

# LP22 - Rétroaction et oscillations

May 25, 2019

## Contents

|          |                                                                        |           |
|----------|------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>Systèmes linéaires bouclés : Rétroaction</b>                        | <b>3</b>  |
| 1.1      | Diagrammes de Bloc : généralités . . . . .                             | 3         |
| 1.2      | 1 <sup>er</sup> ordre : amplificateur non inverseur . . . . .          | 5         |
| 1.2.1    | Propriétés : . . . . .                                                 | 5         |
| 1.2.2    | Expérience : . . . . .                                                 | 6         |
| 1.3      | 2 <sup>me</sup> ordre : Asservissent d'un moteur en position . . . . . | 7         |
| 1.3.1    | Schéma bloc : . . . . .                                                | 7         |
| 1.3.2    | Expérience : . . . . .                                                 | 8         |
| 1.3.3    | Calculs : . . . . .                                                    | 9         |
| <b>2</b> | <b>Conséquence de la rétroaction</b>                                   | <b>10</b> |
| 2.1      | Stabilité et critères : . . . . .                                      | 11        |
| 2.1.1    | Preuve mathématique : . . . . .                                        | 11        |
| 2.1.2    | Critère de Nyquist : . . . . .                                         | 12        |
| <b>3</b> | <b>Oscillateurs quasi-sinusoïdaux</b>                                  | <b>14</b> |
| 3.1      | Expérience : Oscillateur de Wien : . . . . .                           | 14        |
| 3.1.1    | Expérience : . . . . .                                                 | 14        |
| 3.2      | Condition de Baurkhausen : . . . . .                                   | 15        |
| <b>4</b> | <b>Conclusion :</b>                                                    | <b>16</b> |
| <b>5</b> | <b>Annexe :</b>                                                        | <b>18</b> |
| 5.1      | Une petite réécriture : . . . . .                                      | 18        |
| 5.2      | Critères pour qualifier l'asservissement : . . . . .                   | 18        |
| 5.2.1    | Précision : . . . . .                                                  | 18        |
| 5.2.2    | temps de réponse : . . . . .                                           | 18        |
| 5.3      | Théorème de Cauchy - preuve de Nynquist . . . . .                      | 19        |
| 5.3.1    | Théorème de Cauchy . . . . .                                           | 19        |
| 5.4      | Quelques questions auxquelles il faut savoir répondre : . . . . .      | 20        |

- 2015 : Dans le cas des oscillateurs auto-entretenus, les conditions d'apparition des oscillations et la limitation de leur amplitude doivent être discutées. Le jury souhaiterait que le terme de résonance soit dûment justifié sans oublier une discussion du facteur de qualité. Il n'est pas indispensable de se restreindre à l'électronique.
- Jusqu'en 2013, le titre était : Rétroaction et oscillations. Exemples en physique.

- 2013 : Le jury n'attend pas une présentation générale et abstraite de la notion de système bouclé. Jusqu'en 2012, le titre était : Systèmes bouclés. Applications
- 2011, 2012 : Le jury n'attend pas une présentation abstraite et très générale de la notion de système bouclé. Il estime indispensable de s'appuyer sur au moins un exemple concret et détaillé avec soin.
- 2010, 2009 :  
L'étude est clarifiée si elle s'appuie dès le départ sur un exemple concret. Les notions de système linéaire et de fonction de transfert doivent être précisément définies.
- 2007 : Il y a souvent confusion entre système bouclé et contre-réaction. La stabilité des systèmes bouclés est mal comprise. Le bouclage ne se limite pas uniquement à une fonction d'asservissement. Le lien entre les réponses temporelle et fréquentielle est un aspect important.
- 2005 : Cette leçon doit être préparée avec soin avant le concours. L'intérêt du bouclage ne doit pas apparaître uniquement comme une fonction d'asservissement assurant la stabilité d'un système. Notamment, un oscillateur auto-entretenu constitue un exemple de système électronique bouclé. Jusqu'en 2003, le titre était : Systèmes bouclés. Transmittance. Stabilité. Application aux asservissements.
- 2003 : Cette leçon ne doit pas se limiter à la manipulation (même si elle est menée avec virtuosité par un expert en théorie du signal) des transformées de Laplace. Le jury souhaite voir un exposé de niveau raisonnable mettant en évidence les effets du bouclage ainsi que l'existence de problèmes de stabilité. Cette leçon doit comporter des illustrations expérimentales. Le titre de cette leçon est modifié pour la session 2004 du concours. Il s'agit de laisser davantage de liberté dans le choix des applications.
- 1999 : On évitera les développements trop formels et on cherchera à illustrer la leçon par des exemples.
- 1998 : Les aspects formels de la leçon doivent rapidement céder le pas, au cours de l'exposé, à des exemples concrets. Les candidats doivent faire l'effort d'explicitier sur ceux-ci ce à quoi correspondent les signaux d'entrée et de sortie, le signal de rétroaction, le signal différentiel. Il est insuffisant de se cantonner à la présentation de montages amplificateurs à amplificateurs opérationnels. Il faut en particulier dégager les changements qualitatifs que peut introduire le bouclage, notamment l'apparition d'oscillations ou la stabilisation d'une chaîne directe instable.

