

LP02 : Gravitation

Niveau L1

Prérequis

- Développements limités
- produit vectoriel
- notions de référentiels
- coordonnées cylindriques
- Théorème de l'énergie mécanique
- Théorème du moment cinétique

Contents

1	Force de gravitation, généralités	2
1.1	Expression de la force	2
1.2	Exemple	2
1.3	Propriétés générales	2
2	Problème à deux corps	3
2.1	Position du Problème (<i>sur transparent</i>)	3
2.2	Mouvement plan et orbites fermées	3
2.3	Lois de Kepler	4
2.3.1	Ordres de grandeur :	4
3	Aspect pratique	5
3.1	Satellites artificiels	5
3.1.1	Satellites géostationnaires	5
3.1.2	Vitesses de libération	6
3.2	Échelle humaine : champ gravitationnel uniforme	6
3.2.1	Développement	6
3.2.2	Expérience : Mesure expérimentale de g	7
3.3	Annexe	8

Introduction

En soit la première partie peut être considéré comme l'introduction.

Au début du $XVII^{me}$ siècle, Kepler énonce trois lois décrivant le mouvement des planètes du système solaire. Ces dernières sont issues de l'observation pure. Newton propose alors une expression analytique de la force d'interaction gravitationnelle et réussit à formaliser le problème grâce aux principes de la mécanique énoncés quelques années plus tôt et à rendre compte des observations expérimentales.

1 Force de gravitation, généralités

1.1 Expression de la force

On fait rapidement un schéma de la situation : deux masses m et M sont distantes de r . $\vec{e}_r$ est orienté de M vers m ¹ :

$$\vec{F}_G = -G \frac{m M}{r^2} \vec{e}_r \quad (1)$$

On voit un parallèle immédiat avec l'expression de la force de Coulomb entre deux charges q et Q distantes de r ($K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$)^{2 3} :

$$\vec{F}_C = K \frac{q Q}{r^2} \vec{e}_r \quad (2)$$

La force de gravitation est une des 4 forces fondamentales.

- **interaction forte** prédomine à l'échelle nucléaire ($10^{-15}m$)
- **interaction faible** prédomine à l'échelle nucléaire ($10^{-15}m$).
- **interaction électrostatique** domine aux échelles moléculaires ($10^{-10}m$) et jusqu'à (10^6m)
- **interaction gravitationnelle** domine aux grandes échelles

1.2 Exemple

Faire un ordre de grandeur : Une merveilleuse partie de pétanque : -l'arbitre de 80 kg à 10 m du jeu influence le lancer de la boule d'avantage que la lune ou le soleil.

1.3 Propriétés générales

- **Force attractive**
- **Force centrale** : $\overrightarrow{\mathcal{M}}_{\vec{F}_G} = \vec{r} \wedge \vec{F}_G = F_G r \vec{e}_r \wedge \vec{e}_r = \vec{0}$
- **Force conservative** : $\vec{F}_G = -\overrightarrow{\text{grad}}(-G \frac{mM}{r}) = -\overrightarrow{\text{grad}}(E_p)$

¹ $G = 6.67 \times 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}$

² $\epsilon_0 = 8,854 \times 10^{-12} Fm^{-1}$

³ $K = 8,99 \times 10^9 Nm^2 C^{-2}$

2 Problème à deux corps

2.1 Position du Problème (*sur transparent*)

On fait un dessin où on considère deux corps $S(M)$ et $T(m)$ distants de r en interaction seulement gravitationnelle. On se place dans un genre de référentiel héliocentrique d'origine S que l'on suppose **galiléen**⁴ pendant la durée de l'expérience. Ceci revient à considérer que la masse m est très petite devant M et que cette dernière peut ainsi être considérée comme immobile.

2.2 Mouvement plan et orbites fermées

On applique le **Théorème du moment cinétique**. Une seule force s'applique mais $\vec{F}_G$ est **centrale** donc :

$$\frac{d\vec{\mathcal{L}}}{dt} = \overrightarrow{\mathcal{M}_{\vec{F}_G}} = \vec{0} \quad (3)$$

donc $\vec{\mathcal{L}} = \vec{r} \wedge \vec{p}$, qui est **un vecteur** est conservé.

- sa **norme** $\mathcal{L} = mr^2\dot{\theta}^2$ est **constante**.
- Sa direction et son sens sont conservés donc **Le mouvement est plan !**

On choisit donc des coordonnées cylindriques avec $\vec{r}$ mais en prenant $\vec{z}$ qui coïncide avec la direction de $\vec{\mathcal{L}}$.

