tangentielle sur un des deux solides, on a une difficulté à créer le mouvement car il faut déformer les aspérités<sup>9</sup>.

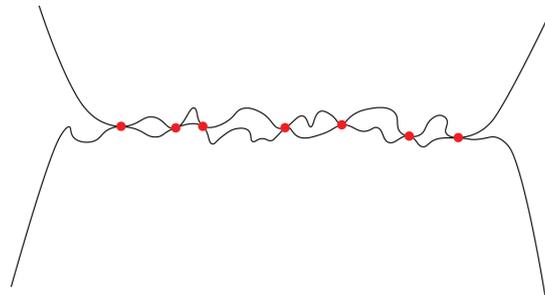


Figure 6: Contact entre deux solides au niveau microscopique. Aux points de contact, on a déformation plastique des aspérités due aux répulsions électroniques.

Observées à cette échelle, les surfaces apparaissent en contact par l'intermédiaire d'îlots de très faible surface ("pointes"). Lors de la mise en contact, ce sont ces îlots qui vont frotter, peut-être se déformer et participer à la dissipation.

On peut donc intuitivement supposer que seuls deux paramètres sont importants : la densité surfacique d'îlots et la résistance des îlots à la déformation. Ce sont deux paramètres qui ne dépendront que du traitement de la surface et non de la taille de la surface elle-même ce qui

<sup>8</sup>Andreotti p22 donne l'exemple : Surface apparente macroscopique  $S_{macro} = 16 \times 16 mm^2$  On applique 1000 N On trouve une surface réelle microscopique de contact  $S_{micro} 10^{-2} \times S_{macro}$  vérifier le matériau (sans quoi ça n'a pas de sens)

<sup>9</sup>Je te mets quelques modèles en annexes

explique le résultat de l'expérience de De Vinci.

L'étude microscopique est trop complexe. C'est pourquoi on lui préfère souvent les lois phénoménologiques. Cependant, il permet de tenir compte de l'hystérésis observé et du vieillissement<sup>10</sup>.

Tr

Il est temps de revenir à la problématique initiale : le son des cordes frottées comme le violon. Amplifions tout ce que nous avons appris :

### 3 Application : Collé-glissé

L'archet de violon est constitué de crins de cheval tendus et enduits d'une substance collante appelée *colophane*. Pour produire le son, l'instrumentiste frotte l'archet perpendiculairement à la corde tout en appuyant l'archet sur la corde.

microscopiquement, les crins de cheval sont constitués d'écailles avec des aspérités. Elles vont venir accrocher la corde et lui donner une excitation. Une fois la corde déplacée de sa position d'équilibre, elle exerce une force de rappel due à sa raideur. Tant que cette force est suffisamment faible, la corde reste collée à l'archet. Mais dès que la raideur devient supérieure à la force de frottement (proportionnellement au poids d'après Coulomb), la corde décroche. Il s'en suit alors une relaxation<sup>11</sup> sinusoïdale (d'oscillateur harmonique). Jusqu'à ce qu'une autre écaille accroche la corde et ainsi de suite.

C'est ce qui se produit lorsque la crève crisse sur le tableau (**Faire les pointillés avec la craie !!**) ou bien pour tous les autres grincements.



#### Expérience :

Prendre le Dispositif P82.14 Alimenter le moteur avec un module Hameg P28.1. On choisira pour commencer une tension proche de 4 V. en utilisant le signal délivré par le capteur de force au lieu de faire un traitement vidéo. On peut remonter à la période de stick-slip mais pas à l'amplitude. Le signal est également moins propre.

**Personnellement, je crois qu'une vidéo d'une corde de violon au ralenti est tout aussi bien.** On y voit bien les phases du stick slip en général.

