

# LP09 - Modèle de l'écoulement parfait d'un fluide

June 12, 2019

## Contents

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>1</b> | <b>Notion d'écoulement parfait</b>               | <b>2</b>  |
| 1.1      | Fluide et écoulement parfaits . . . . .          | 2         |
| 1.2      | Domaine de validité . . . . .                    | 3         |
| 1.3      | Équation d'Euler . . . . .                       | 4         |
| 1.3.1    | Effet Coanda . . . . .                           | 5         |
| 1.3.2    | Analyse des symétries : . . . . .                | 5         |
| 1.3.3    | Équation d'Euler : . . . . .                     | 6         |
| <b>2</b> | <b>Théorème de Bernoulli</b>                     | <b>7</b>  |
| 2.1      | Démonstration . . . . .                          | 7         |
| 2.1.1    | Énoncé : . . . . .                               | 7         |
| 2.1.2    | Preuve : . . . . .                               | 7         |
| 2.2      | Interprétation énergétique . . . . .             | 8         |
| 2.2.1    | Effet Venturi . . . . .                          | 8         |
| <b>3</b> | <b>Applications</b>                              | <b>10</b> |
| 3.1      | Tube de Pitot . . . . .                          | 10        |
| 3.2      | Effet Magnus . . . . .                           | 11        |
| <b>4</b> | <b>Conclusion</b>                                | <b>12</b> |
| <b>5</b> | <b>Annexe</b>                                    | <b>13</b> |
| 5.1      | Quelque questions possibles . . . . .            | 13        |
| 5.2      | Sur l'isentropie en écoulement parfait . . . . . | 13        |
| 5.3      | Théorème de Bernoulli énergétique . . . . .      | 15        |
| 5.4      | Théorème de Kelvin . . . . .                     | 15        |

- 2017 : La multiplication des expériences illustrant le théorème de Bernoulli n'est pas souhaitable, surtout si celles-ci ne sont pas correctement explicitées.
- 2016 : Les limites de ce modèle sont souvent méconnues.
- 2015 : Le jury invite les candidats à réfléchir davantage à l'interprétation de la portance et de l'effet Magnus. Les exemples cités doivent être correctement traités, une présentation superficielle de ceux-ci n'étant pas satisfaisante.  
Jusqu'en 2013, le titre était : Modèle de l'écoulement parfait d'un fluide ; validité. Relation de Bernoulli ; limites et applications.

- 2011, 2012, 2013, 2014 : La notion de viscosité peut être supposée acquise. 2010 : Il est difficile de bien dégager la physique du modèle de l'écoulement parfait et de ses limites sans faire appel à la notion de viscosité que l'on pourra supposer connue. Les conditions aux limites imposées à un fluide s'écoulant autour d'un obstacle solide doivent être justifiées. L'interprétation énergétique de la relation de Bernoulli est très mal connue.
- 2009 : Il est difficile de bien dégager la physique du modèle de l'écoulement parfait et de ses limites sans faire appel à la notion de viscosité. Les conditions aux limites imposées à un fluide s'écoulant autour d'un obstacle solide doivent être justifiées. L'interprétation énergétique de la relation de Bernoulli est très mal connue.
- 2005 : La différence entre écoulement incompressible et fluide incompressible est souvent ignorée, de même qu'entre écoulement parfait et fluide parfait.
- 2003 : L'équation d'Euler ne constitue pas le sujet central de la leçon et ne doit pas prendre une place excessive. Diverses expressions du théorème de Bernoulli peuvent être présentées. Il est plus intéressant de présenter des illustrations concrètes ou des applications pratiques que d'exposer une longue suite de formulations.

Bon courage !

## Références :

- J'intègre PC\*, Sanz l'essentiel du cours.
- Physique expérimentale, Jolidon les expériences fort bien décrites
- Introduction à la dynamique des fluides, Rieutord pour quelques précisions

## Niveau : L3

### Prérequis :

- Cinématique des fluides
- Notion de viscosité
- écoulements incompressibles
- Equation de Navier Stokes

## Introduction

Dans le cours précédent, nous avons vu l'équation de Navier-Stokes pour un écoulement incompressible, qui est une équation non linéaire aux solutions parfois compliquées.

Dans ce cours, nous allons développer le modèle de l'écoulement parfait qui simplifiera cette équation et permettra d'alléger son traitement, avant d'établir un théorème fondamental avec lequel on traitera deux exemples d'application.

## 1 Notion d'écoulement parfait

### 1.1 Fluide et écoulement parfaits

Pour commencer, nous allons définir ce qu'est un fluide parfait :

### Définition : fluide parfait

Un fluide parfait est un fluide dans lequel il n'existe pas de phénomènes de dissipation (impliquant qu'il ne conduit pas de chaleur); on considère notamment  $\eta = 0$  et  $D_{th} = 0$ . Dans ces fluides, la contrainte se résume à la seule contrainte de pression.

En pratique, la majorité des fluides ne le sont pas (il n'y a que l'hélium IV superfluide en dessous de  $1.7 K$  qu'on considère comme parfait), mais peuvent présenter le même comportement qu'un fluide parfait : on parle alors d'**écoulement parfait** :

### Définition : écoulement parfait

C'est un écoulement qui peut être raisonnablement approximé par celui d'un fluide parfait.

En particulier, il faut que les effets diffusifs décrits par le terme  $\eta\Delta$  soit négligeable devant les autres termes : on va en voir les conditions.

Il faut aussi que les transformations que subissent le fluide puissent être supposées isentropiques<sup>1</sup>.

## 1.2 Domaine de validité

On appelle  $\tau_V$  le temps caractéristique des phénomènes de dissipation visqueux,  $\tau_C$  le temps caractéristique des phénomènes de convection et enfin  $\tau_{th}$  le temps caractéristique de diffusion thermique.

