

LP04 – PRÉCESSION DANS LES DOMAINES MACROSCOPIQUE ET MICROSCOPIQUE

28 mars 2019

Victor Dansage & Zakarya Ouzit

Et pourtant, elle tourne.
GALILÉE

Niveau : L2

Bibliographie

- ♣ *BUP 587* → Définition sur l'approximation gyroscopique basée sur le moment cinétique
- ♣ *Mécanique*, **Pérez** → Angles Euler, Base de Resal, approximation gyroscopique basée sur le vecteur vitesse de rotation
- ♣ *Physique atomique*, **Cagnac, Tchang-Brillet, Pebay-Pérouta** → Moment magnétique et champs magnétique
- ♣ *Physique : Les astuces de Feynman*, **Feynman** → Applications du gyroscope

Prérequis

- Moment cinétique d'un solide indéformable
- Matrice d'inertie
- Théorème du moment cinétique appliqué aux solides
- Action d'un champ magnétique sur un dipôle magnétique

Expériences

- ☞ Toupie
- ☞ Gyroscope

Table des matières

1	Introduction	2
2	Rotation d'une toupie	2
2.1	Angles d'Euler	2
2.2	Approximation gyroscopique	3
2.3	Théorème du moment cinétique et précession	3
3	Moment magnétique dans un champ magnétique	4
3.1	Moment de l'électron	4
3.2	Précession de Larmor	4
3.3	Résonance magnétique	5
4	Précession et comportement de la Terre	5
4.1	Gyroscope	5
4.2	Précession des équinoxes	5
5	Conclusion	6
6	Questions	6

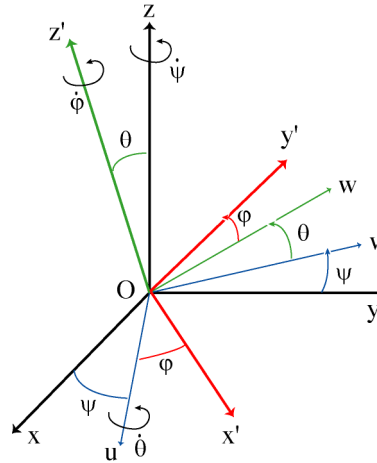
1 Introduction

2 Rotation d'une toupie

2.1 Angles d'Euler

Soit un solide indéformable S contraint par la seule condition d'un de ses points disons O fixé par rapport au référentiel R . Dès lors la position de S est repérée par 3 degrés de liberté. Nous allons introduire 3 paramètres, les angles d'Euler pour repérer la position de S dans R .

Considérons dès lors un repère associé à $R = Oxyz$ et un associé au solide $S = Ox'y'z'$.



On définit en premier lieu l'angle de précession $\psi = (Ox, Ou)$, qui est l'angle de rotation autour de (Oz) , puis l'angle de nutation $\theta = (Oz, Oz')$ l'angle de rotation autour de (Ou) , puis $\phi = (Ou, Ox')$ l'angle de rotation propre ou giration autour de (Oz') .

Dès lors, on peut écrire le vecteur vitesse angulaire de rotation comme la somme des 3 vecteurs vitesse angulaire de rotation (en écrivant simplement la composition des vecteur vitesse angulaire de rotation (Pérez p34) :

$$\Omega_{S/R} = \dot{\psi}\mathbf{e}_z + \dot{\theta}\mathbf{e}_u + \dot{\phi}\mathbf{e}_{z'} \quad (1)$$

Là on pourrait se plaindre que $(O, \mathbf{e}_u, \mathbf{e}_z, \mathbf{e}_{z'})$ ne constitue pas une base orthonormée donc il serait tentant d'exprimer $\Omega_{S/R}$ dans $(O, \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ ou dans $(O, \mathbf{e}_{x'}, \mathbf{e}_{y'}, \mathbf{e}_{z'})$ mais l'expression est lourde.

