

LP08 – NOTION DE VISCOSITÉ D’UN FLUIDE. ÉCOULEMENT VISQUEUX.

1^{er} mai 2019

Lagoin Marc & Ramborghi Thomas

Niveau : L3

Commentaires du jury

- Maîtriser la signification du nombre de Reynolds
- Présenter le fonctionnement d’un viscosimètre
- Réfléchir à l’origine des actions de contact mises en jeu entre un fluide et un solide
- Ne pas sacrifier le modèle microscopique de la viscosité

Bibliographie

- ✦ *Une introduction à la dynamique des fluides*, **Michel Rieutord** Principal sources de données pour la construction de la leçon
- ✦ *Hydrodynamique physique*, **Étienne Guyon, Jean-Pierre Hulin et Luc Petit** Pour l’étude microscopique.

Prérequis

- Description lagrangienne et eulérienne de la vitesse
- Équation de Navier-Stokes
- Relations de conservation (masse, quantité de mouvement, énergie)
- Conditions aux limites
- Écoulement de fluide parfaits

Expériences

- ☞ Expérience de Stokes
- ☞ Calcul de la viscosité d’un écoulement Poiseuille sortant d’un vase de Mariotte.
- ☞ Expérience de la colonne de colorant

Table des matières

1	Présentation et mise en équation d’un fluide visqueux	2
1.1	Modèle microscopique de la viscosité	2
1.2	Équation de Stokes, Nombre de Reynolds et loi de similitude	4
2	Étude de la couche limite	6
2.1	Position du problème	6
2.2	Mise en équation	6
2.3	Équations de Prandtl	7
2.3.1	Équation de continuité	7
2.3.2	NS	7
2.4	Analyse des équations	7
3	L’écoulement de Poiseuille	8
3.1	Résolution du problème	8
3.2	Vérification de la loi de Hagen-Poiseuille et calcul de μ	9

Introduction



Expérience de la colonne de colorant.



⊖ 2 min

Dans la cuve écoulement de couette de l'ENS. On la remplit de Glycérol jusqu'en haut et on ferme avec le couvercle coulissant adapté. à l'aide d'une seringue on dépose alors une colonne verticale de glycérol coloré dans la cuve. (Il faut se placer loin des bords. On fait alors coulisser le couvercle et on laisse la magie opérer : *All were amazed...* Puis on fait coulisser le couvercle dans l'autre sens. *And the crowd went absolutely bananas!*

Cette expérience met en évidence la viscosité et la couche limite.

Nota Bene : Du fait de la différence de densité entre le colorant et le reste du fluide, la réversibilité n'est assurée que sur des temps courts où la poussée d'Archimède reste négligeable.

Si on essaye d'analyser cette expérience

- **le bas de la colonne n'est pas déformée mais le haut oui : force de contact.** Or les seules que l'on connaît pour l'instant sont les forces de pressions normales aux surfaces. Ici, on n'a que la force de pression suivant l'axe z .
- La colonne de colorant bouge au cours du temps donc **la vitesse horizontale dans le fluide varie verticalement.** Donc, **il manque des forces tangentielles**

On peut considérer le fluide comme un feuillet de particules fluides à des vitesses différentes qui glissent les unes sur les autres. **La force de cisaillement qu'exerce la feuille du dessus** sur celle du dessous est proportionnelle à la différence de vitesse entre deux feuilles. C'est une loi phénoménologique :

$$\sigma = \frac{F}{S} = \mu \frac{\partial v_x}{\partial z} \quad (1)$$

où S est la surface des feuilles et μ un paramètre appelé *viscosité dynamique*.

1 Présentation et mise en équation d'un fluide visqueux

1.1 Modèle microscopique de la viscosité

♥ À retenir : La viscosité peut être interprétée comme une diffusion de la quantité de mouvement entre les particules Eulériennes de fluide.

Ici, on va justifier par un modèle la relation expérimentale précédente dans le cadre d'un gaz Newtonien. Ce modèle fait appel à des résultats de cinétique des gaz.