#### 3.1 Position du problème :

Un patin de masse  $m$  est accrochée à un ressort de raideur  $K$ , lui-même relié par un fil à un moteur qui tourne à vitesse constante  $V$  (a). On appelle  $F_T$  la tension du ressort,  $R_T$  la force de friction et  $F_N = mg$  la force normale, avec  $g$  la constante de pesanteur. Pour des vitesses suffisamment faibles, on observe une succession de deux régimes (b) :

- le ressort s'étire sans que le mobile ne bouge (phase "collé") ;
- le mobile est en mouvement et le ressort se recontracte (phase "glissé").

<sup>10</sup>Relaxation des îlots qui a un long régime transitoire (voir annexe). Après ce transitoire, on a souvent une surface réelle de contact microscopique plus grande car les grands îlots se sont déformés et sont de la taille d'autres plus petits. Il y a donc plus d'îlots qui assurent le contact ce qui augmente  $f_s$

<sup>11</sup>L'onde ainsi créée se propage sur la corde et l'excite à ses fréquences de résonance.

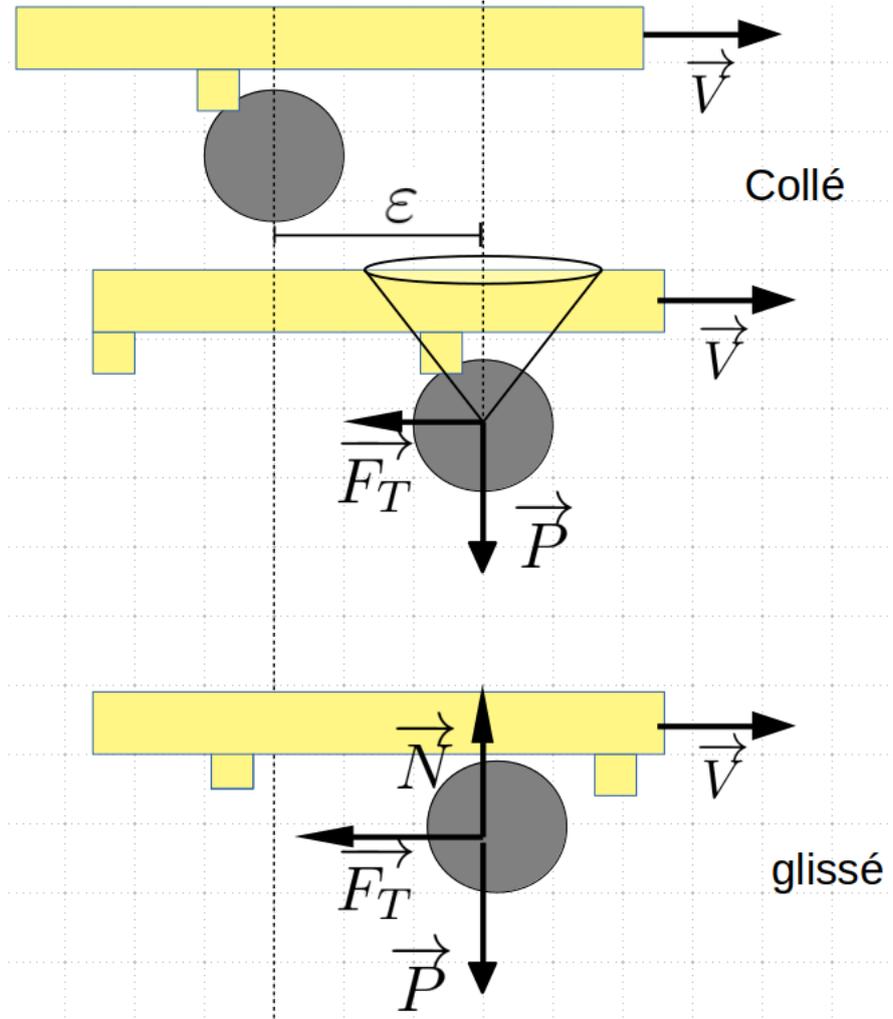


Figure 7: Étapes du collé glissé.  $P$  désigne le poids de l’archet et  $F_T$  la force de rappel de la corde. Une force de traction non représentée permet à l’archet (jaune) d’avancer à vitesse  $V$  constante.

