

LP02 - LOIS DE CONSERVATION EN DYNAMIQUE

21 mai 2019

Anthony GARCIA & Clément CABART

Niveau : L1

Bibliographie

- ✦ *J'intègre tout-en-un PCSI*, **Salamito et coll.** → Pour l'aspect prépa
- ✦ *La Symétrie*, **Sivardière** → Pour ses chapitres 45 et 47

Prérequis

- Mécanique du point
- PFD, TMC, TEC
- Coordonnées cartésiennes, polaires et sphériques
- Gravitation (force de Newton, lois de Kepler)

Expériences

- ✦ Étude énergétique de la chute d'un corps

Table des matières

1	Lois fondamentales et quantités conservées	2
1.1	Potentiel indépendant du temps	2
1.2	Invariances spatiales	3
1.2.1	Invariance par translation	3
1.2.2	Invariance par rotation	4
2	Le mouvement à deux corps	4
2.1	Conservation de la quantité de mouvement	4
2.2	Conservation du moment cinétique	5
2.3	Conservation de l'énergie	6
2.4	D'autres quantités conservées ?	7

Introduction

Lors de notre étude de la dynamique du point ces dernières semaines, nous avons vu apparaître un certain nombre de principes et de théorèmes permettant de décrire l'évolution de certaines quantités physiques au cours du temps. Ainsi, vous connaissez depuis déjà plusieurs années le principe fondamental de la dynamique, qui relie l'accélération d'un système aux forces qui s'appliquent sur celui-ci. Cependant, ces diverses visions sont limitées à des cas où l'on est parfaitement capable de décrire toutes les forces qui s'appliquent sur un système, et donnent souvent lieu à des calculs assez lourds. Aujourd'hui, on va donc chercher à unifier la vision que nous donnent ces différentes lois sous un angle différent : celui des quantités conservées. On verra ainsi qu'un grand nombre de situations physiques peuvent être décrites par des lois de conservation, qui nous permettront de résoudre des problèmes de dynamique sans avoir à passer par la résolution (fastidieuse, voire impossible) d'équations différentielles.

☞ Écrire au tableau qu'une loi de conservation, c'est une relation qui dit "si ça, alors tel truc est conservé".

1 Lois fondamentales et quantités conservées

Dans cette première partie, nous allons revenir sur les trois lois que vous connaissez pour décrire la dynamique d'un système de masse m , dans un référentiel galiléen, soumis uniquement à des forces dérivant d'un potentiel scalaire : $\mathbf{F} = -\mathbf{grad}U$. Par exemple, pour le poids, on a

$$\mathbf{P} = -mge_z = -\mathbf{grad}(mgz) \quad (1)$$

Ici, on va chercher s'il existe des quantités dynamiques qui sont constantes au cours du mouvement, selon les propriétés du potentiel.

☞ Il s'agit bien uniquement d'une réinterprétation, car ces visions n'apportent pas plus d'information que les lois dont elles dérivent !

☞ Le bon choix est de le faire avec un tableau sur transparent, que l'on découvre/remplit au fur et à mesure.

1.1 Potentiel indépendant du temps

La première propriété qui nous intéresse est un potentiel indépendant du temps : $U(\mathbf{r})$.

Dans ce cas, le théorème de l'énergie cinétique s'écrit

$$\frac{dE_c}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = -\mathbf{grad}(U) \cdot \mathbf{v} \quad (2)$$

Pour pouvoir découvrir une loi de conservation, on va devoir intégrer cette équation (c'est d'ailleurs ce que l'on fera à chaque fois!). On a alors

$$E_{c2} - E_{c1} = - \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{grad}(U) \cdot \mathbf{v} dt \quad (3)$$

$$= - \int_{U_1}^{U_2} dU \quad (4)$$

☞ Car on a

$$dU = \mathbf{grad}(U) \cdot d\mathbf{r} + \partial_t U dt \quad (5)$$

et le premier terme dans la partie de droite est bien égal à la première intégrale que l'on regarde. Ici, le potentiel est indépendant du temps, donc $\partial_t U = 0$.

Ce qui donne donc

$$E_{c2} + U_2 - (E_{c1} + U_1) = 0 \quad (6)$$

où le terme de gauche correspond la différence d'énergie mécanique entre les instants t_1 et t_2 . Première loi de conservation (à compléter dans le tableau) :

Dans un référentiel galiléen, si un système n'est soumis qu'à des forces dérivant d'un potentiel **indépendant du temps** (dites conservatives), son énergie mécanique est constante.