On considère un gaz parfait, contenant n particules identiques (de masse m) par unité de volume. Le gaz est à la température fixée T . Le fluide est en mouvement macroscopique à la vitesse $v_x(z)$ suivant $\vec{e}_x$. On suppose le référentiel du laboratoire comme étant galiléen.

Attention, il y a deux échelles de vitesses bien différentes ici :

- la vitesse macroscopique d'entraînement par convection.
- la vitesse microscopique¹ de chaque particule, aléatoire et de norme moyenne $\langle u \rangle$ mais dirigée aléatoirement.

Nota Bene : $l = \frac{1}{\sqrt{2}ns}$ et $D = \frac{1}{3} \langle u \rangle l$ où : s est la section efficace et D le coefficient de diffusion. Ces résultats sont donnés par la théorie cinétique des gaz.

Dans ce fluide, on choisit une tranche à l'altitude y , de longueur L et on fait un bilan de la quantité de mouvement p_y qui s'échappe et qui rentre sous l'effet de l'agitation thermique durant dt :

1. équipartition de l'énergie : $\frac{1}{2} m \langle u \rangle^2 = \frac{3}{2} k_B T$

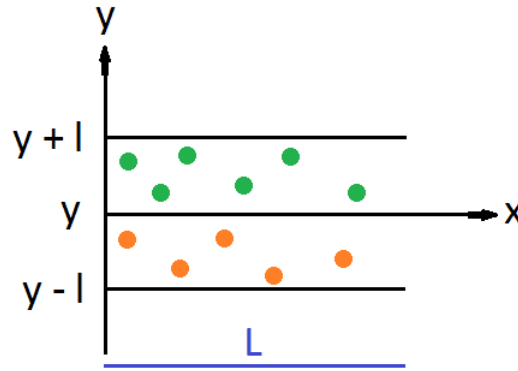


FIGURE 1 – Schéma illustrant le bilan d'impulsion d'une couche de longueur L de particule fluide.

$$\Delta p = \frac{\partial p_y}{\partial t} dt = \text{nombre de particules fluides qui passent la couche} \times \text{leur impulsion} \quad (2)$$

$$= \underbrace{\frac{1}{6} \langle u \rangle dt L n}_{(1)} \times m v_x(y+l) - \underbrace{\frac{1}{6} \langle u \rangle dt L n}_{(2)} \times m v_x(y-l) \quad (3)$$

(1) correspond au nombre de particule fluide en verte sur la figure qui passe par la couche de longueur L en emportant chacune avec elles la quantité de mouvement $m v_x(y+l)$. (2) correspond au nombre de particule fluide en orange sur la figure qui passe par la couche de longueur L en emportant chacune avec elles la quantité de mouvement $m v_x(y-l)$.

Comme toujours, une fois que le bilan est bon, le plus dur est passé. Il reste à simplifier. Pour cela, on fait un développement de Taylor :

$$v_x(y+l) = v_x(y) + l \frac{\partial v_x}{\partial y}(y) \quad \text{et} \quad v_x(y-l) = v_x(y) - l \frac{\partial v_x}{\partial y}(y) \quad (4)$$

Donc :

$$\frac{\partial p_y}{\partial t} = \frac{1}{3} L \langle u \rangle n \times m l \frac{\partial v_x}{\partial y}(y) \quad (5)$$

On applique le PFD sur notre volume : la force qui s'exerce sur la tranche considérée est

$$F = \frac{\partial p_y}{\partial t} \quad (6)$$

En recollant les morceaux, on obtient alors :

$$\frac{F}{L} = \frac{1}{3} n \langle u \rangle \times m l \frac{\partial v_x}{\partial y}(y) \quad (7)$$

$$= \mu \frac{\partial v_x}{\partial y} \quad \text{avec :} \quad \mu = \frac{1}{3} n \langle u \rangle \times m l \propto \sqrt{T} \quad (8)$$

ODG Air à $T = 289 \text{ K}$ et $P = 10^5 \text{ Pa}$: $\rho = 102 \text{ kg.m}^{-3}$, $\langle u \rangle = 500 \text{ m.s}^{-1}$ et $l = 10^{-7} \text{ m}$
On trouve $\mu = 2.0 \cdot 10^{-5} \text{ Pa.s}^{-1}$ (à comparer avec la valeur expérimentale : $\mu = 1.8 \cdot 10^{-5} \text{ Pa.s}^{-1}$)

On commentera la dépendance en température due à $\langle u \rangle = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}}$.

