LP03 – Caractère non galiléen du référentiel terrestre.

25 mars 2019

Ramborghi Thomas & Lagoin Marc

Niveau : L2

Commentaires du jury

- à ajouter !

Bibliographie

✍ *Mécanique PCSI-MPSI*, **Brasselet** LE livre à lire pour cette leçon !
✍ *Mécanique Dunod*, **J.-Ph. Pérez** Pour se rafraichir les idées sur la démonstration de la composition des vitesses et des accélérations
✍ La démonstration du pendule de Foucault se trouve sur internet (voir démonstration)

Prérequis

➢ Loi de composition des vitesses et des accélérations

➢ Cours sur la gravitation (loi de Newton)

Table des matières

Introduction

La puissance de l'étude en physique des phénomènes qui nous entour réside dans le principe de relativité généralisé par Einstein qui nous dit que les lois de la physique sont invariantes par changement de référentiel galiléen. Les lois que nous déterminons peuvent être vérifié indépendamment de l'endroit où nous nous trouvons.

- *Pb : Comment définit-on un référentiel galiléen ?*
- *Pb : Pouvons-nous considérer comme galiléen les référentiels dans lesquels nous avons l'habitude de travailler (référentiel géocentrique et référentiel terrestre) ?*
- *Pb : Pouvons-nous quand même travailler dans un référentiel si ce dernier n'est pas galiléen ?*

1 Cadre générale pour l'étude

1.1 Définition d'un référentiel galiléen

Un référentiel galiléen est un référentiel dans lequel s'applique le principe d'inertie ; c'est à dire que tout corps ne subissant pas de force extérieur (système isolé) possède un mouvement rectiligne et uniforme. De plus tout référentiel en translation rectiligne uniforme par rapport à ce référentiel est également un référentiel galiléen (transformation de Galilée). Il s'agit à priori d'un cas idéal non réalisable car il nous est impossible de trouver un référentiel absolue ci ce n'est l'univers tout entier !

Il est possible cependant à priori, de modifier les lois de la physique dans le cas où notre référentiel n'est pas galiléen. Pour cela, nous utilisons la loi de composition des vitesses et des accélérations que nous avons vu en cours de mécanique :

$$\boxed{\overrightarrow{v(A)}_{/\mathcal{R}} = \overrightarrow{v(A)}_{/\mathcal{R}'} + \overrightarrow{v}_{e/\mathcal{R}}} \quad \text{et :} \quad \boxed{\overrightarrow{a(A)}_{/\mathcal{R}} = \overrightarrow{a(A)}_{/\mathcal{R}'} + \overrightarrow{a}_{c/\mathcal{R}} + \overrightarrow{a}_{e/\mathcal{R}}} \tag{1}$$

Nous voyons alors qu'il suffit de rajouter 2 forces fictive à notre bilan : la force d'inertie d'entrainement F_{ie} et la force d'inertie de Coriolis F_{ic}. Insistons sur le faite que ces dernières n'ont pas de réalité physique. La seconde loi de Newton s'écrit alors :

$$m\,\overrightarrow{a(A)}_{/\mathcal{R}'} = \overrightarrow{\mathcal{F}} - m\overrightarrow{a}_{e/\mathcal{R}} - m\overrightarrow{a}_{c/\mathcal{R}} = \overrightarrow{\mathcal{F}} + \overrightarrow{F_{ie}} + \overrightarrow{F_{ic}} \tag{2}$$

Dans la pratique, les calculs réalisés par changement de référentiel deviennent très vite compliqués et sont donc peut utilisés. Regardons alors si certains référentiels non-galiléen peuvent être considérés comme tel lorsque nous réalisons une expérience.