On va essayer de vérifier cette affirmation expérimentalement, en étudiant un système simple : un pendule simple

🔧 Étude énergétique d'un pendule

👉 Perso

⌚ 5 minutes

On mesure le mouvement d'un pendule au cours du temps à l'aide d'un capteur angulaire relié à une carte d'acquisition. Il vaut mieux prendre un fort gain pour le capteur, et acquérir assez peu de points au cours de la trajectoire. Ensuite on trace l'énergie potentielle et l'énergie cinétique, leur somme, et c'est cool. On peut aussi tracer l'un en fonction de l'autre, vérifier que ça fait bien une droite de pente -1 .

Attention : avec le pendule pesant P79.14, il faut sûrement rajouter des masselotes provenant d'un autre pendule pour bien se mettre dans le régime "pendule simple".

| On a vu ce qui se passait lorsque le potentiel considéré était indépendant du temps. Que se passe-t-il s'il a d'autres invariances ?

1.2 Invariances spatiales

On va dans cette partie étudier le même système que précédemment : un point matériel de masse m dans un référentiel galiléen, soumis uniquement à des forces conservatives (i.e. dérivant d'un potentiel indépendant du temps).

1.2.1 Invariance par translation

Supposons que le potentiel considéré est invariant par translation selon la direction x . Cela signifie que $U(y, z)$ uniquement. Dans ce cas, la composante selon x des forces s'appliquant au système est nulle. Le principe fondamental de la dynamique, projeté sur cette direction nous donne donc

$$\frac{dp_x}{dt} = 0 \quad (7)$$

Ce qui revient, en intégrant cette équation, à une nouvelle loi de conservation (à compléter dans le tableau) :

Dans un référentiel galiléen, si un système n'est soumis qu'à des forces conservatives dérivant d'un potentiel invariant par translation, la composante de sa quantité de mouvement selon cette direction est constante.

Plus généralement, si U est invariant dans n'importe quelle direction (ce qui correspond à une force nulle appliquée au système) on retrouve la première loi de Newton :

Dans un référentiel galiléen, si la résultante de toutes les forces s'appliquant sur un système est nulle, la quantité de mouvement du système est constante.

Deux exemples possibles : 1) Conservation de la quantité de mouvement lors du lancer d'une balle depuis un skateboard : [Vidéo qui le montre si pas le matos](#) C'est un exemple que vous connaissez bien : si on lance un objet lourd à quelqu'un, celui-ci recule en l'attrapant ! Faisons le calcul. Ici, on lance une balle de 10 kg avec une vitesse de 2 m s^{-1} à un homme de 60 kg au repos. Par conservation de la quantité de mouvement, l'ensemble {homme+balle} de 70 kg va donc se déplacer à $2 * 10/70 = 0.28 \text{ m s}^{-1}$. C'est le principe inverse qui sert à propulser les fusées, ou qui explique le recul des armes à feu.

2) La propulsion d'une fusée au propergol (https://fr.wikipedia.org/wiki/Propulsion_spatiale pour les valeurs). On suppose une fusée de $1 \times 10^6 \text{ kg}$, qui éjecte du gaz à une vitesse d'éjection de 1 km s^{-1} . Après avoir éjecté

une tonne de gaz, on peut faire le bilan suivant : puisque le système {fusée + gaz} n'est soumis à aucune force, on a nécessairement

$$m_{\text{gaz}}\mathbf{V}_{\text{gaz}} = m_{\text{fusée}}\mathbf{V}_{\text{fusée}} \quad (8)$$

Ce qui signifie que la fusée a désormais une vitesse vers le haut de 1 m s^{-1} , puisqu'elle pèse 1000 fois plus lourd que la masse éjectée.

☞ Bien entendu, la fusée est désormais un peu plus légère, et il faudrait prendre cela en compte dans la suite d'un calcul détaillé, mais là je suis pas sûr qu'on veuille faire plus.

1.2.2 Invariance par rotation

Un deuxième cas intéressant est le cas d'invariance par rotation. Dans ce cas, le potentiel ne dépend que de r , et on a donc uniquement une force radiale. On peut alors reprendre le théorème du moment cinétique, qui s'écrit

$$\frac{d\mathbf{OM} \times m\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{OM} \times \mathbf{F} \quad (9)$$

Ici la seule force est radiale, donc colinéaire à \mathbf{OM} , ce qui signifie que la variation du moment cinétique est nulle. On a donc trouvé une troisième loi de conservation

Dans un référentiel galiléen, si un système n'est soumis qu'à des forces conservatives dérivant d'un potentiel invariant par rotation, son moment cinétique est conservé.