Dans les liquides, souvent, ce n'est pas le cas : penser au miel qui coule mieux quand il est chaud... Faut-il un autre modèle ?

Nota Bene : Le modèle pour les liquides emprunte des éléments de statistique. On considère que nos particules sont des sphères dures empilées et libre de glisser librement les unes sur les autres. On considère une particule voisine de deux cages vides. La probabilité qu'une particule aille dans la case vide suivante est modélisée par une loi type Maxwell Boltzmann.

1.2 Équation de Stokes, Nombre de Reynolds et loi de similitude

Le principe fondamental de la dynamique est connu en hydrodynamique sous le nom d'équation de Navier-Stokes. Si nous considérons un fluide newtonien et supposons que sa masse volumique ρ et sa viscosité dynamique μ sont constantes, nous obtenons l'équation :

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right) = -\vec{\nabla} P + \mu \Delta \vec{v} + \vec{f} \quad (9)$$

avec $\vec{v}$ la vitesse eulérienne du fluide, P la pression et $\vec{f}$ les éventuelles forces extérieures que nous considérons nulles par la suite.

Nota Bene : La description eulérienne consiste à décrire la dynamique du fluide comme un champ de vecteur dont la valeur est donnée en chaque point de l'espace. Elle est différente de la description lagrangienne qui donne la trajectoire des particules fluides.

Nota Bene : La définition d'un fluide Newtonien est un peu complexe. Il s'agit d'un fluide dont l'état est proche de son état d'équilibre. Ce type de fluide est caractérisé par son expression du tenseur des contraintes qui prend la forme :

$$\sigma_{ij} = -P \delta_{ij} + \mu \left(\partial_i v_j + \partial_j v_i - \frac{2}{3} (\partial_k v_k) \delta_{ij} \right) + \zeta (\partial_k v_k) \delta_{ij} \quad (10)$$

dans laquelle μ est la viscosité dynamique de cisaillement et ζ le coefficient de viscosité dynamique de volume. Ce dernier terme est souvent négligé (hypothèse de Stokes) car $\vec{\nabla} \cdot \vec{v}$ est souvent faible. Pour obtenir cette expression de la contrainte, il faut dire qu'elle est une fonction du gradient des vitesses, puis effectuer un développement limité à l'ordre 1 au tour de l'équilibre et enfin imposer que le tenseur d'ordre 4 apparaissant dans l'équation soit symétrique et homogène.

Nous allons à présent effectuer une seconde hypothèse très utilisée en hydrodynamique : il s'agit de considérer le fluide incompressible. Elle revient à dire que la masse volumique est constante sur l'ensemble de l'écoulement. Nous obtenons ainsi une nouvelle équation :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \quad (11)$$

Le système d'équations obtenu permet de décrire la dynamique d'un très grand nombre de fluide. Cependant l'équation de Navier-Stokes est trop compliquée pour nous permettre de déterminer le champ de vitesse. Nous devons donc regarder quels termes peuvent être négligés suivant le problème que nous souhaitons résoudre. Dans notre cas, nous allons nous intéresser à des écoulements où la viscosité domine. Ces écoulements sont caractérisés par un petit nombre de Reynolds.

♥ À retenir : Ce nombre caractéristique compare la viscosité à la convection et prend la forme :

$$Re = \frac{\text{convection}}{\text{diffusion}} = \frac{\frac{\rho \times V^2}{L}}{\frac{\mu \times V}{L^2}} = \frac{\rho \times V \times L}{\mu} \quad (12)$$

avec V la vitesse caractéristique du fluide, ρ sa masse volumique, L la distance caractéristique et μ la viscosité dynamique de cisaillement.