1.2 Référentiel héliocentrique

Le premier référentiel auquel nous pouvons penser est le référentiel de Corpernic. Dans ce dernier, le centre du repère est le centre du Soleil est les axes pointent vers des étoiles lointaines (exemple l'étoile polaire) qui sont considérés fixes car leur déplacement semble nul sur une année. *Faire un petit dessin !*

Regardons l'erreur que nous commettons en le considérant galiléen. Notre système solaire appartient à l'un des bras de la voie lactée et il orbite autour d'un centre super-massif appelé Sagittarius A. Réalisons alors une expérience sur un object de masse m se trouvant à la position P dans ce référentiel comme si nous ne savions pas que le système solaire est mobile :

$$m\,\overrightarrow{a(P)}_{/\mathcal{R}_c} = \overrightarrow{\mathcal{F}} \tag{3}$$

où $\overrightarrow{\mathcal{F}}$ est la somme des forces agissant sur notre objet.

Maintenant nous lisons un livre nous indiquant que le système solaire n'est pas au centre de l'univers. Nous allons alors appliquer de nouveau le principe fondamentale de la dynamique compte tenu de ces nouvelles informations :

$$m\,\overrightarrow{a(P)}_{/\mathcal{R}_c} = \overrightarrow{\mathcal{F}} + m\,\overrightarrow{g(P)}_{Galaxie} - m\overrightarrow{g(G)}_{Galaxie} \tag{4}$$

où nous retrouvons 2 nouveaux termes : le premier tient compte de l'attraction gravitationnel de la galaxie sur notre masse m et le second qui correspond aux forces fictives d'entrainement et de Coriolis (le terme est grandement simplifié avec $\overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}_c/\mathcal{R}_{Galaxie}} = 0$).

En comparant les 2 bilans, nous constatons que la non-galiléanité du référentiel de Copernic est dû à la non-uniformité du champ gravitationnel de la Galaxie au seins du système solaire. En effet si $\overrightarrow{g}_{Galaxie}$ serait uniforme, les 2 termes ajoutés se compenseraient. Or la taille du système solaire est de l'ordre de 10^{-3} al et celle de la galaxie de l'ordre de 100 000 al. Les 2 grandeurs étant très différentes, nous pouvons considérer que le champ est uniforme sur cette taille d'espace.

♡ À retenir : Le référentiel héliocentrique sera toujours considéré comme un référentiel galiléen. L'erreur commise en supposant le champ $\overrightarrow{g}_{Galaxie}$ uniforme est très faible et ne sera jamais de l'ordre de grandeur de l'incertitude sur un résultat obtenu en physique.

Cependant là encore, les calculs deviennent vite laborieux et nous aimerions trouver un autre référentiel pouvant être considéré comme galiléen. Regardons si c'est le cas du référentiel géocentrique.

2 Référentiel géocentrique

2.1 Présentation générale

Le référentiel géocentrique est également un référentiel dont les axes pointent vers des étoiles lointaines. Le centre du repère est le centre de gravité de la Terre dont la position au seins du système solaire sera noté G_T. *Faire un petit dessin !* Ce dernier suis une trajectoire elliptique (aphélie de 152.10^9 m et périhélie de 147.10^9 m) qui sera considérée circulaire en première approximation. Par ailleurs la terre tourne sur elle-même avec une période légèrement inférieure à la journée autour d'un axe faisant un angle de $23°26'$ par rapport à la normal à l'elliptique. *On peut alors expliquer les saisons !* Enfin la Terre n'est en réalité pas sphérique. *On peut expliquer la précession des équinoxes !*

Nous pouvons appliquer le principe fondamentale de la dynamique sur la Terre et réaliser une application numérique pour montrer que sa trajectoire est définit grâce à l'attraction gravitationnelle du Soleil :

$$M_T\,\overrightarrow{a(G_T)}_{/\mathcal{R}_c} = \sum_i M_T\overrightarrow{g(G_T)}_i \quad \text{avec :} \quad \overrightarrow{g(G_T)}_i = \frac{\mathcal{G}M_i}{D_i^2} \tag{5}$$

où la sommation d'indice i se fait sur les différents astres du système solaire de masse M_i et de distance à la Terre D_i.