Pour cela, soient  $V$  une vitesse typique,  $L$  une taille typique dans l'écoulement,  $D_{th} = \frac{\lambda}{\rho c}$  le coefficient de diffusion thermique et  $\eta$  la viscosité dynamique du fluide et enfin  $\rho$  sa masse volumique :

Par une analyse dimensionnelle bien effectuée, on trouve :

$$\tau_C = \frac{V}{L} \quad \tau_V = \rho \frac{L^2}{\eta} \quad \tau_{th} = \frac{L^2}{D_{th}} \quad (1)$$

Pour que l'écoulement soit parfait, il faut que  $\tau_C \ll \tau_V$  et  $\tau_C \ll \tau_{th}$ .

Pour comparer ces termes, on définit souvent les nombres adimensionnés :

- **Nombre de Reynolds** :  $Re = \frac{\tau_V}{\tau_C} = \frac{\rho V L}{\eta}$

- **Nombre de Péclet** :  $Pe_\theta = \frac{\tau_{th}}{\tau_C} = \frac{LV}{D_{th}}$

Les hypothèses précédentes se résument donc à :

$$\boxed{\tau_C \ll \tau_V, \tau_{th}} \quad \iff \quad \boxed{Re \gg 1, Pe_\theta \gg 1} \quad (2)$$

### Ordres de grandeur<sup>2</sup> :

<sup>1</sup>On peut voir cela comme le fait que les sources d'irréversibilité sont souvent reliées à un échange d'énergie avec l'extérieur. Voir le livre de M. Rieutord pages 17, 18 et 19 pour en savoir plus.

<sup>2</sup> D'autres :  $\rho_{air} \approx 1,2 kg.m^{-3}$      $\eta_{air} \approx 1,8.10^{-5} Pa.s$      $D_{air} \approx 20.10^{-6} m^2/s$   
 Sèche-cheveux :  $U \approx 20 L \approx 0,3 m \implies Re \approx 10^5$      $Pe \approx 10^5$      $\delta \approx 10^{-3}$   
 Aile d'avion :  $U \approx 200 L \approx 1.5 m \implies Re \approx 10^7$      $Pe \approx 10^7$      $\delta \approx 10^{-4}$

- jet d'eau sortant d'un robinet :  $U \approx 1 \text{ m/s}$ ,  $L \approx 1 \text{ m}$   $\begin{cases} Re \approx 10^6 \gg 1, \\ Pe_\theta \approx 10^7 \gg 1 \end{cases}$
- voiture  $U \approx 100 \text{ km/h} \approx 102 \text{ m/s}$ ,  $L \approx 1 \text{ m}$   $\begin{cases} Re \approx 10^7 \gg 1, \\ Pe_\theta \approx 10^7 \gg 1 \end{cases}$

Ces deux écoulements peuvent donc être traités comme des écoulements de fluide parfait.

**Attention** toutefois, proche des parois ce modèle n'est pas valable car la viscosité n'est plus négligeable. On parle alors de couche limite. L'épaisseur caractéristique<sup>3</sup> de la couche est donnée par :

$$\delta \approx \frac{L}{\sqrt{Re}} \quad (3)$$

### 1.3 Équation d'Euler

Rappelons l'équation de Navier Stokes pour un fluide de masse volumique et viscosité constantes<sup>4</sup> :

$$\rho \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v} \right) = -\overrightarrow{\text{grad}}(P) + \eta \overrightarrow{\Delta} \vec{v} + \vec{f} \quad (4)$$

$\vec{f}$  désigne ici une force extérieure volumique<sup>5</sup>.

D'après ce que l'on a dit précédemment, on peut comparer les termes convectifs et visqueux de cette équation en utilisant le nombre de Reynolds :

$$Re = \frac{\tau_V}{\tau_C} = \frac{\rho V L}{\eta} = \frac{\| \rho (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v} \|}{\| \eta \overrightarrow{\Delta} \vec{v} \|} \quad (5)$$

Dans le cas de l'écoulement parfait où  $Re \gg 1$ , on obtient donc que l'on peut négliger le terme visqueux devant le terme convectif<sup>6</sup>. On obtient donc **l'équation d'Euler (Pour un écoulement parfait incompressible)** :

 **Équation d'Euler :**

$$\rho \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v} \right) = -\overrightarrow{\text{grad}}(P) + \vec{f} \quad (6)$$

 **Conditions aux limites :**

Pour un fluide parfait en contact avec un solide, **le fluide ne peut pas pénétrer dans le solide.**

Cette condition impose la relation suivante :

$$\overrightarrow{v_{\text{fluide}}} \cdot \vec{n} = -\overrightarrow{v_{\text{solide}}} \cdot \vec{n} \quad (7)$$

<sup>3</sup>Démo en LP08

<sup>4</sup>(Voir l'annexe de la LP08 et aussi le Rieutord p19 à 23) Pour un fluide compressible, on applique la loi de Hooke qui fait sortir simplement un terme en plus dans le membre de droite :  $(\eta + \mu) \text{div}(\vec{v})$  où  $\mu$  est la seconde viscosité.

<sup>5</sup>Dans la suite, on la rentrera dans la pression pour peu qu'elle soit conservative.

<sup>6</sup>En toute rigueur, il faudrait adimensionner (NS) pour pouvoir justifier cette hypothèse ce qui est fait en LP08. Je ne le recopie pas ici. A voir, si le temps le permet.

avec  $\vec{n}$  le vecteur normal à l'interface. Pour un contact entre deux fluides parfaits, la relation est identique.<sup>a</sup>

<sup>a</sup>En dehors de la couche limite et dans une zone simplement connexe (sans obstacle), on peut *a priori* toujours supposer l'écoulement parfait

Attention, Ce qu'on développe dans cette leçon n'est valable qu'en régime laminaire donc haut  $Re$  mais pas trop quand même pour ne pas être en régime turbulent (où les lignes de vitesse ne sont plus stationnaires ...)