## Références :

- Électronique, PSI. Les Nouveaux précis Bréal., P. Brenders                      Essentiel sur la partie oscillateur, utilisé également pour les temps de réponse.
- Électronique, Duffait                      pour l'asservissement en position et pour l'oscillateur à pont de Wien
- Automatique 2<sup>e</sup> édition , Y. Granjon

## Niveau : L2 (pour Marc) L3 (pour Thomas)

### Prérequis :

- transformée de Laplace
- fonction de transfert
- transformée de Fourier
- Diagramme de Bode et de Nyquist
- Résolutions d'équations différentielles linéaires homogènes.

Tout ceci est vu en PSI en première année de Prépa. La TF est vue un peu plus tard (PSI en maths) Bon courage !

## Introduction

La rétroaction est au coeur de notre quotidien. Lorsque nous souhaitons tenir un objet par exemple, on ajuste la force à appliquer sur objet pour ne pas l'écraser mais sans pour autant le laisser tomber. Il y a de la contre réaction par le biais de la mesure au toucher de la réponse de l'objet.

De manière similaire, prenons le cas du régulateur de vitesse dans la voiture : nous demandons à ce que la vitesse soit constante quelque soit le profil de la route sur laquelle nous roulons. Le moteur fournit une puissance qui va se traduire par une vitesse de déplacement de la voiture. L'ensemble des processus intervenant entre la puissance injectée et la vitesse final forme **la chaîne de transmission directe**.

À l'aide d'un capteur de vitesse, (tachymètre) la vitesse des roue est mesurée et une rétroaction ajuste la puissance développée par le moteur en conséquences. **C'est la chaîne de retour, de rétroaction.**

Nous nous concentrerons dans un premier temps sur la formalisation et les performances attendues de l'asservissement de systèmes physiques linéaires que permet une rétroaction. Ensuite nous verrons comment cette rétroaction peut être la source d'oscillation dans le cadre de systèmes instables.

## 1 Systèmes linéaires bouclés : Rétroaction

Précis d'électronique et Duffait

### 1.1 Diagrammes de Bloc : généralités

Le schéma d'un amplificateur non inverseur est sur la figure (1). Il se découpe en deux parties :

- Un OA ou "ALI", dont la fonction de transfert est<sup>1</sup> :

$$A(p) = \frac{\mu_0}{1 + \frac{p}{\omega_0}} \quad (1)$$

avec typiquement :  $\mu_0 \approx 10^5$  et  $\omega_0 \approx 100 \text{ rad/s}$ .