On applique le **Théorème de l'énergie mécanique**, mais $\vec{F}_G$ ne travaille pas car elle est **conservative** :

$$\frac{dE_m}{dt} = \mathcal{P}(\vec{F}_G) = 0 \quad (4)$$

Or :

$$E_m = E_c + E_p = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + E_p \quad (5)$$

du coup :

$$E_m = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2 \frac{\mathcal{L}^2}{m^2 r^4}) + E_p \quad (6)$$

Nous allons séparer dans l'énergie cinétique la partie radiale qui tend la masse m à s'éloigner de M et la vitesse angulaire qui l'a fait tourner autour de M . Pour cela, nous écrivons :

$$E_m = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + (\frac{1}{2}r^2 \frac{\mathcal{L}^2}{mr^4} + E_p) \quad (7)$$

$$E_m = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + E_{\text{peff}} \quad (8)$$

Regardons la figure 1 :

- Dans le cas $E_m > 0$, à l'infini, on a E_m qui n'est que de l'énergie cinétique donc l'objet s'éloigne indéfiniment de l'astre. On parle de **diffusion**.
- Dans le cas $E_m < 0$, on se voit l'analogie avec le cas d'un oscillateur autour d'un minimum de potentiel, l'énergie cinétique étant transformée en énergie mécanique périodiquement, et vice versa. On a un système **lié**. Nous pouvons donner sur le graphique les 2 distances extrémales séparant M et m .

⁴à ce moment là de la leçon, je me rends compte que toute ma vie, j'ai écrit "**Galliléen**"...

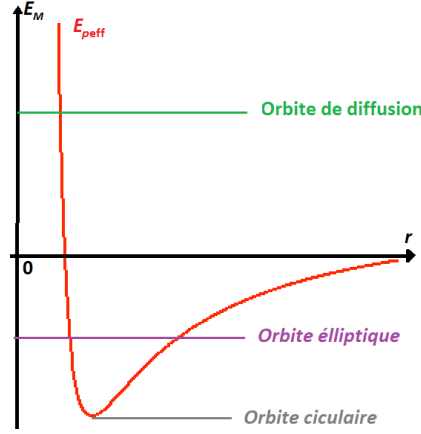


Figure 1: Faire un dessin $E_{\text{peff}}(r)$ si $E_M < 0$, on a des **orbites fermées** !. On n'a pas besoin de trouver l'expression de la trajectoire pour le comprendre : quelques arguments physiques suffisent : Les deux arguments sont E_M conservée et que $E_{\text{peff}}(r)$ doit s'annuler à l'infini.

2.3 Lois de Kepler

1- *Les planètes du système solaire décrivent des trajectoires elliptiques, dont le Soleil occupe l'un des foyers.*—(1609)

La démonstration est longue et il ne vaut pas le coup de l'intégrer à la leçon à mon avis. Un esprit curieux la trouvera cependant en annexe 1.

Pour les deux suivantes, on se place dans le cas d'une trajectoire quasi-circulaire :

2- *Le vecteur astre satellite parcourt des aires égales pendant des durées égales.*

l'aire parcourue par le rayon vecteur $\vec{ST}$ durant dt est :

$$d\mathcal{A} = \frac{1}{2} \left\| \vec{ST} \wedge \frac{d\vec{ST}}{dt} \right\| \times dt = \frac{1}{m} \left\| \vec{\mathcal{L}} \right\| \times dt \quad (9)$$

Or, $\vec{\mathcal{L}}$ est constant donc $\mathcal{A}$ est bien conservé.

3- $\frac{T^2}{a^3} = 4\pi^2 GM$ où a est le demi grand axe de l'ellipse et T la période de révolution.

En effet, pour un mouvement à vitesse constante V donc circulaire de rayon r_0 : le PFD donne, sur $\vec{e}_r$:

$$\frac{-mV^2}{r_0} = -G \frac{mM}{r_0^2} \quad (10)$$

Or, $T = 2\pi r_0 / V$, donc :

$$\frac{T^2}{r_0^3} = \frac{4\pi^2}{GM} \quad (11)$$

2.3.1 Ordres de grandeur :

Terre soleil

- $T = 1a = 3,1536 \cdot 10^7 \text{s}$
- $4\pi^2 / (GM_S) = 2.9 \times 10^{-19} \text{s}^2 \cdot \text{m}^{-3}$ $M_S \approx 2.0 \times 10^{30} \text{kg}$