### 1.3.1 Effet Coanda

#### **Expérience :**

Jolidon p419

Allumer un sèche cheveux. Incliner le jet d'environ  $15^\circ$ . Placer une balle de ping-pong dans le jet. Normalement, il y a une position pour laquelle la balle reste immobile.

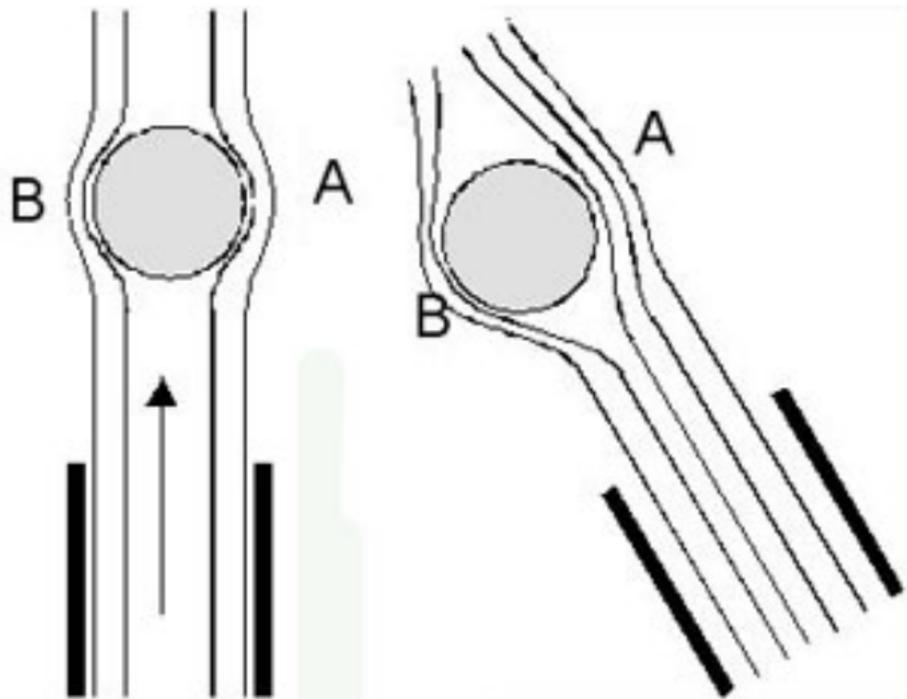


Figure 1: Schéma d'une balle de ping pong dans un fluide (l'air) produit par un sèche-cheveux.

Bon, on va essayer de comprendre cette expérience. La balle est de rayon  $R$ , la vitesse à l'infini est  $U$ .

### 1.3.2 Analyse des symétries :

- Comme le problème est invariant par rotations autour de l'axe sèche-cheveux / sphère, on peut considérer le problème en 2D (plan du tableau/feuille).
- On place un repère cylindrique dont l'origine est le centre de la sphère. Si nous reprenons les figures 1, la vitesse est colinéaire à  $+\vec{e}_\theta$  pour le fluide passant à droite (point A) et selon  $-\vec{e}_\theta$  à gauche (point B). Donc :  $\vec{v}(r, \theta)$

- La vitesse est contrainte par la présence de la balle et nous la considérons donc suivant  $\pm \vec{e}_\theta$

Restreignons notre problème à l'écoulement à droite ( $v_D$ ) pour commencer. Nous généralisons ensuite le problème en donnant aussi l'écoulement à gauche ( $v_G$ ). Nous avons :

$$\vec{v}_D = v_D(r, \theta) \vec{e}_\theta \quad (8)$$

Avec l'incompressibilité de l'écoulement:  $div(\vec{v}_D) = 0$  qui est une **condition locale** donne (des deux cotés) :

$$div(\vec{v}_D) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} v_D = 0 \quad (9)$$

Donc :

$$\boxed{\vec{v}_D = v_D(r) \vec{e}_\theta} \quad (10)$$

### 1.3.3 Équation d'Euler :

Le terme non linéaire<sup>7</sup> devient :

$$(\vec{v}_D \cdot \overrightarrow{grad}) \vec{v}_D = v_D(r) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} [v_D(r) \vec{e}_\theta] = v_D^2(r) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} [\vec{e}_\theta] = -\frac{v_D^2}{r} \vec{e}_r \quad (13)$$

Donc, l'équation d'Euler s'écrit en régime permanent (**On néglige le poids de la balle sur l'écoulement**) :

$$\rho(\vec{v}_D \cdot \overrightarrow{grad}) \vec{v}_D = -\overrightarrow{grad}(P) \quad (14)$$

On projette avantageusement sur  $\vec{e}_r$  :

$$-\rho \frac{v_D^2}{r} = -\frac{\partial P}{\partial r} \implies \frac{\partial P}{\partial r}(R) = \rho \frac{v_D^2}{R} \geq 0 \quad (15)$$

où  $R$  est le rayon de la balle. On voit que le fluide qui s'écoule à droite subit donc une pression qui augmente avec  $r$ . De la même façon, pour le fluide à gauche, on aurait exactement les mêmes calculs avec 2 "-" pour les vitesses qui s'annulent. Nous obtenons :

$$\frac{\partial P}{\partial r}(R) = \rho \frac{v_G^2}{R} \leq 0 \quad (16)$$

On a donc la pression qui augmente lorsque  $r$  augmente à gauche.

L'action du fluide passant à droite et à gauche vient donc pousser la balle vers le centre. On déduit donc que la position d'équilibre stable de la balle est donc la balle au centre du jet : c'est l'effet Coandă<sup>8</sup>.