A.N : $\overrightarrow{g(G_T)}_{Soleil} = 1.10^{-2}\mathrm{m\cdot s^{-2}}$ $\quad \overrightarrow{g(G_T)}_{Lune} = 3.10^{-5}\mathrm{m\cdot s^{-2}}$ $\quad \overrightarrow{g(G_T)}_{autresplanètes} \leq 10^{-7}\mathrm{m\cdot s^{-2}}$

Il est possible de considéré que seul le Soleil possède une influence en commettant une erreur de l'ordre de 10^{-3}. Maintenant que nous avons bien décrit ce référentiel, regardons comme pour le référentiel de Copernic s'il peut être considéré galiléen.

2.2 Domaine de validité de l'approximation galiléenne

Effectuons une fois encore le principe fondamentale de la dynamique en tenant compte des forces fictives ainsi que l'attraction gravitationnelle des astres sur un object de masse m à la position P. Nous obtenons ici encore une somme de terme ne se compensant pas dû à la non uniformité des champs gravitationnels :

$$m\,\overrightarrow{a(P)}_{/\mathcal{R}_g} = \overrightarrow{\mathcal{F}} + m\sum_i \left(\overrightarrow{g(P)}_i - \overrightarrow{g(G_T)}_i\right) \tag{6}$$

Si notre objet se trouve à une distance d de la Terre petite devant sa distance aux autres astres, nous pouvons écrire :

$$|\,\overrightarrow{g(P)}_i - \overrightarrow{g(G_T)}_i\,| \simeq \frac{2\mathcal{G}M_i d}{D_i^3} \tag{7}$$

Effectuons une application numérique afin de comparer l'influence de ces termes, appelés termes de marées, par rapport à l'attraction gravitationnelle de la Terre $\overrightarrow{g}_T \simeq 10\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$ en prenant $d = R_T = 6.4\,10^6$ m :

$$|\,\overrightarrow{g(P)}_{Soleil} - \overrightarrow{g(G_T)}_{Soleil}\,| \simeq 5.10^{-7}\,\mathrm{m\cdot s^{-2}} \qquad |\,\overrightarrow{g(P)}_{Lune} - \overrightarrow{g(G_T)}_{Lune}\,| \simeq 1.10^{-6}\,\mathrm{m\cdot s^{-2}} \tag{8}$$

♡ À retenir : Les termes de marées sont négligeables pour une distance à la Terre inférieur ou égale à son rayon. Cependant il ne faut pas perdre de vue que la vie sur Terre à une taille caractéristique de l'ordre du mètre. Par conséquent un phénomène à priori négligeable, ne le sera peut être pas pour nous ! Nous pourrons toujours considérer que seul le Soleil et la Lune ont une influence non négligeable sur Terre.

2.3 Exemple dans lequel l'approximation n'est pas valide : les marées

Cette partie peut être passée plus ou moins rapidement en fonction du temps le jours de l'oral.

Un phénomène auquel nous sommes confrontés indiquant que le référentiel géocentrique est non galiléen est celui des marées. Si nous dessinons une sphère représentant la Terre et les forces de marée dues à la non-uniformité du champ gravitationnelle de la Lune nous pouvons expliquer la mise en place de bourrelets océanique. *faire un dessin sur transparent.* La rotation de la Terre ayant une période d'environ 1 jours, nous en déduisons que nous devons observer 2 marées par jours (ce qui est effectivement le cas).

Si nous regardons plus finement le phénomène, nous pouvons également montrer que la variation de la taille des marée est dû aux forces de marée du Soleil. Les contributions s'ajoute alors en période de pleine lune et de nouvelle lune et se compense en partie dans le premier et le dernier quartier de la Lune. *faire un dessin sur transparent.* ici de nouveau, les variations concordent avec la révolution de l'astre autour de Terre ($T = 28\,\mathrm{j}$).