- $\rightarrow R \approx 1,50 \times 10^8 \text{km}$ — à comparer à $1,496 \times 10^8 \text{km} = 1 \text{ua}$

Terre Lune

- $T = 27.3j = 2,359 10^6 \text{s}$,
- $4\pi^2/(GM_T) = 9.9 \times 10^{-14} \text{s}^2 \cdot \text{m}^{-3}$ $M_T \approx 5,97 \times 10^{24} \text{kg}$
- $\rightarrow R \approx 383 \times 10^3 \text{km}$ — à comparer à 384400km

3 Aspect pratique

3.1 Satellites artificiels

Il s'agit de faire un petit peu de culture générale. Cette partie peut être évincée si manque de temps. On pourra alors y faire allusion soit en transition, soit en conclusion.

3.1.1 Satellites géostationnaires

Satellite géostationnaire : il reste à la verticale du même point sur la Terre. Les seules orbites respectant cette contrainte sont celle à l'équateur qui sont dans le même plan de rotation que la terre à la période $T = 1j$ ⁵. Pour le comprendre, regardons les dessins figure 2.

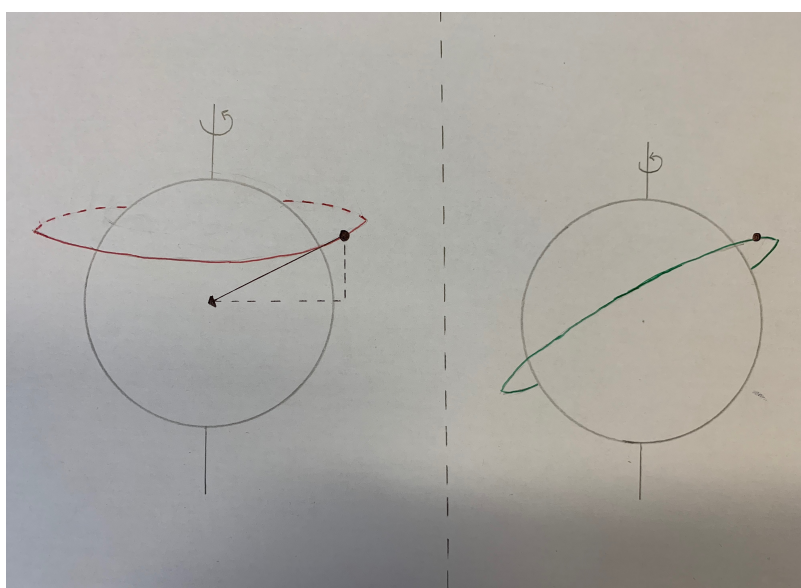


Figure 2: À gauche : satellite dont l'orbite serait parallèle à l'équateur. À droite : satellite dont l'orbite est centrée sur le centre de la Terre mais qui n'est pas celle de l'équateur.

Commençons par le cas d'un satellite dont l'orbite serait parallèle à l'équateur. Une voyons dans ce cas que l'attraction gravitationnelle peut être composée en 2 composante : l'une suivant l'axe et l'autre perpendiculaire. Celle parallèle va tendre à modifier la trajectoire du satellite, l'éloignant aussi de la position à laquelle nous souhaitons qu'il reste. Dans le second cas, nous

⁵ $1j = 23h 56min 4s$ le jour sidéral. Autrefois, la seconde était définie par rapport au jour et on avait $1j = 24h$. Puis, on a découpé l'année pour gagner en précision... Le changement de référence a changé la mesure de la durée du jour (sidéral). A présent, "L'étalon à employer est la transition entre les niveaux hyperfins $F = 4, M = 0$ et $F = 3, M = 0$ de l'état fondamental $^2S_{1/2}$ de l'atome de césium 133 non perturbé par des champs extérieurs ; la valeur $9\,192\,631\,770$ hertz est assignée à la fréquence de cette transition" (Brochure SI 2006, p. 61)

voyons clairement que le satellite ne peut pas rester au dessus d'un point de la Terre.

Donc, en utilisant la 3^{me} loi de Kepler, on trouve qu'ils doivent être à l'altitude $h \approx 35,8 \times 10^3 \text{km}$ ⁶

3.1.2 Vitesses de libération

Première vitesse cosmique : vitesse de satellisation minimale autour de la Terre. Vitesse minimale qu'il faut théoriquement communiquer à un corps, au départ de la Terre, pour le satelliser autour d'elle en orbite basse. Elle est déterminée par la relation :

$$\frac{V_1^2}{R_T} = \frac{G M_T}{R_T^2} \quad (12)$$

Pour R_T , on trouve $V_1 \approx 8 \text{m} \cdot \text{s}^{-1} \approx 3 \times 10^5 \text{km} \cdot \text{h}^{-1}$

Deuxième vitesse cosmique : vitesse minimale pour quitter s'éloigner à l'infini.