<sup>7</sup>Le moment technique est d'avoir conscience que l'on peut facilement repasser en coordonnées cartésiennes et montrer que :

$$\frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \theta} = -\vec{e}_r \quad (11)$$

En effet, par rapport au repère carthésien centré sur le point où les vecteurs unitaires sont définis :

$$\vec{e}_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix} \quad \vec{e}_r = \begin{pmatrix} \sin(\theta) \\ -\cos(\theta) \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad := \quad \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta} \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix} = -\vec{e}_r \quad (12)$$

<sup>8</sup>L'existence de ces forces es de manière générale liée au rayon de courbure des lignes de champ de vitesse du fluide en régime permanent et à la conservation de la quantité de mouvement.

## 2 Théorème de Bernoulli

9

### 2.1 Démonstration

#### 2.1.1 Énoncé :

 **Conditions aux limites :**

Soit un écoulement parfait permanent, incompressible soumis à une force volumique conservative de la forme  $\overrightarrow{\rho grad}(\phi)$ . Soient  $A$  et  $B$  deux points sur une même ligne de courant. On a :

$$\left[ \frac{1}{2} \rho v^2 + P + \rho \phi \right]_A^B = 0 \quad (17)$$

#### 2.1.2 Preuve :

Pour un écoulement parfait permanent<sup>10</sup>, incompressible soumis à une force volumique conservative  $\overrightarrow{grad}(\phi)$ . On a l'équation d'Euler qui devient :

$$\rho \left( \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{grad} \right) \overrightarrow{v} = -\overrightarrow{grad}(P) - \overrightarrow{\rho grad}(\phi) \quad (18)$$

Or, on a l'identité vectorielle :

$$\left( \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{grad} \right) \overrightarrow{v} = \overrightarrow{rot}(\overrightarrow{v}) \wedge \overrightarrow{v} + \overrightarrow{grad} \left( \frac{\overrightarrow{v}^2}{2} \right) \quad (19)$$

Intégrons sur une ligne de courant la relation précédente :  $\overrightarrow{dl}$  désigne l'abscisse curviligne. En particulier, on a toujours que  $\overrightarrow{dl}$  est colinéaire à  $\overrightarrow{v}$  par définition :

$$\int_A^B \overrightarrow{grad} \left( \rho \frac{\overrightarrow{v}^2}{2} + P + \rho \phi \right) \cdot \overrightarrow{dl} = \int_A^B \left\{ \underbrace{\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{v}) \wedge \overrightarrow{v}}_{\perp \overrightarrow{v}} \right\} \cdot \underbrace{\overrightarrow{dl}}_{// \overrightarrow{v}} = 0 \quad (20)$$

Le membre de gauche est par définition égale :

$$\int_A^B d \left( \rho \frac{\overrightarrow{v}^2}{2} + P + \rho \phi \right) = 0 \quad (21)$$

donc :

$$\left[ \frac{1}{2} \rho v^2 + P + \rho \phi \right]_A^B = 0 \quad (22)$$

**Le théorème de Bernoulli est vrai dans tout le fluide dans le cas d'un fluide irrotationnel.**

<sup>9</sup>La forme la plus générale du théorème de Bernoulli ne suppose pas que le fluide est incompressible et l'expression est alors :  $\frac{1}{2} \overrightarrow{v}^2 + h + \phi = Cte$  où  $h$  est l'enthalpie.

<sup>10</sup>En fait, si on a un écoulement parfait irrotationnel, on n'a pas besoin que l'écoulement soit stationnaire. Le potentiel dont dérive alors la vitesse voit sa dérivée temporelle se rajouter dans le crochet dans le théorème.



## Sens Physique

Sur une ligne de courant (ou dans tout le volume) d'un écoulement parfait, stationnaire, incompressible et soumis au poids (et irrotationnel), une augmentation de vitesse entraîne une diminution de pression au point considéré.

## 2.2 Interprétation énergétique

En réalité, le fait que la charge se conserve au cours de l'écoulement traduit le fait que l'énergie mécanique se conserve (ce qui est logique puisqu'on a négligé tout effet de dissipation...). En effet, en multipliant par  $\rho$ , on obtient

- $\frac{\rho}{2}v^2$  l'énergie cinétique volumique<sup>11</sup> ;
- $\rho\phi = \rho gz$ , l'énergie potentielle de pesanteur par exemple ;
- $P = \rho h$ , avec  $h$  l'enthalpie volumique (relation valable si isentropique)<sup>12</sup>

Nous pouvons alors faire une application directe de ce théorème : l'effet Venturi.

### 2.2.1 Effet Venturi

Jolidon, p.416 ; Sanz PC\*, p.361 ; GHP, p.206.

On considère encore un fluide en écoulement parfait, stationnaire et incompressible

Il évolue dans une conduite de section  $S$  présentant un étranglement de section  $s$ . On ne pourra pas considérer l'écoulement irrotationnel, on va donc appliquer le théorème de Bernoulli à une ligne de courant, ici l'axe (de symétrie) neutre de la conduite. Sur cet axe, on repère par  $A$ ,  $B$  et  $C$  les points sur la ligne neutre en-dessous des tubes de section  $s_0 \ll s$ , et  $A'$ ,  $B'$  et  $C'$  les points à l'interface eau/air de chaque tube. Voir figure (2).

On peut utiliser le tube P106.28

$$\begin{cases} P_A = P_0 + \rho gh_A \\ P_B = P_0 + \rho gh_B \\ P_C = P_0 + \rho gh_C \end{cases} \quad (23)$$

La conservation de la masse impose  $\rho S v_A = \rho s v_B = \rho s v_C$  ( $S$  et  $s$  sont les sections des tubes). Aussi,  $v_A = v_C = v$  et comme  $S \gg s$ , on a :  $v \ll v_B$ .