On peut le voir assez facilement sur un exemple : si on s'installe sur une chaise tournante avec une roue de vélo, que l'on met en rotation. Lorsque l'on aligne la roue de vélo avec l'axe de rotation du tabouret, celui-ci se met à tourner en sens opposé, pour que le moment cinétique du système {tabouret + personne + roue} reste constant.

☞ On fait cette manip là du coup!!

On a donc compris, à partir des trois lois que l'on connaissait en dynamique, qu'il y avait en fait dans un grand nombre de situations (et en particulier pour un système isolé!) conservation de trois quantités : l'énergie, la quantité de mouvement totale et le moment cinétique total. On va voir que la connaissance de ces lois de conservation peut nous permettre de complètement résoudre un problème plus complexe que ceux vus jusqu'ici : le mouvement à deux corps.

2 Le mouvement à deux corps

☞ Bien entendu, ça se recouvre pas mal avec la LP01, donc aller la lire ne fait pas de mal!

On va s'intéresser dans toute cette partie à un phénomène que vous connaissez bien : le mouvement commun de deux corps en interaction via un potentiel dit **Newtonien**, tel que l'interaction gravitationnelle ou électrostatique. Ici, on va se placer dans le cadre de la gravitation, et étudier dans un référentiel galiléen le système **isolé** constitué de deux points matériels de masses m_1 et m_2 qui interagissent entre eux via la force de gravitation $\mathbf{F}_{12} = -Gm_1m_2\mathbf{r}_{12}/r^3$. C'est par exemple l'étude de la Lune (ou d'un satellite artificiel) autour de la Terre. (Ce sont ces exemples que l'on reprendra ensuite). On va s'intéresser maintenant à ce que les différentes lois de conservation nous apprennent sur ce mouvement.

TODO : Faire une figure pour fixer les notations

2.1 Conservation de la quantité de mouvement

Le système $\{m_1 + m_2\}$ étant isolé, la quantité de mouvement totale est donc constante :

$$m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 = \mathbf{cste} \quad (10)$$

Or, on sait que la position du barycentre G est donnée par

$$(m_1 + m_2) \mathbf{OG} = m_1 \mathbf{OM}_1 + m_2 \mathbf{OM}_2 \quad (11)$$

En dérivant par rapport au temps, on trouve donc que

$$(m_1 + m_2) \mathbf{v}_G = m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 \quad (12)$$

qui est la quantité de mouvement totale du système, et donc une constante. Le barycentre du système a donc un mouvement rectiligne uniforme. Le référentiel barycentrique est donc galiléen, et on va dans la suite se placer dans celui-ci.

☞ Ce n'est pas une conclusion hyper intéressante, mais c'est quand même sympa pour justifier la suite de l'étude.

Dans le référentiel barycentrique, la position des diverses masses s'obtient de manière rapide à l'aide des équations suivantes :

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{GM}_1 = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{M}_1 \mathbf{M}_2 \quad (13)$$

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{GM}_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{M}_1 \mathbf{M}_2 \quad (14)$$

On a donc uniquement besoin d'étudier l'évolution temporelle du vecteur $\mathbf{r} = \mathbf{M}_1 \mathbf{M}_2$. En appliquant la 2e loi de Newton, on a :

$$m_1 \frac{d^2 \mathbf{r}_1}{dt^2} = \mathbf{F}_{21} \quad (15)$$

$$m_2 \frac{d^2 \mathbf{r}_2}{dt^2} = \mathbf{F}_{12} \quad (16)$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \frac{\mathbf{F}_{12}}{m_2} - \frac{\mathbf{F}_{21}}{m_1} = \mathbf{F}_{12} \left(\frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_1} \right) \quad (17)$$

où la 3e ligne est obtenue en prenant la différence de la deuxième et de la troisième, divisée par la masse. Pour étudier l'évolution de \mathbf{r} , on peut donc se ramener à l'évolution d'une particule fictive de masse $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ soumise à la force \mathbf{F}_{12} . Cette particule fictive se déplace alors dans un potentiel donné par

$$U = -\frac{G m_1 m_2}{r} \quad (18)$$

┆ Maintenant que l'on a compris quel potentiel on étudiait dans le référentiel barycentrique, on peut continuer avec nos autres lois de conservation.