- Un pont diviseur de tension de fonction de transfert

$$B(p) = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \quad (2)$$

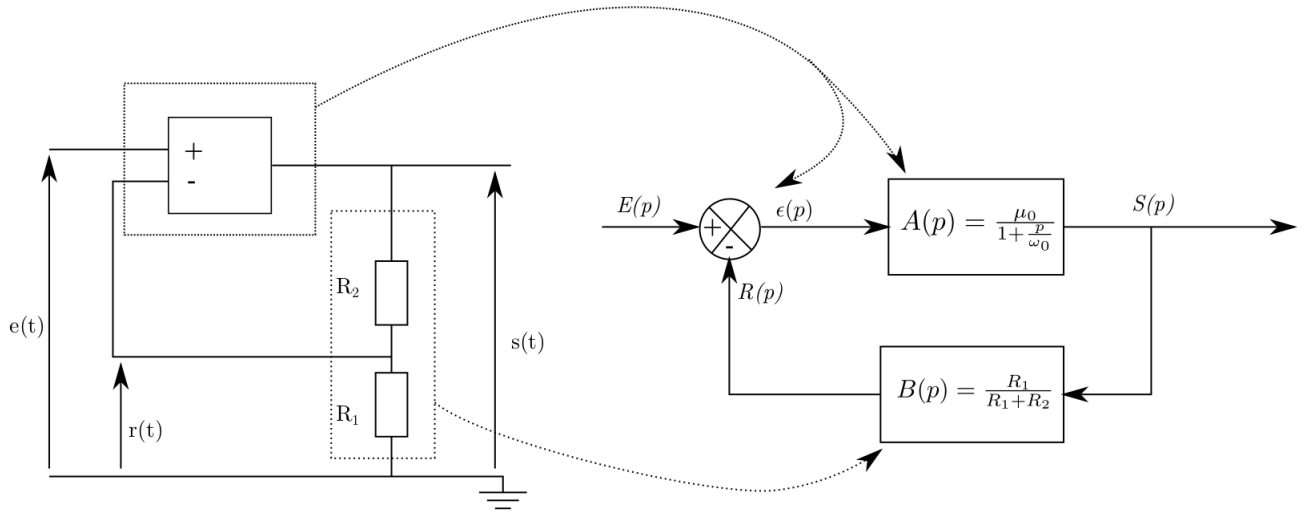


Figure 1: Schéma électrique d'un amplificateur non inverseur à amplificateur opérationnel. La modélisation en schéma bloc est mise en regard. **Tiré du poly de ALBERT Romain**

Le schéma bloc obtenu à droite est de la forme générale de ceux que l'on peut retrouver dans les systèmes linéaires. On va s'en servir pour définir quelques notions :

Pour traiter un tel circuit, on définit deux fonctions de transfert :

- **FTBO** la réponse en boucle ouverte<sup>2</sup> définie comme :

$$\mathbf{FTBO} = \frac{R(p)}{E(p)} = A(p) \times B(p) \quad (3)$$

C'est la fonction de transfert qu'on obtient si on considère que l'entrée est  $\epsilon$  et que  $R(p)$  est la sortie à considérer.

- **FTBF** la fonction de transfert du bloc que l'on a représenté lorsque la rétroaction est bien active :

$$\mathbf{FTBF} = \frac{S(p)}{E(p)} \quad (4)$$

<sup>1</sup>La formule donnée est la formule générale d'un filtre passe-bas du premier ordre. Un AO peut être vu comme un filtre passe-bas avec un très fort gain. Pour rappel la formule générale est  $H(\omega) = \frac{K}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}}$  avec  $K$  le gain et  $\omega_c$  la pulsation associée à la fréquence de coupure.

<sup>2</sup>En boucle ouverte, le signal  $R(p)$  n'est pas relié au - du comparateur.

Calculons la **FTBF** du schéma bloc général précédent. D'abord :

$$S(p) = A(p) \times \epsilon(p) = A(p) \times (E(p) - R(p)) \quad \text{et} : R(p) = B(p) \times S(p) \quad (5)$$

donc :

$$S(p) = A(p) \times [E(p) - B(p) \times S(p)] \quad \text{donc} : S(p) = \frac{A(p)}{1 + A(p)B(p)} \times E(p) \quad (6)$$

donc :

$$\mathbf{FTBF} = \frac{A(p)}{1 + A(p)B(p)} \quad (7)$$

On remarque alors que :

$$\mathbf{FTBF} = \frac{A(p)}{1 + \mathbf{FTBO}(p)} \quad (8)$$

Ce sera utile lors de l'étude des stabilités.

**On retrouve que la sortie est liée à l'entrée par la fonction de transfert  $A$  mais on voit qu'il s'ajoute à cela une correction  $\times(1 + \mathbf{FTBO})^{-1}$ .**

Tr

Le résultat qu'on vient d'obtenir est en fait très général et n'a rien supposé si ce n'est que le système soit linéaire. Ceci donne simplement que  $A$  et  $B$  sont des polynômes en  $p$ .  
On va maintenant voir ce qui est intéressant pour un système du premier ordre comme l'amplificateur non inverseur.