<sup>11</sup> On parle de pression dynamique pour désigner le terme  $\rho v^2$ . Si dans un écoulement irrotationnel, la vitesse augmente en un point alors la pression en ce point diminue comme le théorème de Bernoulli le démontre. C'est ce qui explique la cavitation. Si les hélices d'un bateau tournent suffisamment vite, alors la pression autour de ces hélices diminue jusqu'à dépasser la pression de vapeur saturante de l'eau : des bulles de vapeur se forment.

<sup>12</sup>L'enthalpie  $H(S, P, N)$  est obtenue à partir de l'énergie interne  $U(S, V, N)$  par une transformation de Legendre. Dans le cas où le nombre de particules de varie pas, la différentiel s'écrit :  $dH = \left. \frac{\partial H}{\partial S} \right|_{P, N} dS + \left. \frac{\partial H}{\partial P} \right|_{S, N} dP$ . Si nous prenons des grandeurs massique (ce qui revient à diviser chaque terme par m), nous obtenons :  $dh = T ds + \frac{1}{\rho} dP$ . Finalement nous retrouvons bien :  $dh = \frac{1}{\rho} dP$  si l'entropie ne varie pas.

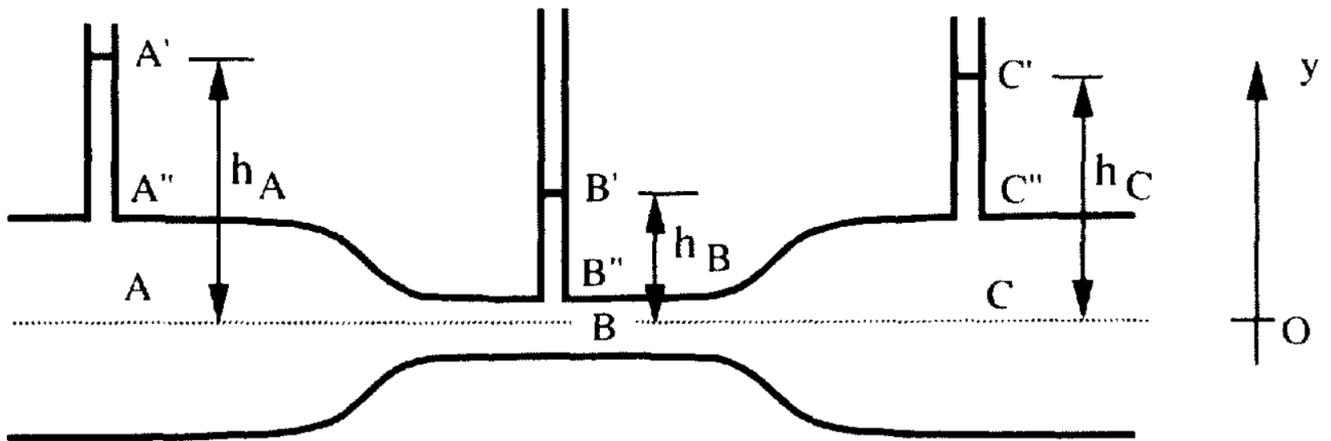


Figure 2: Schéma pour l'effet Venturi

L'application du théorème de Bernoulli sur la ligne de courant horizontale passant par les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  implique :

$$\frac{v^2}{2} + \frac{P_A}{\rho} = \frac{v_B^2}{2} + \frac{P_B}{\rho} = \frac{v^2}{2} + \frac{P_C}{\rho} \quad (24)$$

Les forces conservatives se résument à celle de pesanteur dans notre problème. La ligne de courant choisie est à hauteur fixée donc le terme est identique en  $A$ ,  $B$  et  $C$ ; ce qui explique qu'il n'intervienne pas dans le bilan ci-dessus.

En injectant les expressions des pressions aux points  $A$ ,  $B$  et  $C$  :

$$\frac{v^2}{2} + gh_A = \frac{v_B^2}{2} + gh_B = \frac{v^2}{2} + gh_C \quad (25)$$

Donc, comme  $v_B \ll v$ , on a :  $h_B \gg h_A$

Le modèle prédit que  $P_A = P_C$  mais en pratique on observe que  $P_C < P_A$  ce qui montre bien les limites de notre modèle.

En fait, on a une « perte de charge » due à la **zone d'eau morte** (voir figure (3)) dessinée sur la figure 2 qui vient du fait que le liquide ne peut pas suivre exactement la conduite juste après l'étranglement, ce qui est dû et à la viscosité et aux turbulences : de l'énergie y est dissipée.

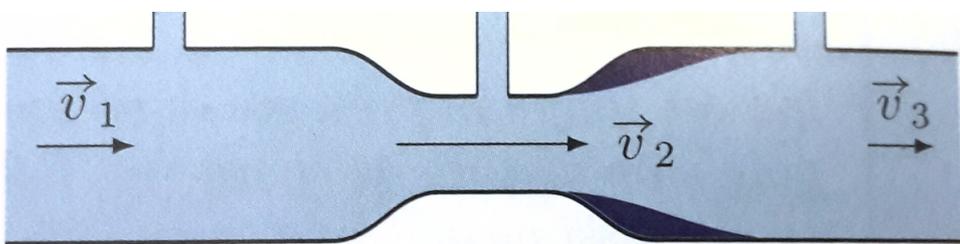


Figure 3: Zone de l'eau morte

### **Expérience :**

Il serait intéressant de monter cette manip, mais je n'ai pas pu trouver de ref. Il paraît qu'un tuyau existe.

## 3 Application : le tube de Pitot

Sanz PC\*, p.364.