De manière encore plus fine, nous pouvons pouvons voir l'effet de la trajectoire elliptique de la Lune autour de la Terre qui se traduit par une variation de sa vitesse au cours des jours d'après la loi des aires de Kepler. *faire un dessin sur transparent.*

Les forces de marée sont également appliquées au niveau de la croute terrestre -> dislocation de l'astre si elles sont supérieures aux forces de cohésions -> limite de Roche -> explique la présence d'anneaux autour de certaines planètes.

♡ À retenir : Le référentiel géocentrique peut être considérés ou non comme galiléen suivant le type de phénomène physique que nous souhaitons expliquer. Les études réalisées à l'échelle de la Terre requièrent l'utilisation du référentielle héliocentrique. Dans les autres cas, le référentiel géocentrique est considéré galiléen. Cependant avons-nous vraiment besoins de choisir ce référentiel pour toutes les expériences en laboratoires ? La réponse est non puisque le référentiel le plus couramment utilisé est celui du laboratoire.

3 Référentiel terrestre

Le dernier référentiel que nous étudierons est le référentiel terrestre. Ce dernier possède la même origine que le référentiel géocentrique mais ces axes sont fixés à la surface de la Terre et tourne donc tout comme cet astre. La résultante $\overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}_t/\mathcal{R}_g}$ est calculée à partir du jour sidéral ($T = 23\,\mathrm{h}56\,\mathrm{min}\,4\,\mathrm{s}$) qui diffère du jour solaire qui tiens compte du déplacement de la Terre sur ton ellipse.

Comme précédemment, l'approximation galiléenne va dépendre de la contribution des forces fictives. Nous allons donc étudier les domaines de validités pour chacune d'elles (contrairement à la seconde partie, nous devons regarder la force de Coriolis car $\overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}_t/\mathcal{R}_g}$ est non nulle).

3.1 Domaine où le terme centrifuge peut être négligée

Nous allons voir ici qu'étudier l'impact de la force d'entrainement revient à regarder si le poids est orienté vers le centre de la terre. Pour cela, nous devons rappeler sa définition. Le poids d'un corps de masse m à la position P est la force agissant sur ce système tenant compte de l'attraction gravitationnelle terrestre et de la force d'inertie d'entrainement dû à la rotation de la Terre :

$$\overrightarrow{P} = m\left[\overrightarrow{g(P)}_T - \overrightarrow{\Omega} \wedge \left(\overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{G_T P}\right)\right] \tag{9}$$

♡ À retenir : Le terme d'inertie peut être négligée avec une erreur commise de 0.5% si l'étude porte sur un objet à une hauteur inférieur ou égale à 10 m.

Étude qualitative de la déviation de g par la force d'entrainement

✍ ⏲ 1 minute

- On positionne un pendule sur une table tournante initialement au repos.
- On actionne la rotation et on observe la variation de l'orientation de g.

3.2 Domaine où le terme de Coriolis peut être négligée

La seconde force effective à prendre en considération est la force de Coriolis. Commençons par rappeler sa formule :

$$\overrightarrow{F_{ic}} = m\,\overrightarrow{a}_{c\,/\mathcal{R}} = 2\,m\,\overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{v(A)}_{/\mathcal{R}'} \tag{10}$$

Nous allons maintenant effectuer des ordres de grandeur pour comparer le déplacement ajouté à la trajectoire d'un objet par la force de Coriolis :

$$L_{exp} \Leftrightarrow v_{exp} \times T_{exp} \qquad L_{corio} \Leftrightarrow a_{c\,/\mathcal{R}} \times T_{exp}^2 \qquad a_{c\,/\mathcal{R}} \leq \frac{v_{exp}}{T} \tag{11}$$

$$L_{corio} \leq L_{exp} \times \frac{T_{exp}}{T} \tag{12}$$

♡ À retenir : Si nous effectuons une manip sur un temps petit devant le jour sidéral, la longueur caractéristique engendrée par la force de Coriolis est petite devant celle dû aux autres forces.