2.2 Conservation du moment cinétique

Le potentiel obtenu ne dépend que de la coordonnée radiale, et est donc invariant par rotation. Par conséquent, le moment cinétique de notre particule fictive est conservé à tout instant :

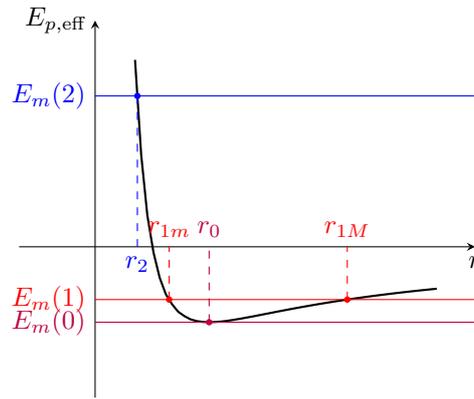
$$\mathbf{r} \times \mu \mathbf{v} = \mathbf{cste} = \mathbf{L} \quad (19)$$

Cela signifie qu'il existe un vecteur \mathbf{L} constant auquel est orthogonal en tout instant le vecteur \mathbf{r} . Le mouvement du système se fait donc entièrement dans **un plan**. Si on se place en coordonnées polaires, avec z l'axe correspondant à \mathbf{L} , on a donc

$$\mathbf{r} = r \mathbf{e}_r \quad (20)$$

$$\mathbf{v} = \dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta \quad (21)$$

$$\mathbf{L} = \mu r^2 \dot{\theta} \mathbf{e}_z \quad (22)$$



On a donc une constance de $r^2\dot{\theta}$. À quoi correspond cette quantité ? Il s'agit, à un facteur prêt, de l'aire balayée par le vecteur \mathbf{r} pendant un temps dt . Ainsi, on vient de trouver que le mouvement se faisait avec une **vitesse aérolaire constante** : l'aire balayée par le rayon vecteur pendant des intervalles de temps égaux est une constante. Il s'agit de la 2e loi de Kepler !

TODO : Schéma loi des aires et calcul à partir du schéma

On a déjà trouvé plusieurs informations sur la trajectoire à partir de lois de conservation, mais il nous reste une troisième loi à utiliser, car le potentiel U ne dépend pas explicitement du temps !

2.3 Conservation de l'énergie

☞ À partir des slides !

Puisque U ne dépend pas explicitement du temps, on a directement conservation de l'énergie mécanique pour notre particule fictive :

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{Gm_1m_2}{r} = \text{cste} \quad (23)$$

De plus, on sait que $r^2\dot{\theta} = C$ est une constante. On peut donc éliminer totalement la dépendance en $\dot{\theta}$ de cette équation pour se ramener à une équation sur r uniquement :

$$E_m = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\mu\frac{C^2}{r^2} - \frac{Gm_1m_2}{r} \quad (24)$$

Le premier terme étant nécessairement positif ou nul, on voit que l'étude du deuxième terme nous permet de restreindre l'ensemble des r accessibles pour une énergie mécanique donnée. En effet, la courbe correspondant à la somme des deux derniers termes est la suivante : Selon la valeur de E_m , quelles sont alors les types de trajectoires possibles ?

- Si $E_m < E_{\min}$, aucune position ne permet de vérifier l'équation : cette situation est impossible.
- Si $E_m = E_{\min}$, on a nécessairement $r = r_0$: le mouvement se fait avec un rayon constant, et est donc circulaire. Cela correspond également à l'idée que l'énergie cinétique radiale doit obligatoirement être nulle dans cette situation. De plus, la constante des aires nous impose, puisque r est constant, que $\dot{\theta}$ le soit également. On est donc dans une situation de mouvement circulaire uniforme.
- Si $E_{\min} < E_m < 0$, on voit que l'ensemble des positions accessibles est un intervalle borné entre les positions $r_{\min}(E_m)$ et $r_{\max}(E_m)$. Le système est donc dans un **état lié**. En ces deux positions, l'énergie cinétique radiale est nécessairement nulle, ce qui correspond bien à l'idée d'un extremum local.
- Si $E_m \geq 0$, la seule contrainte est sur le rayon minimal. Le rayon r peut devenir infini, ce qui veut dire que dans ce cas les deux masses peuvent s'éloigner indéfiniment et s'échapper de l'influence de l'autre. On parle alors d'un **état de diffusion**.