En adimensionnant l'équation de Navier-Stokes, nous allons montrer que cette équation est entièrement dictée par la valeur de ce nombre caractéristique. Pour cela, nous posons :

$$\vec{v} = V \vec{u} \quad \vec{r} = L \vec{x} \quad t = \frac{L}{V} \tau \quad P = \rho V^2 p \quad (13)$$

Ce qui nous permet de réécrire les différents termes :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} &\longrightarrow \frac{\partial \vec{u}}{\partial \tau} \times \frac{V}{L} \\
\vec{v} \cdot \nabla_{\vec{r}} \vec{v} &\longrightarrow \vec{u} \cdot \nabla_{\vec{x}} \vec{u} \times \frac{V^2}{L} \\
-\frac{1}{\rho} \nabla_{\vec{r}} P &\longrightarrow -\nabla_{\vec{x}} p \times \frac{\rho V^2}{\rho L} \\
\frac{\mu}{\rho} \Delta_{\vec{r}} \vec{v} &\longrightarrow \Delta_{\vec{x}} \vec{u} \times \frac{\mu V}{\rho L^2}
\end{aligned}$$

On obtient alors :

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial \tau} + \vec{u} \cdot \nabla_{\vec{x}} \vec{u} = -\nabla_{\vec{x}} p + \frac{1}{Re} \Delta_{\vec{x}} \vec{u} \quad (14)$$

♥ À retenir : Le nombre de Reynolds étant la seule variable dans l'équation, tout écoulement possédant le même nombre de Reynolds aura une dynamique similaire. Ce résultat est connu sous le nom de loi de similitude.

Nous pouvons maintenant réécrire l'équation précédente sous une forme un peu différente :

$$Re \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial \tau} + \vec{u} \cdot \nabla_{\vec{x}} \vec{u} \right) = -\nabla_{\vec{x}} p' + \Delta_{\vec{x}} \vec{u} \quad (15)$$

dans laquelle nous avons posés : $p' = \frac{p}{Re}$. Ce changement de variable revient à considérer que le gradient de pression s'adapte lorsque la viscosité augmente. Pour ce convaincre de ce changement, nous pouvons faire la rotationnel de l'équation de Navier Stokes. On remarque alors que la pression n'apparaît plus. Or cette équation ainsi que l'hypothèse d'incompressibilité permet de totalement décrire le système. La pression n'a donc pas de rôle dynamique et nous pouvons la voir comme un paramètre d'ajustement.

Regardons ce que devient notre équation lorsque le nombre de Reynolds est très petit devant 1. Nous obtenons alors l'équation de Stokes (adimensionnée) :

$$-\vec{\nabla} p' + \Delta \vec{u} = 0 \quad (16)$$

Nous pouvons effectuer 2 remarques :

- le terme de convection n'apparaît plus. L'équation du champ de vitesse est donc une équation linéaire. Par conséquent nous avons unicité de la solution une fois les conditions aux limites fixées. Par conséquent les écoulements rampants seront stables. De plus la linéarité de l'équation procure une propriété d'inversibilité au fluide (voir prochaine manip!).
- nous insistons sur le fait que l'équation obtenue est valable uniquement si $Re \ll 1$. Dans le cas d'un nombre de Reynolds faible mais plus grand que 1, le raisonnement n'est plus valable et nous devons considérer une équation plus complexe appelée équation d'Oseen. Par manque de temps nous ne détaillerons pas le formalisme dans ce cas-ci. Nous pouvons cependant donner la longueur caractéristique (distance à l'objet) au bout de laquelle l'équation de Stokes ne peut plus être utilisée : $L \approx Re^{-1}$ (lorsque le terme associé à la convection possède le même ordre de grandeur que celui associé à la viscosité).