### 3.2 Résolution :

#### 3.2.1 Phase Collée

À  $t = 0$ , le ressort est au repos ( $\epsilon = 0$ ), et le patin est à la position  $\epsilon = 0$ , immobile. On commence à tirer. l’allongement du ressort est donc

$$\dot{\epsilon} = V \quad \epsilon = V \times t \tag{12}$$

La vitesse  $\vec{V}$  est orientée vers la droite sur le dessin 7. Par conséquent la force de rappel possède l’orientation opposée (vers la gauche). La force de frottement statique va chercher à s’opposer au rappel du ressort et sera donc orientée vers la droite. Notons que puisque nous sommes dans la phase collée, les vitesses des 2 solides en contact ne diffèrent pas et cette force est mal définie ici.

Un Principe Fondamental de la dynamique sur l’extrémité du ressort donne :

$$\vec{F}_T = -\vec{R}_T \quad \text{et} \quad \vec{R}_N = -\vec{P} \tag{13}$$

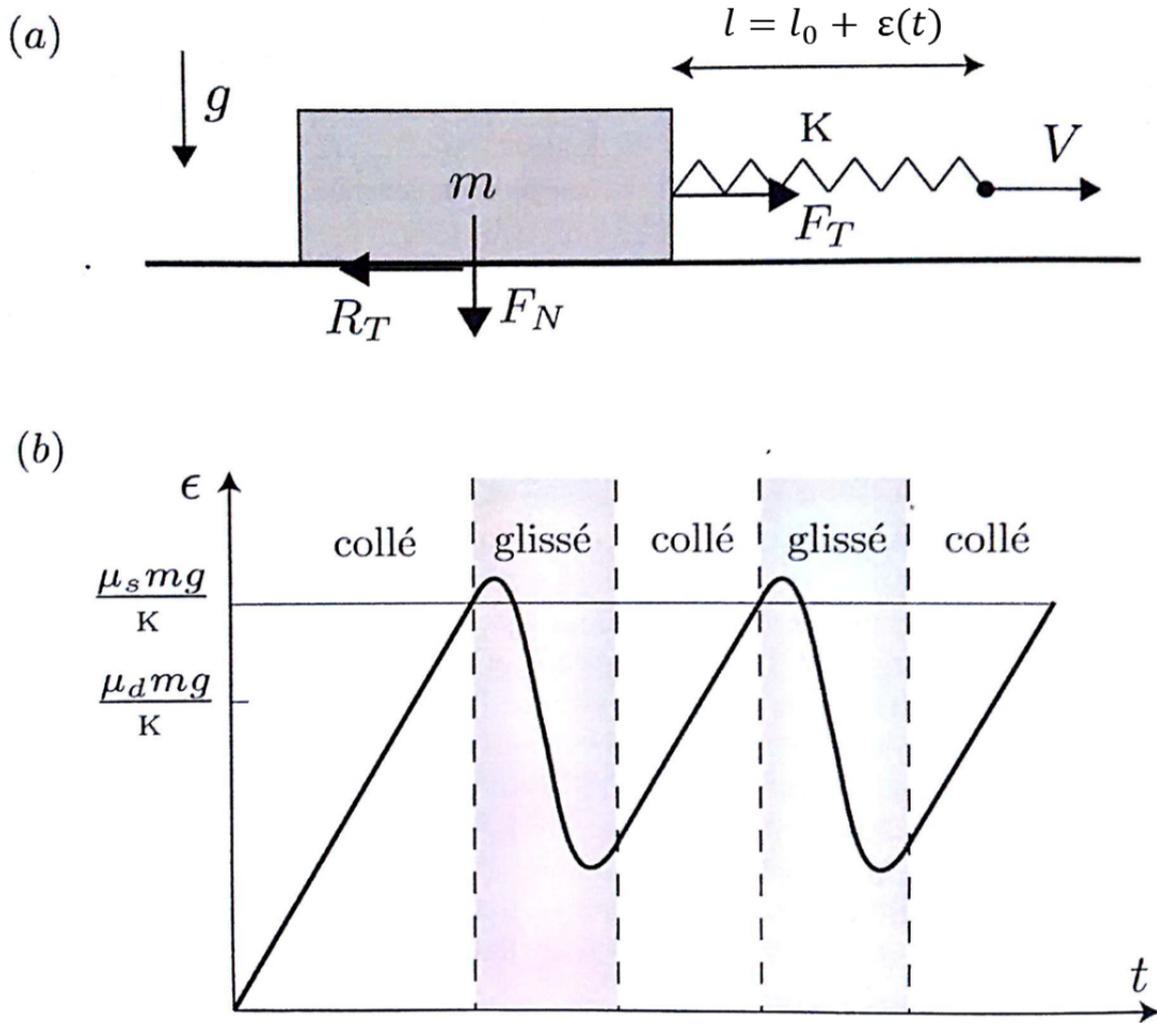


Figure 8: (a) : Schéma de la situation. (b) : allure de  $\epsilon(t)$

Or,  $\|\vec{F}_T\| = K\epsilon = KVt$ , d'où

$$\|\vec{R}_T\| = K\epsilon = KVt \tag{14}$$

D'après les lois d'Amontons-Coulomb, le patin ne bougera pas tant que :