☕

Étude qualitative de la déviation d'un corps par la force de Coriolis

✍ ⏲ 1 minute

- On lance sur une table de mécanique à mobiles jet d'encre un objet et on regarde que la trajectoire est presque rectiligne.
- On effectue de nouveau l'expérience mais en faisant tourner la table.

3.3 Exemples dans lesquels les termes ne peuvent pas être négligée

Il existe un grand nombre d'expérience et d'observation montrant que le référentiel terrestre n'est pas galiléen. Nous pouvons citer la déviations vers l'ouest lors de la chute d'un corps (L_{corio} de l'ordre de 10^{-3} m pour une descente de 100 m), le pendule de Foucault, les anticyclones et les dépressions, les alizés, ect ...

Nous allons traiter le cas du pendule de Foucault. Cette expérience fut réalisé publiquement en 1851 par un pendule géant accroché à la voute du Panthéon. Grâce aux forces de Coriolis, l'axe du pendule subis une rotation. Nous allons détailler les calculs montrant cette déviations.

Nous considérons un pendule simple dont l'amplitude reste constante au cours du temps (pas de frottement). Soit O un point à la surface de la Terre dont la position est repéré par sa latitude λ par rapport à l'équateur. Nous noterons R_T le rayon de la Terre et R_O la distance du point O à l'axe Nord-Sud, axe de rotation de la Terre. Cette dernière possède une vitesse angulaire $\dot{\Theta}$.

Faire un schéma sur transparent !

Calculons la vitesse linéaire (suivant $\overrightarrow{e_\varphi}$ en choisissant les coordonnées sphériques) du point O que nous noterons V_O :

$$R_O = R_T \times \cos\lambda \quad \text{d'où :} \quad \overrightarrow{V_O} = R_T \times \cos\lambda \times \dot{\Theta}\,\overrightarrow{e_\varphi} \tag{13}$$

Introduisons maintenant les points A et B, projetés sur la surface de la Terre (localement plane) des points d'amplitude maximal du pendule. Leur distance au point O sera noté L, leur distance à l'axe de rotation R_A et R_B et leur vitesse linéaire V_A et V_B respectivement. Nous introduisons finalement l'angle α, l'angle entre la normal à l'axe Nord-Sud et la surface de la Terre ainsi que les points $A^{'}$ et $B^{'}$, projetés de A et B sur la normal à l'axe Nord-Sud.

Faire un schéma sur transparent !

Nous pouvons donc écrire :

$$R_A = R_O - OA^{'} = R_O - L \times \cos(\frac{\pi}{2} - \lambda) = R_O - L \times \sin\lambda \tag{14}$$

D'où :

$$V_A = R_A \times \dot{\Theta}\,\overrightarrow{e_\varphi} = \left(V_O - L \times \sin\lambda \times \dot{\Theta}\right)\overrightarrow{e_\varphi} \tag{15}$$

Similairement :

$$V_B = \left(V_O + L \times \sin\lambda \times \dot{\Theta}\right)\overrightarrow{e_\varphi} \tag{16}$$

Finalement prenons maintenant le point de vue d'un spectateur du panthéon. Positionné en A, ce dernier mesure une vitesse $V = L \times \sin\lambda \times \dot{\Theta}$ en direction de l'Est et une vitesse de même norme mais de direction opposée donc vers l'Ouest en se plaçant au point B. Nous arrivons donc bien à la conclusion que le plan d'oscillation du pendule tourne.

Il est finalement possible de déterminer la période de rotation T de ce plan d'oscillation. Si nous supposons que cette dernière est constante, de norme Ω alors nous pouvons écrire :

$$V\,L \times \Omega\,L_{,} \times \sin\lambda \times \dot{\Theta} \tag{17}$$

Avec les relations : $\Omega = \frac{2\pi}{T}$ et : $\dot{\Theta} = \frac{2\pi}{24}$ nous en déduisons : $T = 24\,\frac{1}{\sin\lambda}\,\mathrm{h}$

A.N : À Paris $\lambda = 48\,^{\circ}\,51\,'$ Nord -> La période d'oscillation est d'environ 32h.