Expérience de Stokes



⊖ 20 s

écoulement d'un fluide visqueux entre 2 cylindres coaxiaux dont l'un est mis en rotation. Il s'agit d'une expérience qualitative visuel montrant la propriété de réversibilité d'un fluide rampant à l'aide d'une goutte de colorant. (page 411 du Jolidon).

2 Étude de la couche limite

On s'intéresse à un fluide réel laminaire à haut Reynolds qui s'écoule en présence d'une paroi. Les particules de fluides adhèrent aux parois ce qui annule la composante tangentielle de la vitesse à l'approche des parois. Quel est le profil de vitesse qui conduit à cette annulation ?

Comme on l'a vu dans l'expérience introductive, loin de la paroi, la colonne de colorants n'était pas ébranlée par le déplacement de la paroi supérieure. On récupérerait alors un comportement similaire à celui du fluide parfait dans ce domaine. En effet, seule une petite partie de la colonne était entraînée.

♥ À retenir : La couche limite, c'est cette épaisseur de fluide (souvent près des parois) **où les effets de viscosité sont non négligeables**.

On peut obtenir la taille typique δ de cette couche : Dans la couche limite, la vitesse obéit à l'équation de NS mais puisque la viscosité ne peut être négligée :

$$\frac{1}{Re} \vec{\Delta} \vec{v} \cdot \vec{e}_z \approx \frac{U}{\delta^2} > O(1) \quad (17)$$

Pour cela, il faut :

- Soit que l'ordre de grandeur de la vitesse U est très grande. Cela n'a aucune raison d'arriver d'autant plus que la vitesse s'annule à la paroi.²
- Soit que la taille caractéristique de variation de la vitesse verticale, *i.e.* δ soit telle que :

$$\delta \approx \frac{1}{\sqrt{Re}} \quad (18)$$

2.1 Position du problème

On considère un écoulement incompressible à haut Reynolds : $Re \gg 1$ mais suffisamment bas pour ne pas être en régime turbulent.

Dans l'écoulement, on fixe une surface plane rigide en $z = 0$. Il y a donc une couche limite aux abords de $z = 0$. Elle a une taille caractéristique $\delta = \frac{1}{\sqrt{Re}}$.

Hors de cette zone, on considère un écoulement parallèle à la vitesse $U \vec{e}_x$.

Dans cette zone, les effets de viscosité ne sont plus négligeables le fluide est régi par l'équation de Stokes. On recherche les équations régissant l'écoulement dans cette couche limite.

On note $v = v_x \vec{e}_x + v_z \vec{e}_z$ la vitesse.

2.2 Mise en équation

Comme la vitesse tangentielle à la paroi doit s'annuler en $z = 0$: on a $v_x(z = 0) = 0$. v_x passe donc de U à 0 en sur l'épaisseur δ . Ceci justifie que les variations suivant z des grandeurs sont plus fortes que suivant x :

$$\frac{\partial}{\partial x} \ll \frac{\partial}{\partial z} \quad (19)$$

2. On admet alors que $U \approx O(1)$

Par commodité, On fait aussi un changement de variable :

$$Z = \frac{z}{\delta} \quad \text{donc} \quad \frac{\partial}{\partial x} \ll \frac{1}{\delta} \frac{\partial}{\partial Z} \quad (20)$$

La couche limite s'étend donc pour $Z = 0$ à $Z = +\infty$. On développe aussi les composantes de la vitesse en puissances de δ :

$$v_x = v_{x0} + \delta \times v_{x1} + \dots \quad \text{et} \quad v_z = v_{z0} + \delta \times v_{z1} + \dots \quad (21)$$

2.3 Équations de Prandtl

2.3.1 Équation de continuité

$$\text{div } \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{1}{\delta} \frac{\partial v_z}{\partial Z} = 0 \quad (22)$$

donc :

$$\text{div } \vec{v} = \frac{\partial}{\partial x}(v_{x0} + \delta \times v_{x1} + \dots) + \frac{1}{\delta} \frac{\partial}{\partial Z}(v_{z0} + \delta \times v_{z1} + \dots) = 0 \quad (23)$$