C'est un dispositif de mesure de vitesse utilisé notamment dans les avions ou dans les bateaux. Comme d'habitude, on considère un écoulement parfait, stationnaire, incompressible qui arrive sur le tube à la vitesse  $\vec{v} = v_0 \vec{e}_x$

On considère deux lignes de courant particulières où on fait les mesures :

- $A - - - - A_\infty$  :
  - $A$  est à l'entrée d'un petit tube de faible section (typiquement  $0.5 \text{ mm}^2$ ) l'air atteint rapidement un état d'équilibre et est immobile en ce point., on considère que la vitesse est nulle. La pression vaut  $P_A$  Que l'on sait mesurer au moyen du petit tube qui est relié à un manomètre.
  - En  $A_\infty$  est très loin de l'obstacle, la vitesse est celle à l'infini ( que l'on veut mesurer) et la pression est la pression atmosphérique  $P_0$
- $B - - - - B_\infty$ 
  - $B$  est à la verticale d'un second tuyau; On va négliger la différence d'altitude entre la sortie du tuyau et  $B$ . On y mesure alors directement la pression. En ce point, la vitesse vaut  $v_B = v_0$ . Cela reste valable dans le cas d'une petite couche limite.
  - En  $B_\infty$  est très loin de l'obstacle, la vitesse est celle à l'infini ( que l'on veut mesurer) et la pression est la pression atmosphérique  $P_0$

Le théorème de Bernoulli nous donne :

$$\rho \frac{v_0^2}{2} + P_0 = 0 + P_A \quad \rho \frac{v_0^2}{2} + P_0 = \rho \frac{v_0^2}{2} + P_B \iff P_B = P_0 \quad (26)$$

Ainsi, par simple différence des deux équations précédentes, on obtient la relation :

$$\boxed{v_0 = \sqrt{\frac{2(P_A - P_B)}{\rho}}} \quad (27)$$

C'est un outil de mesure utilisé dans les avions par exemple. Dans la pratique, on utilise plusieurs (6 d'après les constructeurs) trous de type  $B$  pour mesurer la pression statique  $P_0$ . On moyenne alors la valeur

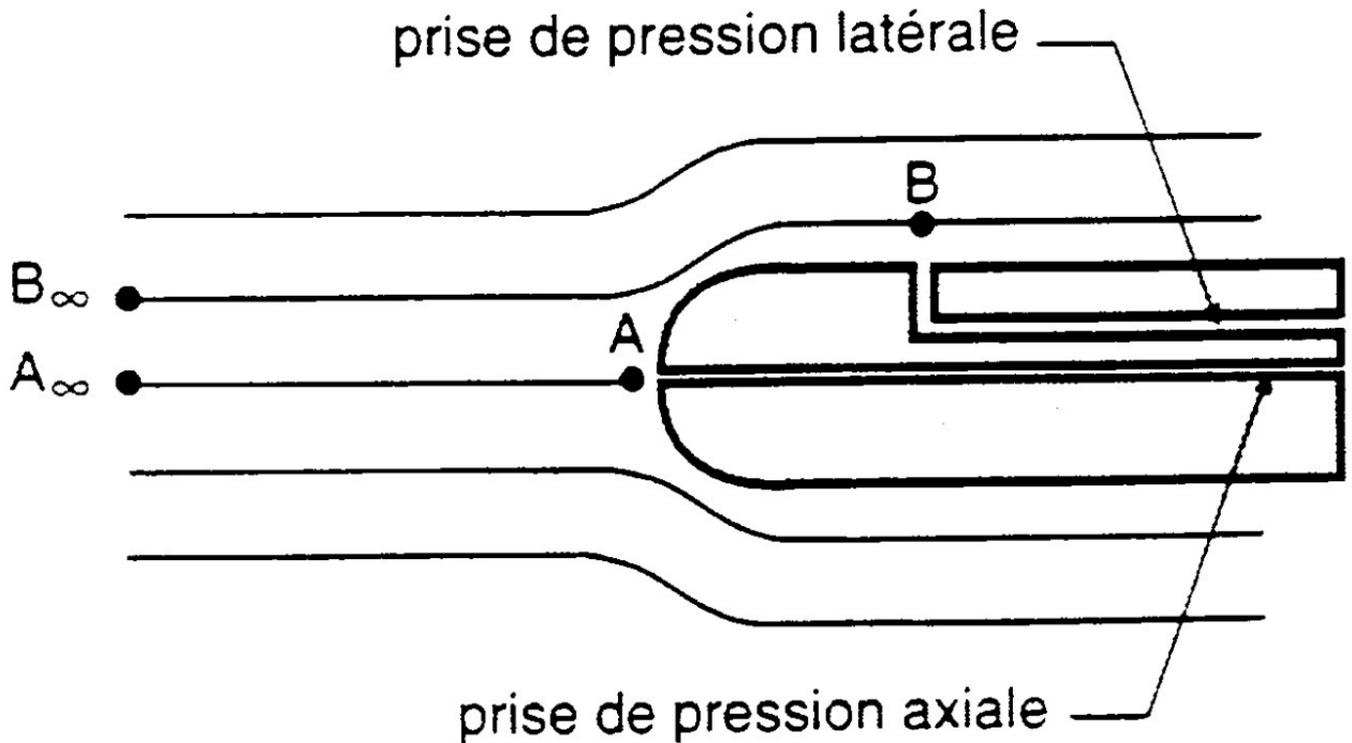


Figure 4: Tube de Pitot

## 4 Conclusion

Nous avons donc vu qu'un écoulement à grand nombre de Reynolds<sup>13</sup> permettait de considérer un écoulement comme étant celui d'un fluide parfait tant que l'on était loin de la couche limite, ce qui permet de simplifier l'équation de Navier-Stokes et de développer un outil mathématique allégeant le traitement de systèmes physiques dont l'utilisation repose sur les principes de l'écoulement parfait.