Le plus judicieux ici est de se placer dans la base de Resal que nous noterons $R_e = (O, \mathbf{e}_u, \mathbf{e}_w, \mathbf{e}_{z'})$ qui est particulièrement intéressante lorsque le solide présente une symétrie de révolution. Il suffit d'écrire $\mathbf{e}_z = \sin(\theta)\mathbf{e}_w + \cos(\theta)\mathbf{e}_{z'}$

$$\text{D'où } \Omega_{S/R} = \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\psi}\sin(\theta) \\ \dot{\psi}\cos(\theta) + \dot{\phi} \end{pmatrix}_{R_e}$$

Dès lors on peut écrire le moment cinétique par rapport à O dans R_e : $\mathbf{L}_{O/R_e} = \overline{\overline{I_{O/R_e}}} \cdot \Omega_{S/R}$ d'où pour un solide à symétrie de révolution selon (Oz') :

$$\mathbf{L}_{O/R_e} = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\psi}\sin(\theta) \\ \dot{\psi}\cos(\theta) + \dot{\phi} \end{pmatrix}_{R_e} = \begin{pmatrix} I\dot{\theta} \\ I\dot{\psi}\sin(\theta) \\ I_3(\dot{\psi}\cos(\theta) + \dot{\phi}) \end{pmatrix}_{R_e} \quad (2)$$

On a fait le choix de repérer la position du solide par les angles d'Euler. On aimerait donc avoir la dynamique de ces angles. Pour ce faire nous avons envie d'appliquer le théorème du moment cinétique mais l'expression du moment cinétique n'est pas joyeuse et les calculs vont s'avérer très compliqués...



2.2 Approximation gyroscopique

On dit que le mouvement, autour d'un point fixe, d'un solide, ayant la symétrie de révolution, satisfait à l'approximation gyroscopique lorsque sa vitesse de rotation autour de son axe de révolution est très grande devant toutes les autres vitesses de rotation, ce que l'on traduit par : $\Omega_{S/R} \simeq (\Omega_{S/R} \cdot \mathbf{e}_{z'}) \cdot \mathbf{e}_{z'}$

Cette approximation se traduit dès lors par : $|\dot{\phi}| \gg |\dot{\psi}|$ et $|\dot{\phi}| \gg |\dot{\theta}|$.

Est-il alors possible de simplifier l'expression du moment cinétique compte tenu de cette approximation ?

$$\text{On a : } \mathbf{L}_{O/R_e} = \begin{pmatrix} I\dot{\theta} \\ I\dot{\psi}\sin(\theta) \\ I_3\dot{\phi} \end{pmatrix}_{R_e} \simeq I_3\dot{\phi} \cdot \mathbf{e}_{z'} \text{ si } \frac{I_3}{I} \gtrsim 1$$

Compte tenu de cette approximation il va être beaucoup plus simple d'étudier la dynamique d'un tel objet (comme une toupie dont la pointe est fixe sur le support (référentiel de laboratoire R)).

ORDRE DE GRANDEUR SUR LA TOUPIE UTILISÉE

2.3 Théorème du moment cinétique et précession

Une fois cette approximation faite, nous avons très envie d'appliquer le théorème du moment cinétique au point fixe dans le référentiel de laboratoire O . Étant donné que l'objet n'est soumis qu'à son poids et à la force de réaction du support (appliquée en O), il en résulte que le seul couple exercé sur l'objet l'est via le poids. L'objet étant de masse m et son centre de gravité étant situé en G (lui même sur l'axe de révolution comme O par symétrie) :

$$\frac{d}{dt/R} \mathbf{L}_O = \mathbf{OG} \wedge m\mathbf{g} = -\frac{\mathbf{L}_O}{\|\mathbf{L}_O\|} \wedge mg\|\mathbf{OG}\|\mathbf{e}_z \quad (3)$$

Posons dès lors $\Omega_p = \frac{mg\|\mathbf{OG}\|}{\|\mathbf{L}_O\|}$ de norme la **la pulsation de précession**.