## 1.2 1<sup>er</sup> ordre : amplificateur non inverseur

On reprend le calcul en remplaçant les boîtes noires  $A$  et  $B$  par les vraies fonctions de transfert :

$$A(p) = \frac{\mu_0}{1 + \frac{p}{\omega_0}} \quad B(p) = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \quad (9)$$

avec typiquement :  $\mu_0 \approx 10^5$  et  $\omega_0 \approx 100 \text{ rad/s}$ . Dans le cadre de l'amplificateur non inverseur, on obtient après une légère réécriture (voir 6) :

$$\mathbf{FTBF} = \frac{H_0}{1 + \frac{p}{\omega_C}} \quad \text{avec} : H_0 = \frac{\mu_0}{1 + \mu_0 \frac{R_1}{R_1 + R_2}} \quad \text{et} \quad \omega_C = \omega_0 \left( 1 + \mu_0 \frac{R_1}{R_1 + R_2} \right) \quad (10)$$

**On parle bien d'un système d'ordre 1 car le dénominateur de la FTBF ainsi réduite est un polynôme d'ordre 1 en  $p$ . Il possède donc une racine.**

### 1.2.1 Propriétés :

Si on avait travaillé en transformée de Fourier à la pulsation  $\omega$ , il suffisait de faire un changement de variable  $p \leftarrow j\omega$  :

- Si  $\mu_0 \gg \frac{R_1+R_2}{R_1}$  : alors, par un DL judicieux :

$$H_0 = 1 + \frac{R_2}{R_1} \quad (11)$$

c'est-à-dire que pour  $\omega \gg \omega_c$ , la fonction de transfert ne dépend plus des caractéristiques de l'amplificateur opérationnel mais uniquement de la boucle de rétroaction. Ceci est extrêmement important dans la mesure où on s'affranchit des variations possibles de ces caractéristiques<sup>3</sup>. Ce résultat est plus général, c'est-à-dire que si l'on se place dans un cas où  $A(p)B(p) \gg 1$ , la fonction de transfert en boucle fermée va être très simplifiée et devenir :

$$H = 1 + \frac{R_2}{R_1} = \frac{1}{B(j\omega)} \quad (12)$$

- Une autre caractéristique, mais uniquement des systèmes du premier ordre, est la constance du produit gain bande, qui peut également être montrée expérimentalement :

$$H_0 \times \omega_c = \frac{\mu_0}{1 + \mu_0 \frac{R_1}{R_1+R_2}} \times \omega_0 \left( 1 + \mu_0 \frac{R_1}{R_1+R_2} \right) = \mu_0 \omega_0 \quad (13)$$

**Le produit gain bande passante est constant** : Typiquement ce produit gain bande passante va valoir de l'ordre de 10 MHz pour un AO tel que le TL81. Cette caractéristique nous limite dans les possibilités d'amplification : si on veut un gain fort, la bande passante sera forcément petite.

### 1.2.2 Expérience :



#### Expérience :

##### En préparation :

Prendre  $v_e = 1$  V,  $R_2 = 10\text{k}\Omega$  et  $R_1 = 1\text{k}\Omega$ .

Pour un retour de faible gain, par exemple  $\frac{R_1}{R_2} = 10^{-1}$ , la pulsation de coupure est  $\omega_c \approx 10^5 \text{ rad s}^{-1}$

En changeant la fréquence, on trace le diagramme de Bode point par point <sup>a</sup> de amplificateur non inverseur.

On recommence ensuite pour des résistance  $R_1$  et  $R_2$  tel que  $\frac{R_1}{R_2} = 10$  puis  $\frac{R_1}{R_2} = 100$ .

On observe qu'en superposant les différentes courbes de gain, elles se rejoignent pour les fréquences au-delà des fréquences de coupure liées à la compensation des amplificateurs opérationnels.

##### Devant le jury :

Faire peut-être un point sur ce diagramme et montrer les courbes en préparation et **constater la constance du produit gain bande**. Remarquons que  $G\omega = \text{cste} \iff \log(G) = -\log(\omega) + \text{cste}'$ . Nous pouvons tracer  $\log(G)(\log(\omega))$  et montrer qu'il s'agit bien d'une droite.