Dans une prochaine leçon, on pourra s'intéresser à comment faire la jonction entre l'écoulement parfait et celui de la couche limite; En particulier, on verra que ces deux ne sont pas indépendants.

## 5 Annexe

### 5.1 Quelques questions possibles

- Un écoulement turbulent est-il toujours parfait ?  
Oui car il y a invariance d'échelle. C'est vrai tant qu'on ne regarde pas à l'échelle des plus petits tourbillons existant (de taille  $\delta$ )
- Comment on trouve  $\delta = \sqrt{\frac{L}{Re}}$  ?  
On fait l'ordre de grandeur de la LP08. Ou alors on est malin et on remarque que le

<sup>13</sup> Les études à haut Reynolds, comme le décollement de la couche limite derrière une balle de golf, est très importante en aéronautique pour limiter les effets de traînée par exemple, et l'effet Magnus a déjà utilisé sur des bateaux pour créer des turbovoiles permettant d'économiser jusqu'à 35% d'énergie à un navire.

coefficient de diffusion visqueuse est  $\nu = \eta/\rho$ . Du coup par homogénéité et le théorème pi :  $\delta^2 = \frac{\nu}{v} = \frac{L}{Re}$

- Il se passe quand dans Bernoulli si on garde l'irrotationnalité mais qu'on enlève la stationnarité ?  
 $\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{0}$  donc on peut trouver  $\phi$  tel que  $\overrightarrow{v} = -\overrightarrow{grad}(\phi)$ . Dès lors, on peut donc l'inclure dans le *grad*.
- Quelle hypothèse fait-on sur les tubes verticaux de l'effet Venturi ?  
 Il faut que leur section soit très petite devant celle des conduites principales, pour éviter de perturber le mouvement.
- Quelle est la limite de  $div(\overrightarrow{v}) = 0$  ?  
 En fait pour être incompressible, il faut que la compressibilité isochore soit  $\xi_V = -\frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial P} = 0$  Cela revient à avoir une condition sur la vitesse du fluide par rapport à la vitesse des ondes sonores dans le fluide :  $v \ll c \iff incompressible$  C'est le critère de Mach.
- Que mesure la sonde Pitot ?  
 Elle mesure la vitesse de l'avion par rapport au vent. Comment on fait pour avoir la vitesse du vent alors ? Je sais pas.

## 5.2 Sur l'isentropie en écoulement parfait

Preuve pour le fluide incompressible :

Le bilan d'énergie volumique  $e$  sur une particule fluide donne :

$$\rho \frac{De}{Dt} = -div(\overrightarrow{j_Q}) - P.div(\overrightarrow{v}) + Q \quad (28)$$

avec  $\overrightarrow{j_Q}$  la densité de flux thermique et  $Q$  le transfert thermique. Comme il n'y a pas de conduction thermique  $\overrightarrow{j_Q} = 0$ , en supposant  $Q = 0$ , l'équation précédente devient :

$$\rho \frac{De}{Dt} = -P.div(\overrightarrow{v}) \underbrace{=}_{incompressible} 0 \quad (29)$$

Or,  $de = TdS'PdV = TdS + Pd\rho/\rho^2$  où  $V$  est le volume massique. Par ailleurs, la conservation de la masse implique :

$$\frac{D\rho}{Dt} = div(\rho\overrightarrow{v}) \iff \frac{\partial\rho}{\partial t} = \rho div(\overrightarrow{v}) \underbrace{=}_{incompressible} 0 \iff d\rho = \rho div(\overrightarrow{v})dt = 0 \quad (30)$$

Donc :

$$\frac{De}{Dt} = 0 = T \frac{DS}{Dt} \quad (31)$$

### 5.3 Théorème de Bernoulli énergétique

$$W_{\text{ext}} = \Delta E_c + \Delta E_{\text{pp}}$$

$$-P_B V - (-P_A V) = \frac{1}{2} m (v_B^2 - v_A^2) + mg(z_B - z_A)$$

$$P_A - P_B = \frac{1}{2} \rho (v_B^2 - v_A^2) + \rho g(z_B - z_A)$$

$$\Leftrightarrow P_A + \rho \frac{v_A^2}{2} + \rho g z_A = P_B + \rho \frac{v_B^2}{2} + \rho g z_B$$

On retrouve Bernoulli

- $\rho$  : entalpie volumique
- $\rho \frac{v^2}{2}$  : énergie cinétique volumique
- $\rho g z$  : énergie potentielle de pesanteur volumique

### 5.4 Théorème de Kelvin

Rieutord p74 p75

#### Théorème de Kelvin :

On considère un écoulement parfait, incompressible et dont les forces volumiques peuvent s'écrire à l'aide de potentiels. Imaginons un contour fermé  $\mathcal{C}$  dans une portion simplement connexe de fluide, dont chaque point se déplace à la vitesse du fluide en ce point ; ce contour bouge au cours du temps. Définissons la circulation  $\Gamma$  autour de ce contour fermé  $\mathcal{C}(t)$  :

$$\Gamma = \oint_{\mathcal{C}} \vec{v} \cdot d\vec{l} \quad (32)$$

la circulation  $\Gamma$  est conservée au cours du temps :

$$\boxed{\frac{d\Gamma}{dt} = 0} \quad (33)$$

Or, Pour n'importe quelle surface  $\mathcal{S}$  s'appuyant sur  $\mathcal{C}$  :

$$\Gamma = \oint_{\mathcal{C}} \vec{v} \cdot d\vec{l} = \iint_{\mathcal{S}} \underbrace{\text{rot}(\vec{v})}_{=\vec{w}} \cdot d\vec{S} \quad (34)$$

Comme c'est vrai pour toute surfaces  $\mathcal{S}$  ainsi définies, on a donc que **le vecteur vorticité  $\vec{w}$  est conservé**. Ainsi, si un écoulement est irrotationnel à un instant  $t$  alors il est irrotationnel pour tous les temps. C'est l'intérêt des écoulements potentiels.