On obtient dès lors l'équation de précession :

$$\frac{d}{dt/R} \mathbf{L}_O = \Omega_p \wedge \mathbf{L}_O \quad (4)$$

Un mouvement de précession est **la variation au court du temps de l'orientation de l'axe de rotation d'un solide**. Nous allons voir en quoi cette équation traduit un tel mouvement.

L'équation projeté sur $\mathbf{e}_z$ donne $L_z = cste$. Posons alors $\underline{u} = L_x + iL_y$. On peut donc ré-écrire les équations portant sur $\mathbf{e}_x$ et $\mathbf{e}_y$:

$$\frac{du}{dt/R} = i\|\Omega_p\| \cdot u \quad (5)$$

Donc $u(t) = u(t=0) \exp(i\Omega_p t)$. Donc on retrouve le fait que la direction du moment cinétique qui est l'orientation de l'axe de rotation du solide dans l'approximation gyroscopique "tourne" autour de l'axe (Oz). Il y a précession !

On a déjà vu que la composante selon la direction de précession de $\mathbf{L}_O$ était constante. Mais on peut également montrer que la norme du vecteur $\mathbf{L}_O$ est constante au cours d'un mouvement de précession :

$$\mathbf{L}_O \cdot \frac{d}{dt/R} \mathbf{L}_O = \frac{1}{2} \frac{d}{dt/R} \|\mathbf{L}_O\|^2 = \frac{d}{dt/R} \mathbf{L}_O \cdot (\Omega_p \wedge \mathbf{L}_O) = 0 \quad (6)$$

Ainsi, $\mathbf{L}_O$ décrit un cône de sommet O et d'axe de révolution (Oz). La gravité n'a ainsi pas pour objet de faire tomber la toupie mais de l'entraîner dans un mouvement de précession.

Mais les mouvements de précession ne sont pas propres aux toupies, ils sont en fait bien plus généraux et se retrouve également à l'échelle microscopique

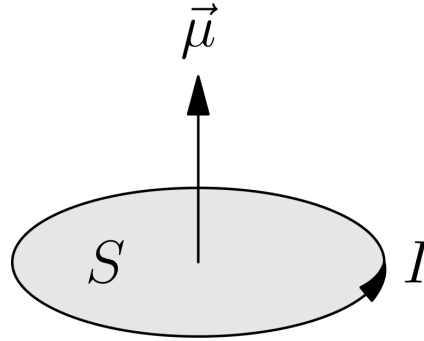


3 Moment magnétique dans un champ magnétique

3.1 Moment de l'électron

Le modèle de Bohr de l'atome d'hydrogène correspond à un électron en orbite circulaire autour du noyau. En repérant la position de l'électron par le vecteur $\mathbf{r}$ ayant pour origine le centre du noyau et un vecteur vitesse $\mathbf{v}$, on en déduit que son moment cinétique par rapport au centre du noyau est $\mathbf{L} = \mathbf{r} \wedge m\mathbf{v} = mrv\mathbf{e}_z$ dans un repère cylindrique avec $\mathbf{e}_z$ orthogonal à l'orbite circulaire de l'électron.

On peut également voir ce système comme une spire de courant



On peut alors définir le moment magnétique du système comme $\mu = IS = IS\mathbf{e}_z$ qui est colinéaire au moment cinétique.

Or on a $v = \frac{2\pi r}{T}$, $i = \frac{dq}{dt} = \frac{-e}{T}$, et $S = \pi r^2$.

Il vient alors $\mu = \frac{-e}{2m}\mathbf{L} = \gamma\mathbf{L}$ où l'on pose $\gamma = \frac{-e}{2m}$ le facteur gyromagnétique.