<sup>a</sup>observer par exemple le déphasage du signal de sortie sur le signal d'entrée. Les signaux sont en phase

<sup>3</sup>température ...

à basse fréquence, mais déphasés à haute fréquence de  $\pi/2$  (comportement passe-bas attendu).

À haute fréquence, envoyer alors un signal carré pour observer directement son intégration en signal triangle.

REMARQUE : L'intégration d'un signal triangle en bouts de parabole est moins spectaculaire puisqu'on confond facilement ces derniers avec un sinus.

Tr

On vient de mettre en évidence quelques propriétés des systèmes bouclés d'ordre 1. Maintenant, on va passer à un exemple de système d'ordre 2 :

### 1.3 2<sup>me</sup> ordre : Asservissement d'un moteur en position

Voir le chapitre XIII.2 de Duffait p328

#### 1.3.1 Schéma bloc :

L'asservissement en position d'un moteur à courant continu va nous permettre d'aborder la formalisation de systèmes plus complexes, et qui possèdent donc une physique plus riche. Le schéma de l'asservissement est présenté à la figure (2) ainsi que le schéma bloc qui lui est associé.

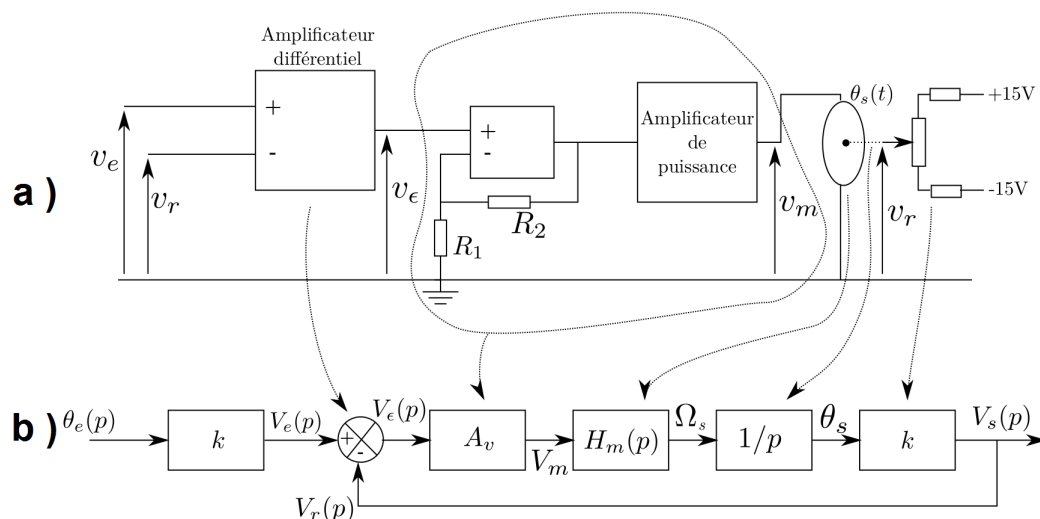


Figure 2: Schéma de l'asservissement en position d'un moteur à courant continu. Tiré du poly de ALBERT Romain

- Le premier bloc en figure 2 b) contient uniquement un facteur de conversion  $k$ . Il n'est donc pas présent sur le schéma électrique : en effet, pour simplifier la mise en évidence des différents phénomènes, nous utilisons un GBF pour générer directement la consigne  $V_e(t)$ .
- Ensuite, l'amplificateur différentiel qui possède un gain fixe possède le rôle du comparateur dans le schéma bloc. Il rentrera en compte également dans le bloc  $A_v$  qui va être un gain (variable grâce à l'amplificateur opérationnel) prenant en compte l'AO et l'amplificateur de puissance. Il est à noter que l'amplificateur de puissance est essentiel dans ce cas, dans la mesure où le moteur peut absorber 4 A, ce qu'un AO ne peut fournir.

- Ensuite il y a le moteur à courant continu ; c'est un système qui peut être décrit en première approximation comme étant du premier ordre<sup>4</sup>. Sa fonction de transfert est :

$$H_m(p) = \frac{\Omega_s}{V_m} = \frac{A_m}{1 + \frac{p}{\omega_m}} \quad (14)$$

où  $\omega_m$  et  $A_m$  sont des paramètres qui dépendent des caractéristiques mécanique et électrique du moteur.