Essayons de voir ce que cela donne pour des exemples :

- Pour la Lune autour de la Terre : $r \simeq 384 \times 10^6$ m, $\dot{\theta} \simeq \frac{2\pi}{29.5 \times 86400} = 2.46 \times 10^{-6}$ rad s⁻¹, $m_1 = 7.3 \times 10^{22}$ kg, $m_2 = 6.0 \times 10^{24}$ kg. On obtient une énergie mécanique de -4.4×10^{28} J : c'est bien un état lié!
- Pour envoyer une sonde hors de l'influence de la Terre, il faut que son énergie mécanique soit positive, alors qu'elle part du sol (donc du rayon terrestre). Pour cela, il faut que sa vitesse soit supérieure à

$$\sqrt{\frac{2Gm_T}{R_T}} = 11 \text{ km s}^{-1} \quad (25)$$

On appelle cette valeur la vitesse de libération terrestre. On peut voir qu'elle est indépendante de la masse de l'objet étudié.

On a donc presque tout trouvé sur les trajectoires mises en jeu dans ce système ! Mais est-ce qu'on peut trouver la trajectoire elle-même de cette manière, ou est-ce qu'on est obligé de résoudre les équations différentielles pour cela ? Dit autrement : y a-t-il encore d'autres quantités conservées permettant de trouver la trajectoire ?

2.4 D'autres quantités conservées ?

Il existe bien une autre quantité conservée pour le problème que nous étudions : le vecteur de Runge-Lenz¹, donné par la formule suivante :

$$\mathbf{A} = \mathbf{v} \times \mathbf{L} - Gm_1m_2\mathbf{e}_r \quad (26)$$

Commençons par vérifier qu'il s'agit bien d'une quantité conservée. On sait déjà que \mathbf{L} est une quantité conservée. On a alors

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \times \mathbf{L} - Gm_1m_2\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta \quad (27)$$

et, par le PFD,

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{Gm_1m_2}{\mu r^2}\mathbf{e}_r \quad (28)$$

tandis que $\mathbf{L} = \mu r^2\dot{\theta}\mathbf{e}_z$. On a donc bien

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \mathbf{0} \quad (29)$$

quand on remet tout ensemble. Le vecteur \mathbf{A} est donc une constante.

À partir de ce vecteur, on peut alors trouver la trajectoire de la particule. Calculons le produit scalaire $\mathbf{A} \cdot \mathbf{r}$. En prenant par définition de l'angle θ l'angle entre ces deux vecteurs (c'est une convention, puisque \mathbf{A} est bien un vecteur constant), on a

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{r} = Ar \cos(\theta) = (\mathbf{v} \times \mathbf{L}) \cdot \mathbf{r} - Gm_1m_2r \quad (30)$$

$$= (r\dot{\theta}L)r - Gm_1m_2r \quad (31)$$

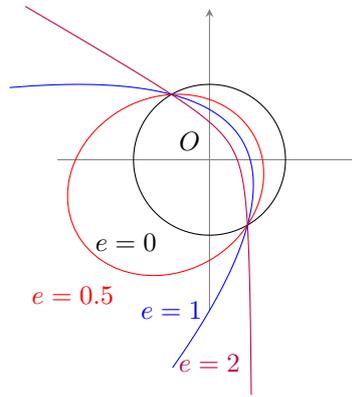
$$= \mu C^2 - Gm_1m_2r \quad (32)$$

car $L = \mu C$. Pour passer à la deuxième ligne, on s'est contenté de prendre la composant du produit vectoriel qui est bien selon \mathbf{e}_r . Ainsi, on vient de trouver une équation implicite $r(\theta)$! En effet, on peut réécrire l'équation précédente sous la forme

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\theta)} \quad \text{avec} \quad p = \frac{\mu C^2}{Gm_1m_2} \quad \text{et} \quad e = \frac{A}{Gm_1m_2} \quad (33)$$

C'est l'équation d'une conique, de paramètre p et d'excentricité e . Selon la valeur de e (et donc de A), on a plusieurs types de trajectoire possibles :

- Si $e = 0$, on retrouve un cercle de rayon p .
- Si $e < 1$, on a une ellipse dont le grand axe est dirigé selon la direction donnée par \mathbf{A} .
- Si $e = 1$, on a une parabole attractive
- Si $e > 1$, on a une branche d'hyperbole attractive.