Traduction : Sans frottements, pas de naissance de tourbillons dans le fluide ! Pour cela, on a besoin de bords et de viscosité (décollement de couche limite ...) Avoir confiance que dans le cas d'un obstacle, ce théorème ne tient plus proche de l'espace où l'espace occupée par le fluide n'est plus simplement connexe.

## 5.5 Effet Magnus

Rieutord p89 mais mieux pour Marc dans Cap prépa PC\*, ch.10.

Je ne conseille pas de le traiter en leçon. Il vaut tout de même le lire pour les questions. L'idée est :

On étudie ici l'écoulement stationnaire d'un liquide autour d'un cylindre tournant dans le sens horaire autour de son axe de révolution. Le fluide arrive de la gauche et possède une vitesse uniforme. et comme le cylindre entraîne le fluide par des effets de viscosité, on a  $v_B > v_A$ . et les lignes de courant prennent la forme décrite figure (5) :

On raisonne sur deux lignes de courant AA' et BB' :

On trouve :  $\boxed{P_{A'} > P_{B'}}$ .

Cette différence de pression amène à la création d'une force de portance, dirigée ici vers le haut : c'est la force Magnus (figure (6)).

On peut montrer qu'elle s'exprime de la manière suivante :

$$\vec{F}_M = L\rho v_\infty \oint_{\mathcal{C}} (\vec{v} \cdot d\vec{l}) \vec{e}_z \quad (35)$$

avec  $L$  la longueur du cylindre dans la direction perpendiculaire au plan du tableau.  $\mathcal{C}$  un contour fermé autour du cylindre et surtout  $\vec{e}_z = \vec{v}_\infty \wedge \vec{\Omega}$  où  $\vec{\Omega}$  est le vecteur rotation du solide. Selon le sens de la rotation du solide, la force change de sens !!! Ceux qui s'y connaissent en Tennis comprendront l'effet de coupé et de lift.

C'est en fait l'asymétrie de la circulation autour du cylindre (voir Rieutord) qui crée la force de Magnus, l'approche avec le théorème de Bernoulli reste une explication qualitative.

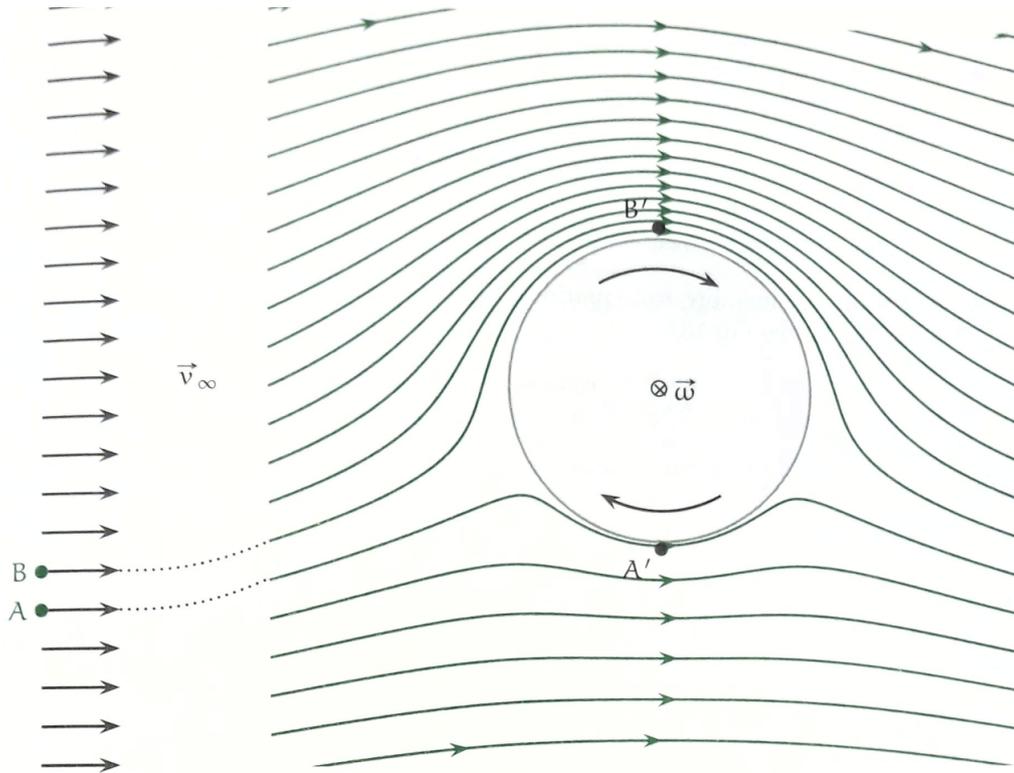


Figure 5: Champ de vitesse pour l'effet magnus

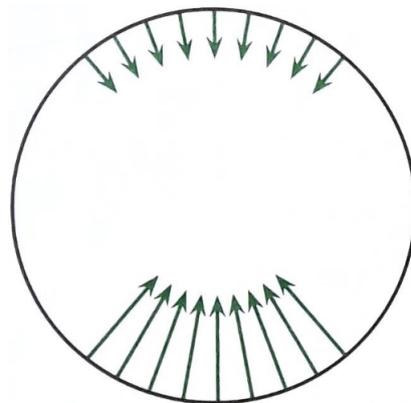


Figure 6: Effet Magnus : représentation du champ de contrainte en surface du solide