- Puis, il y a un bloc  $1/p$  : celui-ci est dû au fait que le moteur impose une vitesse de rotation à l'axe et non un angle.  
Dans la mesure où la vitesse de rotation (variable imposée) est directement la dérivée de l'angle de l'axe (variable mesurée), la transformée de Laplace fait apparaître ce terme  $1/p$ .
- Le dernier bloc est un bloc de conversion qui traduit la conversion de la position angulaire en une tension à l'aide d'un potentiomètre.

**Notons bien que cette mise en schéma bloc n'est possible que parce qu'il n'y a pas de problème d'adaptation d'impédance entre leurs différentes parties.**

Description du système bouclé Pour résumer, la tension d'entrée  $v_e$  se voit soustraire  $v_r = v_{out}$ , qui est proportionnelle à la position de la vis. La tension en sortie du soustracteur  $v_e - v_r$  commande ensuite la vitesse de rotation du moteur. On comprend donc que pour la position pour laquelle le potentiomètre renvoie  $v_r = v_e$ , on commandera une vitesse nulle pour le moteur :

si la vis est sur cette position, elle y reste. Si maintenant on s'en écarte d'un angle négatif, alors  $v_r$  diminue et on se retrouve avec  $v_r < v_e$ . Par conséquent on commande en sortie de soustracteur une vitesse positive, qui ramène la vis vers sa position d'équilibre.

On peut faire le même raisonnement pour un angle positif, et on se rend compte qu'on est bien en train d'asservir en position la machine à courant continu.

On peut dès lors observer que, sur une tension continue, le moteur répond plus ou moins fortement à un écart à la consigne. La "résistance" qu'oppose la vis lorsqu'on appuie dessus avec notre doigt change quand  $R_2$  varie. On reviendra plus en détail sur l'influence de  $R_2$  sur l'asservissement.

### 1.3.2 Expérience :

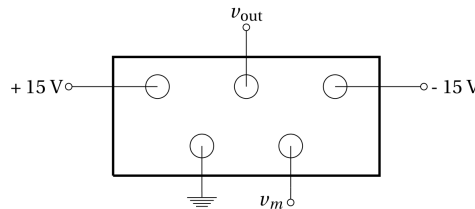
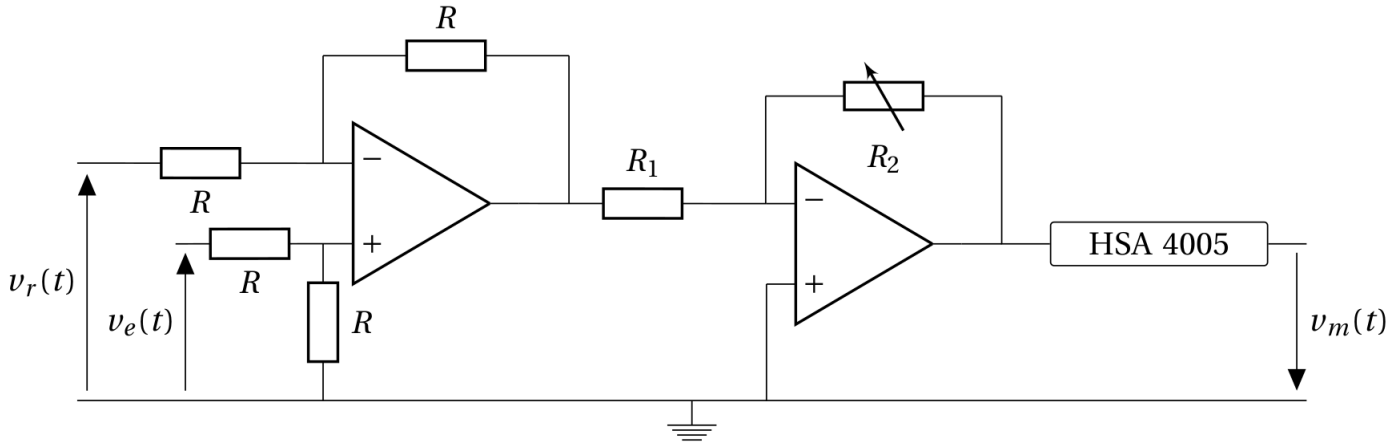


Figure 3: Branchement du moteur. : figure extraite du poly de **Jérémy Ferrand**

<sup>4</sup>La caractéristique d'une machine à courant continu est  $e = Ri + k\Omega$  avec  $e$  la tension qu'on lui applique,  $\Omega$  sa vitesse de rotation,  $R$  sa résistance interne et  $i$  l'intensité qui le traverse.