Conclusion

Rappeler sur transparent l'ensemble des points importants (♡ À retenir) et les formules encadrées en rouge.

Annexe

Rappels sur la loi de composition des vitesses et des accélérations :

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'A}$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}\,\overrightarrow{OA}}{\mathrm{d}\,t}\right|_{\mathcal{R}} = \left.\frac{\mathrm{d}\,\overrightarrow{OO'}}{\mathrm{d}\,t}\right|_{\mathcal{R}} + \left.\frac{\mathrm{d}\,\overrightarrow{O'A}}{\mathrm{d}\,t}\right|_{\mathcal{R}}$$

$$\overrightarrow{v(A)}_{/\mathcal{R}} = \overrightarrow{v(O')}_{/\mathcal{R}} + \left.\frac{\mathrm{d}\,\overrightarrow{O'A}}{\mathrm{d}\,t}\right|_{\mathcal{R}'} + \overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O'A}$$

$$\boxed{\overrightarrow{v(A)}_{/\mathcal{R}} = \overrightarrow{v(A)}_{/\mathcal{R}'} + \overrightarrow{v}_{e/\mathcal{R}}} \quad \text{avec :} \quad \overrightarrow{v}_{e/\mathcal{R}} = \overrightarrow{v(O')}_{/\mathcal{R}} + \overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O'A} \tag{18}$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}\,\overrightarrow{v(A)}_{/\mathcal{R}}}{\mathrm{d}\,t}\right|_{\mathcal{R}} = \left.\frac{\mathrm{d}\,\overrightarrow{v(O')}_{/\mathcal{R}}}{\mathrm{d}\,t}\right|_{\mathcal{R}} + \left[\left.\frac{\mathrm{d}\,\overrightarrow{v(A)}_{/\mathcal{R}'}}{\mathrm{d}\,t}\right|_{\mathcal{R}'} + \overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{v(A)}_{/\mathcal{R}'}\right] + \left[\left.\frac{\mathrm{d}\,\overrightarrow{\Omega}}{\mathrm{d}\,t}\right|_{\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O'A} + \overrightarrow{\Omega} \wedge \left(\left.\frac{\mathrm{d}\,\overrightarrow{O'A}}{\mathrm{d}\,t}\right|_{\mathcal{R}'} + \overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{O'A}\right)\right]$$

$$\overrightarrow{a(A)}_{/\mathcal{R}} = \overrightarrow{a(O')}_{/\mathcal{R}} + \overrightarrow{a(A)}_{/\mathcal{R}'} + 2\,\overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{v(A)}_{/\mathcal{R}'} + \left.\frac{\mathrm{d}\,\overrightarrow{\Omega}}{\mathrm{d}\,t}\right|_{\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O'A} + \overrightarrow{\Omega} \wedge \left(\overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{O'A}\right)$$

$$\boxed{\overrightarrow{a(A)}_{/\mathcal{R}} = \overrightarrow{a(A)}_{/\mathcal{R}'} + \overrightarrow{a}_{c/\mathcal{R}} + \overrightarrow{a}_{e/\mathcal{R}}} \quad \text{avec :} \quad \overrightarrow{a}_{c/\mathcal{R}} = 2\,\overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{v(A)}_{/\mathcal{R}'} \tag{19}$$

$$\text{et :} \quad \overrightarrow{a}_{e/\mathcal{R}} = \overrightarrow{a(O')}_{/\mathcal{R}} + \left.\frac{\mathrm{d}\,\overrightarrow{\Omega}}{\mathrm{d}\,t}\right|_{\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O'A} + \overrightarrow{\Omega} \wedge \left(\overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{O'A}\right)$$