Ordre de grandeur

$$\gamma \simeq 10^{11} \text{C} \cdot \text{kg}^{-1}$$

3.2 Précession de Larmor

Sachant que le moment cinétique est le moment magnétique à un facteur près et que le couple exercé par un champs magnétique $\mathbf{B}$ stationnaire et uniforme sur un moment magnétique μ est $\Gamma = \mu \wedge \mathbf{B}$, on a envie d'appliquer le théorème du moment cinétique à l'électron en orbite circulaire dans le référentiel de laboratoire où l'orbite de l'électron est fixe R supposé galiléen :

$$\frac{d}{dt/R}\mathbf{L} = \mu \wedge \mathbf{B} \quad (7)$$

$$\frac{d}{dt/R}\mathbf{L} = -\gamma\mathbf{B} \wedge \mathbf{L} \quad (8)$$

Posons dès lors $\Omega_L = -\gamma\mathbf{B} = \frac{e}{2m}\mathbf{B}$ dont la norme est la pulsation de Larmor. On retrouve exactement la même relation que dans le cas de la toupie. Notons cependant qu'ici nous n'avons pas fait d'hypothèse contrairement au cas de la toupie (approximation gyroscopique) hormis le fait de s'être placé dans le modèle de Bohr de l'atome d'hydrogène (qui on le sait tous n'est pas bon) mais qui est suffisant ici.

Dès lors, le moment cinétique, et donc aussi le moment magnétique qui lui est colinéaire vont précesser autour du champ $\mathbf{B}$, c'est ce que l'on appelle la précession de Larmor.

Remarque

On a supposé que même en présence d'un champs magnétique la trajectoire de l'électron restait une orbite circulaire. Cette hypothèse reste à vérifier. La période de révolution d'un électron autour du noyau est $T_{rev} = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2 \times \pi \times 5 \cdot 10^{-9}}{3 \cdot 10^6} \simeq 10^{-14} \text{s}$ et la période de Larmor est $T_L = \frac{2\pi}{\Omega_L} \simeq 10^{-11} \text{s}$ pour un champ magnétique de l'ordre de 1T

3.3 Résonance magnétique

On a traité le cas d'un champ magnétique stationnaire, qu'en est-il si le champ contient une composante tournante ? Pour cela considérons un champ magnétique $\mathbf{B} = B_0 \mathbf{e}_z + \mathbf{B}_1 = B_0 \mathbf{e}_z + B_1 (\cos(\omega t) \mathbf{e}_x + \sin(\omega t) \mathbf{e}_y)$ où B_0 , B_1 , et ω sont des constantes.

Notons toujours R le référentiel de laboratoire dans lequel l'orbite de l'électron est fixe et supposé galiléen associé au repère $(Oxyz)$ avec O le centre du noyau. Considérons R' en rotation par rapport à R selon $\omega = \omega \mathbf{e}_z$ qui n'est alors lui pas galiléen.

Comme précédemment nous avons envie d'appliquer le théorème du moment cinétique à l'électron dans R galiléen :

$$\frac{d}{dt/R} \mathbf{L} = \mu \wedge \mathbf{B} \quad (9)$$

$$\frac{d}{dt/R} \mathbf{L} = -\gamma (\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1) \wedge \mathbf{L} \quad (10)$$

Or on peut exprimer $\frac{d}{dt/R} \mathbf{L}$ en fonction de $\frac{d}{dt/R'} \mathbf{L}$ à l'aide de la relation de Bourre :

$$\frac{d}{dt/R} \mathbf{L} = \frac{d}{dt/R'} \mathbf{L} + \omega \mathbf{e}_z \wedge \mathbf{L} \quad (11)$$

L'équation obtenue par application du théorème du moment cinétique se ré-écrit donc :

$$\frac{d}{dt/R'} \mathbf{L} = -(\gamma \mathbf{B}_0 + \gamma \mathbf{B}_1 + \omega \mathbf{e}_z) \wedge \mathbf{L} \quad (12)$$

On a alors envie de poser $\Omega_p = -(\gamma \mathbf{B}_0 + \gamma \mathbf{B}_1 + \omega \mathbf{e}_z) = \omega_0 + \omega_1 - \omega$. On retrouve donc une équation de précession $\frac{d}{dt/R'} \mathbf{L} = \Omega_p \wedge \mathbf{L}$.