$$\|\vec{R}_T\| \leq f_s \|\vec{R}_N\| = f_s mg.$$

Donc, la phase de collé s'achève lorsque :

$$\|\vec{R}_T\| = f_s \|\vec{R}_N\| = f_s mg \quad \text{soit : } KVt = f_s mg \tag{15}$$

Soit pour un temps  $t_1$  :

$$t_1 = \frac{f_s mg}{KV} \quad \text{en } \epsilon = \frac{f_s mg}{K} \tag{16}$$

### 3.2.2 Phase glissée

À partir de  $t = t_1$ , le patin glisse, avec une vitesse  $\dot{\epsilon}$ . On a donc  $\epsilon = Vt - x$  ou  $\dot{\epsilon} = V - \dot{x}$ .

Donc :  $\ddot{\epsilon} = -\ddot{x}$ . Un second PFD donne alors :

$$m\ddot{\epsilon} = -K\epsilon - F_T = -K\epsilon - f_d mg \tag{17}$$

Soit :

$$\ddot{\epsilon} + \omega_0^2 \epsilon = -f_a g \quad \text{avec } \omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}} \quad (18)$$

C'est l'équation d'un oscillateur harmonique.

Je propose de s'arrêter ici pour cette partie car le reste n'est que du calcul et pas très intéressant. D'ici, on voit déjà l'allure qu'aura le diagramme des phases. On passe donc à la partie suivante.

### 3.3 Bilan :

On peut proposer le diagramme des phases :