Une petite figure ne fait jamais de mal!

On peut démontrer que le lien entre E_m et e est donné par

$$E_m = \frac{G^2 m_2^2 m_1}{2C^2} (e^2 - 1) = \frac{Gm_1 m_2}{2p} (e^2 - 1) \quad (34)$$

On retrouve bien le fait que si $E_m < 0$, on a une trajectoire elliptique, qui est donc non seulement contrainte mais également fermée!

☞ Ici, il faut bien insister sur le fait que l'on a réussi à parfaitement retrouver l'ensemble des propriétés du mouvement sans jamais résoudre la moindre équation différentielle! C'est quand même bien pratique.

Conclusion

Avec ce problème, on a donc mis en avant comment la connaissance de quantités conservées pouvait permettre la résolution complète de situations physiques complexes. Ici, on l'a fait dans un cas où cela paraît un peu artificiel, puisque cette étude a été menée sur un système où l'on connaissait parfaitement les forces appliquées. Cependant, ces lois de conservation sont loin d'être utilisables uniquement dans de tels cas... Un cas bien particulier dans lequel ces lois ont permis de fortes avancées est le domaine des interactions rayonnement/matière, où l'on a expliqué l'effet Compton, ou la physique des particules, où l'on a ainsi pu prédire l'existence du neutrino. Enfin, on a vu dans la première partie que ces lois de conservation étaient reliées à des invariances du système. Il s'agit en fait d'une propriété générale qui a été comprise par la physicienne Emmy Noether au début du XXe siècle dans le cadre de la mécanique analytique.

☞ Bien entendu, jeter un œil à Noether et les symétries continues en mécanique classique, ou à l'invariance par translation discrète (temporelle ou spatiale) en MQ (Bloch/Floquet), pour être chaud pour les questions.

Cependant, et malgré la remarque ci-dessus, on était quand même dans ce cas dans une situation où l'on connaissait les forces impliquées... Comment faire si on ne les connaît pas? Peut-on toujours se reposer sur les lois de conservation pour avancer? On va voir que oui, sur un exemple historique

Effet Compton

☞ Normalement cette partie est complètement impossible à faire dans le temps normal de la leçon. Dans ce cas, ouvrir dessus en conclusion

1. Ou Hermann-Bernoulli-Laplace-Runge-Lenz, cf Sivardière p.805

Présentation du problème

➤ Cagnac, p.54

Au début du XXe siècle, avec la découverte des sources de rayons X et de leur pouvoir de diffusion sur la matière, un grand nombre d'expériences de diffusion sont effectuées afin d'étudier plus en détail la matière à un niveau microscopique. Ainsi, la théorie classique de Thomson permettait de relier l'intensité diffusée par les atomes à leur nombre d'électrons et donc à leur numéro atomique. Ce faisant, un grand nombre d'expériences sont effectuées par Barkla pour vérifier les prédictions de Mendeleïev sur la classification périodique des éléments.

Cependant, plusieurs écarts à cette théorie sont observés dès 1909, sans explications convaincantes. À partir de 1923, Compton reprend ces expériences de diffusion avec l'aide d'un spectromètre lui permettant d'étudier la longueur d'onde des rayonnements diffusés. L'expérience est donc la suivante :

TODO : Figure de l'expérience et spectres obtenus, Cagnac p. 55

Cette nouvelle composante dans l'intensité diffusée apparaît à une longueur d'onde plus grande, et l'écart augmente avec l'angle, d'une manière qui n'est pas expliquée par la théorie classique. De plus, cet écart est à la fois indépendant du matériau diffuseur utilisé et de la longueur d'onde initiale. Pour essayer d'expliquer ce phénomène, Compton suppose que des électrons de l'atome, initialement au repos, sont arrachés par l'onde. En l'absence d'un modèle microscopique précis des interactions entre l'onde et les électrons, son idée est alors de n'utiliser que des lois de conservation pour étudier ce qui se passe. C'est ce que nous allons également faire maintenant.