Ordre -1 :

$$\frac{\partial}{\partial Z} v_{z0} = 0 \quad \text{donc} \quad (v_{z0}(x=0)) \quad \text{donc} \quad v_{z0} = 0 \quad (24)$$

Ordre 0 :

$$\frac{\partial}{\partial x} v_{x0} + \frac{\partial}{\partial Z} v_{z1} = 0 \quad (25)$$

2.3.2 NS

Puisque la viscosité est importante ici, on ne peut plus négliger le terme visqueux dans NS :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\overrightarrow{\text{grad}}(P) + \frac{1}{Re} \Delta \vec{v} \quad (26)$$

Devient, en se rappelant que $\delta^2 = 1/Re$:

→ **SUR X :**

$$\begin{aligned} & \left[(v_{x0} + \delta v_{x1}) \frac{\partial}{\partial x} (v_{x0} + \delta v_{x1}) + (\delta v_{z1}) \frac{1}{\delta} \frac{\partial}{\partial Z} (v_{x0} + \delta v_{x1}) \right] = \\ & - \frac{\partial}{\partial x} P + \delta^2 \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} (v_{x0} + \delta v_{x1}) + \frac{1}{\delta^2} \frac{\partial^2}{\partial Z^2} (v_{x0} + \delta v_{x1}) \right] \end{aligned} \quad (27)$$

Ordre 0 :

$$v_{x0} \frac{\partial}{\partial x} v_{x0} + v_{z1} \frac{\partial}{\partial Z} v_{x0} = - \frac{\partial}{\partial x} P + \frac{\partial^2}{\partial Z^2} v_{x0} \quad (28)$$

→ **SUR Z :**

$$\begin{aligned} & \left[(v_{x0} + \delta v_{x1}) \frac{\partial}{\partial x} (\delta v_{z1}) + (\delta v_{z1}) \frac{1}{\delta} \frac{\partial}{\partial Z} (\delta v_{z1}) \right] = \\ & - \frac{\partial}{\partial x} P + \delta^2 \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} (\delta v_{z1}) + \frac{1}{\delta^2} \frac{\partial^2}{\partial Z^2} (\delta v_{z1}) \right] \end{aligned} \quad (29)$$

Ordre -1 :

$$0 = - \frac{\partial}{\partial x} P \quad (30)$$

2.4 Analyse des équations

Notre jeu d'équation est appelé équations de Prandtl :

$$-\frac{\partial}{\partial x}P = 0 \quad (31)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}v_{x0} + \frac{\partial}{\partial Z}v_{z1} = 0 \quad (*) \quad (32)$$

$$v_{x0}\frac{\partial}{\partial x}v_{x0} + v_{z1}\frac{\partial}{\partial Z}v_{x0} = -\frac{\partial}{\partial x}P + \frac{\partial^2}{\partial Z^2}v_{x0} \quad (**) \quad (33)$$

La première équation indique que la pression est constante de Z . Elle sera déterminée par continuité avec l'écoulement parfait au dessus ($Z = +\infty$). Les 2 suivantes sont non linéaires ce qui complique beaucoup la résolution.

On peut travailler par substitution pour pousser un peu plus loin l'analyse du problème. $(**)$ indique que :

$$v_{z1} = \frac{1}{\frac{\partial}{\partial Z}(v_{x0})} \left[-\frac{\partial}{\partial Z} - \frac{\partial}{\partial x}P + \frac{\partial^2}{\partial Z^2}v_{x0} \right] \quad (34)$$

Et $(*)$ indique :

$$\frac{\partial}{\partial x}(v_{x0}) + \frac{\partial}{\partial Z} \left(\frac{1}{\frac{\partial}{\partial Z}(v_{x0})} \left[-\frac{\partial}{\partial Z} - \frac{\partial}{\partial x}P + \frac{\partial^2}{\partial Z^2}v_{x0} \right] \right) = 0 \quad (35)$$