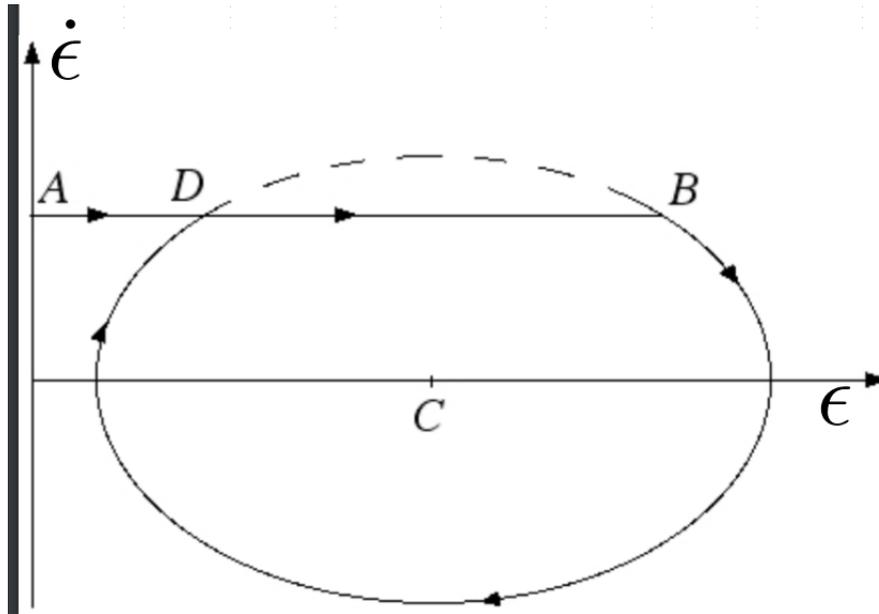


Figure 9: Diagramme de phase de l'oscillateur collé-glissé. Le mobile est "collé" entre  $D$  et  $B$ , et glisse entre  $B$  et  $D$ .

## Conclusion

Dans cette leçon, nous avons abordé les frottements solides et plus particulièrement les frottements de type translation pure. On a vu que ces frottements ont des origines microscopiques complexes mais les lois phénoménologiques de Coulomb permettent de traiter le problème.

Les frottements peuvent être dissipatifs ou nécessaires au mouvement :

- une roue utilise les frottements pour avancer sans que ceux-ci ne dissipent d'énergie (roulement sans glissement)
- lors de la marche, les frottements fournissent l'accélération, mais pas l'énergie qui, elle, est fournie par la puissance des forces intérieures (muscles).
- dans les mécanismes, on a souvent des soucis avec les frottements solides<sup>12</sup> qui dissipent et usent les pièces.

<sup>12</sup>On utilise les frottements à billes dans l'industrie pour lutter contre cela.

la tribologie est la science qui étudie les systèmes matériels en contact : nous avons fait de la tribologie dans cette leçon !

- Fonctionnement de l'ABS : revenir dans le cône de frottement statique en débloquant les roues.
- L'adhésion influe très peu sur le frottement, mais il y a tout de même une force proportionnelle à la surface de contact apparente  $A$  qui s'ajoute :  $R_T = fR_N + \kappa A$ .
- On peut aussi citer la conclusion du livre d'Andreotti qui apporte des précisions : Les lois du frottement solide, bien que vérifiant en première approximation les lois de Coulomb, sont en réalité plus complexes. Tout d'abord, la proportionnalité entre la force de frottement et la charge normale n'est plus vérifiée pour de très fortes charges et/ou des matériaux très mous. Dans ce cas, la force de friction sature vers une constante. Ce phénomène, bien connu des pilotes de F1, provient du fait que la rugosité des surfaces est alors totalement écrasée. L'aire réelle de contact est donc égale à l'aire apparente et ne dépend plus de la charge.

L'autre approximation concerne l'hypothèse des coefficients de friction  $f_s$  et  $f_d$  constants. Des phénomènes comme le vieillissement statique (augmentation de  $f_s$  avec l'âge mais diminution avec polissage ...) ou l'affaiblissement cinétique (diminution de  $f_d$  avec la vitesse de glissement) sont observés.