Remarquons de plus que pour le cas particulier où $\omega = \omega_0 = -\gamma \mathbf{B}_0$ alors il y a précession dans R' autour de $\mathbf{B}_1$ uniquement et tout se passe comme s'il n'y avait plus de champs stationnaire $\mathbf{B}_0$. On appelle cette condition la condition de résonance.

4 Précession et comportement de la Terre

4.1 Gyroscopie

Historiquement, le premier dispositif expérimental ayant permis de mettre en évidence la rotation propre de la Terre est le pendule de Foucault en 1851. Mais à l'époque, toute la communauté scientifique n'était pas convaincue par ce dispositif. Foucault leur présenta alors un an plus tard son gyroscope.

La particularité du gyroscope est que la rotation du rotor central se fait toujours selon le même axe. Ainsi, dans le référentiel de Copernic, si l'on oriente l'axe du gyroscope vers une étoile fixe, alors le gyroscope va se mettre en mouvement dans le référentiel terrestre, lui-même en mouvement dans le référentiel de Copernic. On écrit

$$\left(\frac{d\mathbf{L}_O}{dt} \right)_{Terre} = \left(\frac{d\mathbf{L}_O}{dt} \right)_{Copernic} + \Omega_{Cop/Terre} \wedge \mathbf{L}_O \quad (13)$$

Le moment cinétique du gyroscope étant invariant dans le référentiel de Copernic, on obtient une nouvelle équation de précession vérifiée par le moment cinétique dans le référentiel terrestre

$$\left(\frac{d\mathbf{L}_O}{dt} \right)_{Terre} = -\Omega_{Terre} \wedge \mathbf{L}_O \quad (14)$$

Le gyroscope précesse alors autour de son axe de rotation avec une vitesse opposée à celle de rotation de la Terre sur elle-même. Cette propriété des gyroscopes a été très utilisée en navigation, notamment dans le cadre de gyroscopes directionnels. On en trouve encore aujourd'hui dans le télescope/satellite Hubble (six, dont le rotor peut atteindre les 19 000 tours par minutes, cf. site NASA) ou encore dans les téléphones (gyroscopes optiques ? à vérifier).

4.2 Précession des équinoxes

L'axe de rotation de la Terre est également en précession, du fait du léger aplatissement de la Terre. Elle est alors soumise à un moment global dû à l'attraction gravitationnelle de la Lune et du Soleil (terme des marées). On parle de précession des équinoxes car le plan de l'écliptique que coupe le Soleil à chaque équinoxe (printemps, automne) suit cette précession ; la position du Soleil d'une équinoxe à l'autre varie alors au cours de ce mouvement.

L'angle entre l'axe de rotation de la Terre et l'axe autour duquel il précesse est d'environ 24° , la période de précession est elle d'environ 26 000 ans !

5 Conclusion

La précession est un phénomène qui transcende les échelles. Bien qu'à certaines échelles on la mette en évidence par une simple mise en équation, on peut parfois avoir besoin d'approximations afin de se ramener à l'étude de ce seul phénomène (ici, approximation gyroscopique). Pourtant, travailler hors de cette approximation est tout autant enrichissant. En effet, ici, on n'a pas du tout étudié la nutation de la toupie, indispensable pour décrire pleinement son mouvement dans le cas général (mouvement de Lagrange et Poisson). Mais au-delà du simple phénomène présenté ici, l'approximation gyroscopique en elle-même a présenté et présente encore aujourd'hui un grand intérêt dans l'étude et le développement des gyroscopes, présents aujourd'hui dans notre quotidien.

6 Questions