On a donc un jeu d'équations non linéaires d'ordre 3. Il faut donc 3 conditions aux limites pour espérer les résoudre. On propose :

- adhérence à la paroi : En $Z = 0$ les vitesses tangentielles s'annulent.
 - $v_{0x}(Z = 0) = 0$
 - $v_{1x}(Z = 0) = 0$
- Continuité de la vitesse à l'interface de la couche limite vers la zone d'écoulement parfait :
 - $v_{0x}(Z \rightarrow +\infty) = U$

Remarque importante : On n'a pas du tout imposé de conditions stricte sur la **valeur** de $v_{1z}(z \rightarrow +\infty)$. Il est donc possible qu'il y ait un écoulement de fluide entre la couche limite et la zone d'écoulement parfait.

3 L'écoulement de Poiseuille

3.1 Résolution du problème

Nous allons maintenant prendre un exemple concret. Il s'agit de celui d'un fluide visqueux dans un tube cylindrique (d'axe $\vec{z}$ et de rayon R) et de grande longueur. Il est appelé écoulement de Poiseuille. Nous allons étudier le régime stationnaire. Pour cela, repartons de l'équation de Navier-Stokes :

$$\rho(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} = -\vec{\nabla}P + \mu\Delta\vec{v} \quad (36)$$

Une tranche cylindrique de fluide forme un plan d'antisymétrie pour le champ de vitesse. Par conséquent la vitesse est la forme : $\vec{v} = v(r, \theta, z)\vec{e}_z$. Par ailleurs il y a une invariance par translation suivant $\vec{e}_z$ et par rotation, d'où :

$$\vec{v} = v(r)\vec{e}_z \quad (37)$$

Nous pouvons dès lors remarquer que le terme convectif dans N.S sera nul. La projection suivant les axes $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$ et $\vec{e}_z$ nous conduit à :

$$\frac{\partial P}{\partial r} = 0 \quad (38)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} = 0 \quad (39)$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \right) \quad (40)$$

Dans la troisième équation le terme de gauche dépend uniquement de z et le terme de droite uniquement de r par conséquent les deux membres sont constants. Après intégration, nous obtenons :

$$\frac{r^2}{2\mu} \frac{\partial P}{\partial z} + A = r \frac{\partial v_z}{\partial r} \quad (41)$$

$$\frac{r}{2\mu} \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{A}{r} = \frac{\partial v_z}{\partial r} \quad (42)$$

Le second terme divergent pour $r = 0$, la constante A est nul. En intégrons de nouveau, nous obtenons :

$$\frac{r^2}{4\mu} \frac{\partial P}{\partial z} B = v_z \quad (43)$$

Enfin nous imposons la condition au limite : $v_z(r = R) = 0$, nous trouvons :

$$\vec{v} = \frac{1}{4\mu} \frac{\partial P}{\partial z} (r^2 - R^2) \vec{e}_z \quad (44)$$

Nous obtenons un profil de vitesse parabolique dont l'orientation est opposée au gradient de pression.

Nous pouvons à présent calculer le débit volumique de fluide Q_v passant à travers une section S du cylindre. Il est donnée par :

$$Q_v = \int_S \vec{v} \cdot d\vec{S} = \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{1}{4\mu} \frac{\partial P}{\partial z} (r^2 - R^2) r \, dr \, d\theta \quad (45)$$

$$= \frac{-\pi D^4}{128 \mu} \frac{\partial P}{\partial z} \quad (46)$$

Il s'agit de la loi de Hagen-Poiseuille. Nous voyons ici que le gradient de pression contrôle l'écoulement.

Nota Bene : Cette loi peut être réécrite sous la forme :

$$Q_v = \alpha \frac{\partial P}{\partial z} \quad (47)$$

Elle porte alors le nom de loi de Darcy. le facteur de proportionnalité α est appelé perméabilité.