## 4 Annexe :

### 4.1 Suite du calcul du collé glissé phase glissé

Une solution particulière de cette équation différentielle est  $\epsilon_p = \frac{f_d mg}{K}$ . Une solution de l'équation homogène est  $\epsilon_h = A \cos(\omega_0(t > t_1) + \phi)$ , donc une solution complète s'écrit :

$$\epsilon(t > t_1) = A \cos(\omega_0(t > t_1) + \phi) + f_d K mg \tag{19}$$

Or, à  $t = t_1$ ,  $\epsilon(t_1) = f_s K mg$ , d'où  $f_s K mg = A \cos(\phi) + f_d K mg$  et

$$\epsilon(t > t_1) = A \cos(\omega_0(t > t_1) + \phi) + f_d K mg \tag{20}$$

D'autre part,  $\epsilon(t_1) = V$  implique que  $V = -A \omega_0 \sin(\phi)$ , soit :

$$A \sin(\phi) = \frac{V}{\omega_0} \tag{21}$$

On définit alors  $L$  et  $\phi$ <sup>13</sup> tels que :

$$L^2 = \left( \frac{(f_d - f_s) mg}{K} \right)^2 + \left( \frac{V}{\omega_0} \right)^2 \quad \cos(\phi) = \frac{(f_d - f_s) mg}{K L} \tag{23}$$

Ce qui nous donne finalement :

$$\epsilon(t > t_1) = \frac{(f_d - f_s) mg}{K} + L \cos(\omega_0 t - \phi) \tag{24}$$

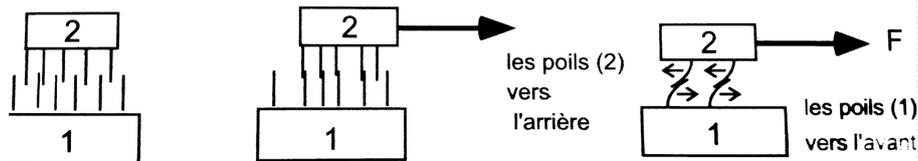
### 4.2 Modèles microscopiques :

Cette partie reprend en partie les remarques de GUILLAUME LAIBE et HERVÉ GAYVALLET :

Notons que chacun des modèles fait apparaître l'existence d'un (micro) domaine de réponse réversible (avant le décrochage), phénomène effectivement observé expérimentalement. Gardons toutefois à l'esprit que l'un comme l'autre de ces modèles restent des descriptions ad hoc, il ne faut pas leur faire dire plus qu'ils ne doivent.

#### 4.2.1 Modèle des Brosses

En supposant une déformation élastique, on peut les représenter par des poils élastiques : c'est le modèle des brosses.



<sup>13</sup>soit

$$\arctan \left( \frac{(f_d - f_s) mg \omega_0}{K} \right) \tag{22}$$

Si l'on veut déplacer un des solides par rapport à l'autre, on va mettre en contact les poils qui vont ensuite se déformer élastiquement. Lorsque le mouvement continu, le contact va se rompre et on se retrouve dans une situation où les poils sont simplement enchevêtrés, à la seule différence que les poils vibrent, ce qui crée de la dissipation. Ce modèle permet également de sentir la direction des forces de frottements sur chacun des solides en regardant la direction des poils lors de la déformation.

"Le modèle des "brosses" rend compte de la dissipation (qualitativement, seulement), ainsi que de l'hystérèse. Notons toutefois que l'énergie élastique associée à la déformation des poils varie comme  $x^2$  ( $x$  désignant le déplacement relatif microscopique juste avant le décrochage), alors que la dissipation macroscopique varie comme  $x$  ( $travail = T \times X$  où  $X$  désigne le déplacement macroscopique de glissement 1). Notons également que ce modèle ne rend pas compte, au moins directement, de la proportionnalité entre effort normal et effort tangentiel. Ce modèle n'a, bien sûr, pas la prétention de "coller" au mieux à la réalité, il propose modestement une illustration du processus de conversion de l'énergie macroscopique en énergie microscopique par descente irréversible d'échelle (phonons, température)."

#### 4.2.2 Dents de Scies

"En donnant à chacune des deux surfaces en contact une forme en dents de scie, on rend quantitativement compte de la dissipation (énergie mécanique convertie en chaleur 2 lors du passage d'une dent =  $mgh \propto x$  [barrière de potentiel]) et également de la relation  $T \propto N$ . Par contre, la conversion d'énergie par descente d'échelle faisant suite au passage d'une dent est moins bien illustrée (on convient que les éventuels micro-rebonds finiront par s'amortir)."