Pour cela, on fait un bilan d'énergie mécanique entre à l'instant du lancer (1) et quand le satellite est à l'infini (2).

(1) le satellite est à la distance R du centre de l'astre attracteur et a une vitesse V_2 (2) On veut $E_C = 0$ à l'infini, sachant que E_P y est nulle par choix. Donc, par conservation de l'énergie cinétique :

$$\frac{1}{2} m V_2^2 - \frac{G m M}{R^2} = E_M(1) = E_M(2) = 0 \quad (13)$$

Donc

$$V_2 = \sqrt{\frac{2GM}{R_0}} \quad (14)$$

On trouve $V_2 \approx 11 \times 10^3 \text{m/s} = 40 \times 10^3 \text{km/h}$ pour une pomme lancée (très fort) depuis R_T , dans le vide... C'est la vitesse dont on se sert pour "nettoyer" l'orbite terrestre des satellites obsolètes.

3.2 Échelle humaine : champ gravitationnel uniforme

3.2.1 Développement

On considère une masse $A(m)$ petite se déplaçant à une altitude h par rapport à la surface de la Terre. La force gravitationnelle que la Terre exerce sur lui est toujours :

$$\vec{F}_G = -G \frac{m M}{r^2} \vec{e}_r \quad (15)$$

On va ici considérer que la Terre est sphérique et que A se déplace toujours à des altitudes h faibles devant le rayon R_T de la Terre. On fait un développement limité pour $\frac{h}{R_T} \ll 1$:

$$\vec{F}_G = -G \frac{m M}{(R_T + h)^2} \vec{e}_r \approx -G \frac{m M}{R_T^2} \left(1 + 2 \frac{h}{R_T} + \frac{h^2}{R_T^2} \right) \vec{e}_r \quad (16)$$

On veut faire coïncider avec l'expression $\vec{F} = -mg \vec{e}_r$ donc on s'arrête à l'ordre 0 :

$$\vec{g} \approx -G \frac{M}{R_T^2} \vec{e}_r \quad (17)$$

⁶On trouve en effet : $r \approx 42.3 \times 10^3 \text{km}$. On a $h = r - R_T$ où $R_T \approx 6371 \text{km}$

$\vec{g}$ est appelée "accélération de pesanteur".

Ordre de grandeur : On trouve $g = 9.77m/s^2$ (En prenant $R_T = 6.37 \times 10^8m$, on trouve $9.81m/s^2$)

On peut le définir sur d'autres corps célestes comme par exemple sur la lune ($M_L \approx 7,347 \times 10^{22}kg$ et $R_L \approx 1737km$) $g \approx 1,622m/s^2$

Remarque : On peut souvent considérer que le mouvement se fait sur une distance assez faible à la surface pour négliger la variation de direction de $\vec{e}_r$. On suppose alors $\vec{g} = -g\vec{e}_z$

3.2.2 Expérience : Mesure expérimentale de g

On utilise un pendule simple pour trouver g :

La période des oscillations du pendule dans le régime linéaire⁷ vaut :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad (18)$$

l est la longueur du pendule et g l'intensité du champ de pesanteur que l'on peut en première approximation assimiler uniquement à l'attraction terrestre⁸

En préparation, préparer la courbe $T^2 = f(l)$ qui doit être une droite de pente $a = 4\pi^2/g$

cette expérience est très intéressante car on peut y montrer notre maîtrise des incertitudes. **incertitude de type B** sur chaque point nous donne des barres d'erreur (par propagation des incertitudes) :

$$\Delta g = \sqrt{\left(\frac{\Delta l}{l}\right)^2 - 2\left(\frac{\Delta T}{T}\right)^2} \quad (19)$$

Il faut alors estimer ΔT et Δl

- Δl , erreur de lecture, si on prend une règle, on fait une estimation pessimiste, loi uniforme sur une graduation donc $\Delta T = graduation/\sqrt{12}$
- ΔT , erreur de déclenchement du chronomètre, je l'estimerai par **incertitude de type A** : je répète pour une valeur de l donnée 10 fois la mesure et je calcule l'écart-type de la distribution obtenue.