Figure 4: figure extraite du poly de **Jérémy Ferrand**

### Expérience :

Le schéma est identique à celui de Duffait en remplaçant le dernier AO par un **amplificateur de puissance HSA**. Sélectionner "Input A", régler le gain sur  $\times 10$  (c'est le minimum),  $Z$  in sur  $600\ \Omega$  et **BIAS sur OFF**. Prendre  $R = 100\ k\Omega$ ,  $R_1 = 10\ k\Omega$ , et utiliser une boîte à décade pour  $R_2 = 1\ k\Omega$ .

Brancher  $v_m$  sur le moteur. Pour cela, relier la sortie Output de l'amplificateur à la masse du moteur, et la masse de l'amplificateur sur l'entrée  $v_m$  du moteur afin d'avoir un gain de  $-10$  pour l'amplificateur. Mettre  $v_r$  à la masse pour l'instant, et appliquer avec un GBF une tension  $1\ V$  continue sur  $v_e$ . Le moteur doit tourner.

Avec une alimentation  $+15/-15V$  Jeulin P54.12, alimenter le potentiomètre en  $+15/-15V$ .

**ATTENTION**, la masse de l'alimentation doit être reliée à celles des AO, mais pas à celle du boîtier du moteur (pour éviter un court-circuit).

Par pont diviseur de tension, on a alors  $v_{out}$  compris entre  $+5/-5V$  (à cause des deux résistances de part et d'autre du potentiomètre). Relier  $v_r$  et  $v_{out}$ . Mettre en entrée une tension continue  $1V$ . Observer que la position de la vis est maintenant asservie (elle ne tourne plus).

### 1.3.3 Calculs :

Maintenant que nous avons décrit le système et mis en évidence son fonctionnement expérimental, il reste à finir la mise en équation. Ainsi, si on reprend les notations de la partie précédente :  $A(p)$  et  $B(p) = 1$  d'où la fonction de transfert en boucle ouverte est directement  $A(p)$ :

$$A(p) = \text{HTBO}(p) = \frac{V_r}{V_e} = k A_v H_m(p) \times \frac{1}{p} = \frac{k A_v A_m}{p \left(1 + \frac{p}{\omega_m}\right)} = \frac{B_m}{p \left(1 + \frac{p}{\omega_m}\right)} \quad (15)$$

Donc :

$$\text{FTBF} = \frac{A}{1 + AB} = \frac{1}{1 + 1/A} = \frac{1}{1 + \frac{p(1 + \frac{p}{\omega_m})}{B_m}} = \frac{B_m}{B_m + p \left(1 + \frac{p}{\omega_m}\right)} \quad (16)$$

$$\mathbf{FTBF} = \frac{B_m \omega_m}{B_m \omega_m + p \omega_m + p^2} = \frac{\omega_c^2}{\omega_c^2 + 2\xi \omega_c p + p^2} \quad (17)$$

où  $\omega_c$  est la pulsation propre du système et  $\xi$  est le coefficient d'amortissement réduit :

$$\omega_c = \sqrt{B_m \omega_m} \propto \sqrt{A_v} \quad \text{et} : \xi = \frac{\omega_m}{2\omega_c} \propto \frac{1}{\sqrt{A_v}} \quad (18)$$

On parle bien d'un système d'ordre 2 car le dénominateur de la FTBF ainsi réduite est un polynôme d'ordre 2 en  $p$ . Il possède donc deux racine

Tr

En faisant varier le gain dans la boucle, on observe bien les changements du coefficient d'amortissement. Le temps d'amortissement augmente lorsque le gain augmente. On peut également observer le changement de pulsation du régime pseudo-périodique, mais l'interprétation est plus compliquée.

Si on peut observer l'impact du gain dans la boucle directe, nous n'avons pas encore discuté des critères selon lesquels nous allons juger la performance de cet asservissement.