Utilisation des lois de conservation

On va étudier la situation présentée sur la figure ci-dessous

TODO : Figure diffusion

On a alors une collision entre un photon libre et un électron. On va étudier deux conservations : la conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement, celles-ci étant données par les équations de la mécanique quantique (pour le photon) et de la relativité (pour l'électron). On a alors le tableau suivant :

Énergie (photon)	Avant l'échange	Après l'échange
Énergie (électron)	$E_0 = h\nu_0$	$E_1 = h\nu$
Quantité de mouvement (photon)	$m_e c^2$	$\sqrt{p^2 c^2 + m_e^2 c^4}$
Quantité de mouvement (électron)	$\frac{E_0}{c} \mathbf{e}_z$	$\frac{E}{c} (\cos(\theta) \mathbf{e}_z + \sin(\theta) \mathbf{e}_x)$
	$\mathbf{0}$	$p(\cos(\phi) \mathbf{e}_z + \sin(\phi) \mathbf{e}_x)$

Avec la conservation de l'énergie et de chaque composante de la quantité de mouvement, on obtient 3 équations pour 4 inconnues (p, ν, θ, ϕ) :

$$h\nu_0 + m_e c^2 = h\nu + \sqrt{p^2 c^2 + m_e^2 c^4} \tag{35}$$

$$\frac{h\nu_0}{c} = \frac{h\nu}{c} \cos(\theta) + p \cos(\phi) \tag{36}$$

$$0 = \frac{h\nu}{c} \sin(\theta) + p \sin(\phi) \tag{37}$$

Dans la situation expérimentale, on a fixé θ , et on va donc chercher à retrouver les autres inconnues en fonction de θ . À partir des deux dernières équations, on peut facilement obtenir p^2 , il suffit de prendre la somme des carrés des équations.

$$p^2 = \left(\frac{h\nu_0}{c} - \frac{h\nu}{c} \cos(\theta) \right)^2 + \left(\frac{h\nu}{c} \sin(\theta) \right)^2 \tag{38}$$

$$= \frac{h^2}{c^2} (\nu_0^2 + \nu^2 - 2\nu_0\nu \cos(\theta)) \tag{39}$$

Et, avec l'équation sur l'énergie mise au carré,

$$p^2 c^2 = (h(\nu_0 - \nu) + m_e c^2)^2 - m_e^2 c^4 \tag{40}$$

soit finalement

$$2m_e c^2 h(\nu_0 - \nu) - 2h^2 \nu_0 \nu = -2h^2 \nu_0 \nu \cos(\theta) \tag{41}$$

$$\frac{\nu_0 - \nu}{\nu_0 \nu} = \frac{h}{m_e c^2} (1 - \cos(\theta)) \tag{42}$$

En se ramenant aux longueurs d'onde, et puisque $\frac{\nu_0 - \nu}{\nu_0 \nu} = 1/\nu - 1/\nu_0$, on trouve :

$$\lambda - \lambda_0 = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos(\theta)) \quad (43)$$

On retrouve bien les propriétés observées par Compton en 1923 :

- $\lambda > \lambda_0$: logique, le photon a nécessairement perdu de l'énergie lorsqu'il a mis en mouvement l'électron.
- $\delta\lambda$ est croissant avec θ .
- $\delta\lambda$ ne dépend que de θ , et pas de λ_0 , car ce qui est devant est une constante, appelée longueur d'onde de Compton

$$\Lambda = \frac{h}{m_0 c} = 0.02426 \text{ \AA} \quad (44)$$

C'est la longueur d'onde pour laquelle l'énergie des photons est égale à l'énergie de repos de l'électron

$$h\nu = m_e c^2 = 0.511 \text{ MeV} \quad (45)$$

Ces valeurs numériques ont pu être vérifiées expérimentalement avec les expériences de Gingrich en 1930, confirmant l'analyse effectuée par Compton.

On vient donc de voir une étude où la seule information dont on dispose est la conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement, sans rien d'autre, et nous avons pu comprendre un effet inattendu de l'interaction lumière-matière. Cette étude met à nouveau en avant la manière dont les lois de conservation vont pouvoir nous aider à comprendre la physique de nombreux systèmes.

Remarque sur Noether

Ma version "préférée" du théorème de Noether, c'est la suivante :

Si un système est invariant par l'action d'un groupe continu G de dimension n , alors il existe n grandeurs physiques qui sont des constantes du mouvement.

Pour trouver ces constantes : si on étudie la transformation infinitésimale $q'_i = q_i + A_{ij}\epsilon_j$, et que l'on trouve que $L(q, \dot{q}, t) - L(q', \dot{q}', t') = \epsilon_j dF_j(q, t)/dt$, les quantités conservées sont les

$$Q_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} A_{ij} + F_j \quad (46)$$