Note : Pour diminuer l'incertitude sur ΔT , on peut mesurer la durée qui sépare 10 ou 20 périodes puis diviser pour retrouver T .

Conclusion

Notre étude nous a permis, à partir de la loi de la gravitation postulée par Newton et des équations de la dynamique du point d'étudier le mouvement des planètes du système solaire et de retrouver les lois de Kepler. Notre étude a fait apparaître un certain nombre de quantités conservées : moment cinétique, énergie mécanique 2. On peut montrer que ceci est associé à l'existence de symétries pour le problème considéré, mais ceci sera l'objectif d'une prochaine leçon.

⁷C'est le cas pour un lâcher sans vitesse initiale avec un faible angle initial. On récupère alors que T ne dépend pas des conditions initiales. On parle alors d'**isochronisme des petites oscillations**

⁸En toute rigueur, on récupère l'inertie d'entraînement aussi puisque la Terre tourne sur elle-même et autour du soleil.

3.3 Annexe

Preuve que les trajectoires sont bien des coniques (1)

PFD sur le satellite :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -G\frac{M}{r^2}\vec{e}_r \quad (20)$$

donc

$$\frac{d\vec{v}}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = -G\frac{M}{r^2}\vec{e}_r \quad (21)$$

Or, d'après le Théorème du moment cinétique $\mathcal{L} = mr^2\dot{\theta}$ est constant. Donc

$$\frac{d\vec{v}}{d\theta} = -G\frac{mM}{\mathcal{L}}\vec{e}_r \quad (22)$$

Qui s'intègre, en se rappelant que $\frac{d\vec{e}_\theta}{d\theta} = -\vec{e}_r$:

$$\vec{v} = G\frac{mM}{\mathcal{L}}\vec{e}_\theta + \vec{V}_0 \quad (23)$$

Dès lors, on peut calculer $\frac{1}{GmM}\vec{\mathcal{L}} \wedge \vec{v}$:

$$\frac{1}{GmM}\vec{\mathcal{L}} \wedge \vec{v} = \frac{\vec{\mathcal{L}}}{\mathcal{L}} \wedge \vec{e}_\theta + \frac{1}{GmM}\vec{\mathcal{L}} \wedge \vec{V}_0 \quad (24)$$

On a bien choisi nos coordonnées pour avoir $\vec{\mathcal{L}}$ suivant $\vec{z}$:

$$\frac{1}{GmM}\vec{\mathcal{L}} \wedge \vec{v} = \vec{e}_z \wedge \vec{e}_\theta + \frac{1}{GmM}\vec{\mathcal{L}} \wedge \vec{V}_0 \quad (25)$$

$$\frac{1}{GmM}\vec{\mathcal{L}} \wedge \vec{v} = \vec{e}_r + \vec{\mathcal{E}} \quad (26)$$

$\vec{\mathcal{E}} = \frac{1}{GmM}\vec{\mathcal{L}} \wedge \vec{V}_0$ est le vecteur excentricité. Il est constant par conservation de $\vec{\mathcal{L}}$. On peut poursuivre le calcul en posant $p = \vec{r} \cdot \frac{1}{GmM}\vec{\mathcal{L}} \wedge \vec{v}$:

$$p = \vec{r} \cdot \frac{1}{GmM}\vec{\mathcal{L}} \wedge \vec{v} = \vec{r} \cdot \vec{e}_r + \vec{r} \cdot \vec{\mathcal{E}} = r + r\mathcal{E}\cos(\theta) \quad (27)$$

Il est alors de bon goût de se rappeler que $\vec{\mathcal{L}} = m\vec{r} \wedge \vec{v}$ ce qui fait que p est bel et bien constant:

$$p = \vec{r} \cdot \frac{1}{GMm}\vec{\mathcal{L}} \wedge \vec{v} = \frac{\mathcal{L}^2}{GMm^2} \quad (28)$$

On a alors pour la trajectoire l'équation focale d'une conique d'excentricité $\mathcal{E}$ et de paramètre p :

$$r = \frac{p}{1 + \mathcal{E}\cos(\theta)} \quad (29)$$

- Si $\mathcal{E} < 1$, on obtient une courbe fermée et bornée (ellipse).
- Si $\mathcal{E} = 1$, on obtient une courbe ouverte et infinie (parabole).
- Si $\mathcal{E} > 1$ on obtient une courbe possédant deux branches symétriques par rapport au point d'intersection de leurs asymptotes communes (hyperbole)