3.2 Vérification de la loi de Hagen-Poiseuille et calcul de μ

Afin de vérifier la loi de Hagen-Poiseuille et obtenir la viscosité dynamique de l'eau, nous devons mesurer le débit volumique pour différents gradient de pression. Pour cela, nous utilisons un vase de Mariotte. Le tube inséré par le dessus impose une pression P_{atm} à une hauteur h_{eau} du trou de vidange. La pression à hauteur de cette extrémité est :

$$P = P_{atm} + \rho g h_{eau} \quad (48)$$

Dans cette expérience le débit volumique est de la forme :

$$Q_v = \frac{\pi D^4}{128 \mu} \frac{\rho g h_{eau}}{L} \quad (49)$$

L'expérience réalisée est schématisé ci-dessous :

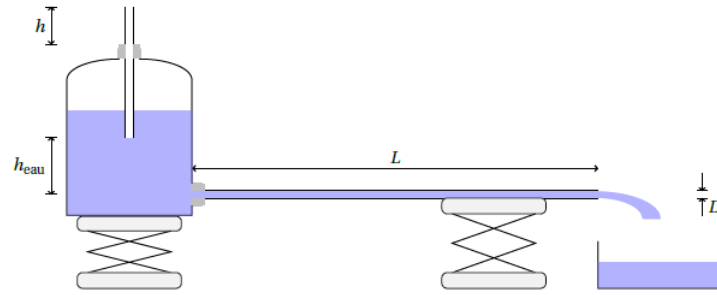


FIGURE 2 – Écoulement de poiseuille réalisé avec un vase de Mariotte. Cette figure est tiré du poly de Jérémy Ferrand.



Expérience de l'écoulement de poiseuille (stationnaire) à l'aide d'un vase de Mariotte.



⊗ 2 min

Pour différente hauteur h , nous mesurons le temps t pour d'une masse d'eau fixée ($m = 50\text{g}$) s'écoule. Nous en déduisons alors le débit volumique pour cette hauteur h grâce à la relation : $Q_v = \frac{m}{\rho t}$. Nous répétons cette expérience pour différente hauteur puis nous effectuons une régression affine afin de remonter à la viscosité. (page 441 à 453 du Jolidon).

Nota Bene : Pour obtenir un régime permanent, il faut attendre une dizaine de seconde avant d'effectuer une mesure (atteint quand le capillaire vertical est vide). Nous mesurons ici uniquement la hauteur h et non h_{eau} . Ceci ne rajoute qu'une constante qui apparaîtra dans l'ordonnée à l'origine du fit. C'est pour cette raison qu'il est choisit affine et non linéaire.

Nota Bene : Il faut déposer de la suie à l'extrémité du capillaire vertical afin d'éviter un effet théière.

Conclusion

Répéter les phrases précédées de "♥ À retenir :" ainsi que les formules encadrées.

Annexe

Remarque très importante sur l'importance de la notion d'incompressibilité pour pouvoir écrire NS :

Le bilan de quantité de mouvement général sur une particule Eulérienne de fluide Newtonien donne :

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\overrightarrow{\text{grad}}(P) + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \cdot \vec{x}_i + \rho \vec{f} \quad (50)$$

où $\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \cdot \vec{x}_i$ représente la part anisotrope du tenseur des contraintes. et $\vec{f}$ sont les forces extérieures volumiques. On peut le réécrire :

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\overrightarrow{\text{grad}}(P) + \eta \overrightarrow{\Delta} \vec{v} + (\eta + \mu) \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div} \vec{v}) + \rho \vec{f} \quad (51)$$

où μ est le coefficient de seconde viscosité. De sorte que (loi de Hooke) :

$$\sigma_{ij} = 2\eta \epsilon_{ij} + \mu \epsilon_{kk} \quad (52)$$

avec ϵ , le tenseur déplacement.

Dans le cas d'un fluide incompressible, et où $\text{div}(\vec{v}) = 0$, on retrouve bien notre chère NS³.

3. Merci beaucoup à Hervé pour cette démonstration pas piquée des hannetons.