### 4.3 Sur l'hystérésis :

Notons l'analogie avec un cycle d'hystérésis magnétique  $B/\mu_0 = f(H)$ . Dans ce cas, l'irréversibilité est la conséquence du déplacement brutal d'une paroi de BLOCH (zone de transition d'orientation des moments magnétiques entre deux domaines de WEISS). Dans le cas du frottement, elle est due au décrochage d'adhérence brutal au delà du seuil de réponse réversible. La sollicitation macroscopique quasi-statique engendre, de façon sous-jacente, des séquences de dynamique brutale c'est-à-dire fortement hors équilibre et donc source d'irréversibilité.

### 4.4 Sur le vieillissement :

On peut dire un mot sur le phénomène de vieillissement d'un contact. En pratique, on observe que le coefficient d'adhérence croît lentement (mais de façon prolongée) avec le temps. Cet effet peut avoir de nombreuses origines physiques, comme chimiques. On peut citer, par exemple, le fluage<sup>14</sup> ou le pontage capillaire<sup>15</sup> (phénomène de grande importance dans les milieux granulaires). On peut d'ailleurs interpréter comme une conséquence du vieillissement, ici sur des temps courts, l'écart entre les coefficients d'adhérence et de frottement.

### 4.5 Arc-boutement :

(d'après wikipedia :

<sup>14</sup>Phase d'évolution lente des déformations sous charge constante (relaxation des contraintes).

<sup>15</sup>Ponts d'eau en dépression intensifiant l'effort pressant.

"L'arc-boutement est un phénomène de blocage (maintient en position d'équilibre) d'un solide en liaison glissière sur un axe, quand bien même une force est appliquée à ce solide dans la direction de la glissière.

Il s'agit en fait d'un moment appliqué à une liaison glissière imparfaite.

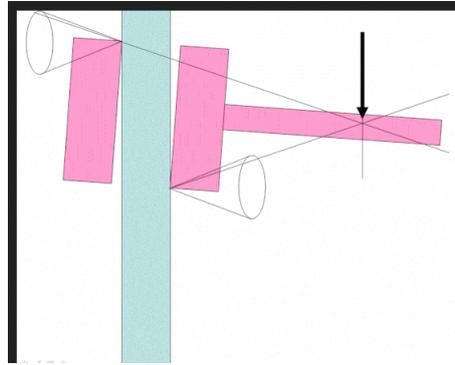


Figure 10: de wikipedia.org. Libre de reproduction et modifications.

Un exemple classique et connu de tous est celui du tiroir de commode qui se met légèrement en biais et se « coince » lorsque l'on veut le refermer. Chacun sait que ce n'est pas en poussant plus fort que l'on peut atteindre le but recherché. L'expérience personnelle indique que le tiroir s'immobilise d'autant plus facilement que son guidage est moins profond que large, que le tiroir est chargé d'un seul côté, que l'on ne pousse pas dans l'axe, etc. Le phénomène est facilement diminué si on cire ou savonne les faces latérales du tiroir, ce qui montre que les propriétés de frottement sont mises à contribution."

## 4.6 Retour de 2008

Différence entre le coefficient de frottement ? de glissement dans le cas  $ov_g = 0$  et  $vg \neq 0$  ? Citer des applications du phénomène d'arc-boutement ? Quel est le coefficient de frottement le plus élevé : statique ou dynamique ? Au niveau microscopique, ayant parlé des irrégularités des surfaces de contact rendant complexe la modélisation des phénomènes, on m'a demandé à quelle échelle il s'agissait de raisonner. Ayant parlé de l'utilisation de couche lubrifiante pour limiter les frottements, on m'a demandé de préciser. Question sur le cas d'une roue en rotation sur un plan horizontal : je n'ai pas su où le jury voulait en venir.