## 2 Conséquence de la rétroaction

Pour juger de la performance d'un asservissement, nous utilisons généralement plusieurs critères

- **précision**<sup>56</sup>
- **Rapidité** quantifiée par le temps de réponse à 5% c'est le temps nécessaire à ce que la réponse soit dans un intervalle à  $\pm 5\%$  de la valeur de la consigne.
- **stable**

Tr

On ne fera qu'évoquer la précision et le temps de réponse qui sont des composantes importantes des systèmes asservis pour rester bien dans le sujet : la stabilité. Mais d'abord, définissons le diagramme de Nyquist :

<sup>5</sup>Elle est définie principalement par deux grandeurs qui sont soit calculées si le système est modélisé, soit mesurées expérimentalement : l'écart statique et l'écart dynamique.

- l'écart statique, c'est la différence entre la valeur asymptotiquement (après un temps infini) obtenue en sortie après asservissement et la valeur de consigne dans le cas d'une réponse à un échelon. Ici, l'angle du moteur en régime permanent quand on impose la position.
- l'écart dynamique c'est la même chose, mais lorsque la consigne est une rampe. La réponse tend vers une rampe mais décalée et parfois de pente différente.

<sup>6</sup>Bon à savoir : Une perturbation ne provoque pas d'écart statique dans un système bouclé s'il existe une intégration dans la boucle ouverte en amont de cette perturbation.

## 2.1 Stabilité et critères :

Automatique de Ganjon p241

La stabilité<sup>7</sup> d'un système avec une rétroaction se discute à partir du comportement en boucle ouverte. On va le motiver :

### 2.1.1 Preuve mathématique :

Ici, les petites lettres correspondent au domaine temporel et les grandes au domaine de Laplace. On a déjà vu que pour le système bouclé :

$$[1 + A(p)B(p)] \times S(p) = A(p) \times E(p) \quad (19)$$

qui revient à une équation différentielle linéaire dans le domaine temporel :

$$\sum_i \alpha_i \frac{\partial^i}{\partial t^i} = \sum_i \alpha_i \frac{\partial^i}{\partial t^i} S(t) = \sum_i \beta_i \frac{\partial^i}{\partial t^i} E(t) \quad \text{avec : } \begin{cases} 1 + A(p)B(p) = \sum_i \alpha_i p^i \\ A(p) = \sum_i \beta_i p^i \end{cases} \quad (20)$$

- **Le système temporel est linéaire : une solution est donc une solution homogène plus une solution particulière. :**

$$s(t) = s_H(t) + s_P(t) \quad (21)$$

- **La divergence des solution homogènes va entraîner la divergence de la solution totale et donc l'instabilité !**
- Notre critère de stabilité est donc que les solutions homogènes  $s_H$  ne divergent pas. Elles sont solutions de :

$$\sum_i \alpha_i \frac{\partial^i}{\partial t^i} = \sum_i \alpha_i \frac{\partial^i}{\partial t^i} S(t) = \sum_i \beta_i \frac{\partial^i}{\partial t^i} E(t) \quad (22)$$

- On sait grâce au cours de maths que les solutions d'un tel problèmes sont de la forme :

$$s_H(t) = \sum_k a_k \exp(p_k t) \quad (23)$$

connaissant l'équation caractéristique :

$$\sum_i \alpha_i p_k^i = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 1 + A(p_k)B(p_k) = 0 \quad (24)$$

On remarque que les  $p_k$  sont donc aussi les **racines du dénominateur de la fonction de transfert en boucle fermée**

- Soit  $p_k = m_k + j\omega_k$  :

$$s_H(t) = \sum_k a_k \exp(p_k t) = \sum_k a_k \exp(m_k t) \times \exp(j\omega_k t) \quad (25)$$

**La solution est donc stable que si  $m < 0$** <sup>8</sup>

**Si les poles de la FTBF ont une partie réelle positive, alors le système est instable.**

A ce moment là, il est utile de remarquer que  $AB = \text{HTBO}$  et que le critère se reformule :

**Le système est stable en boucle fermée si  $1 + \text{FTBO}$  n'a pas de racines à partie réelle positive**

<sup>7</sup>Hélas, dans cette leçon, nous n'allons pas discuter du cas général de la stabilité des systèmes linéaires bouclés. En effet, le cas général nécessite des connaissances en analyse complexe qui ne sont pas exigibles. Mais l'idée est là quand même.

<sup>8</sup>si  $m=0$ , on a un oscillateur

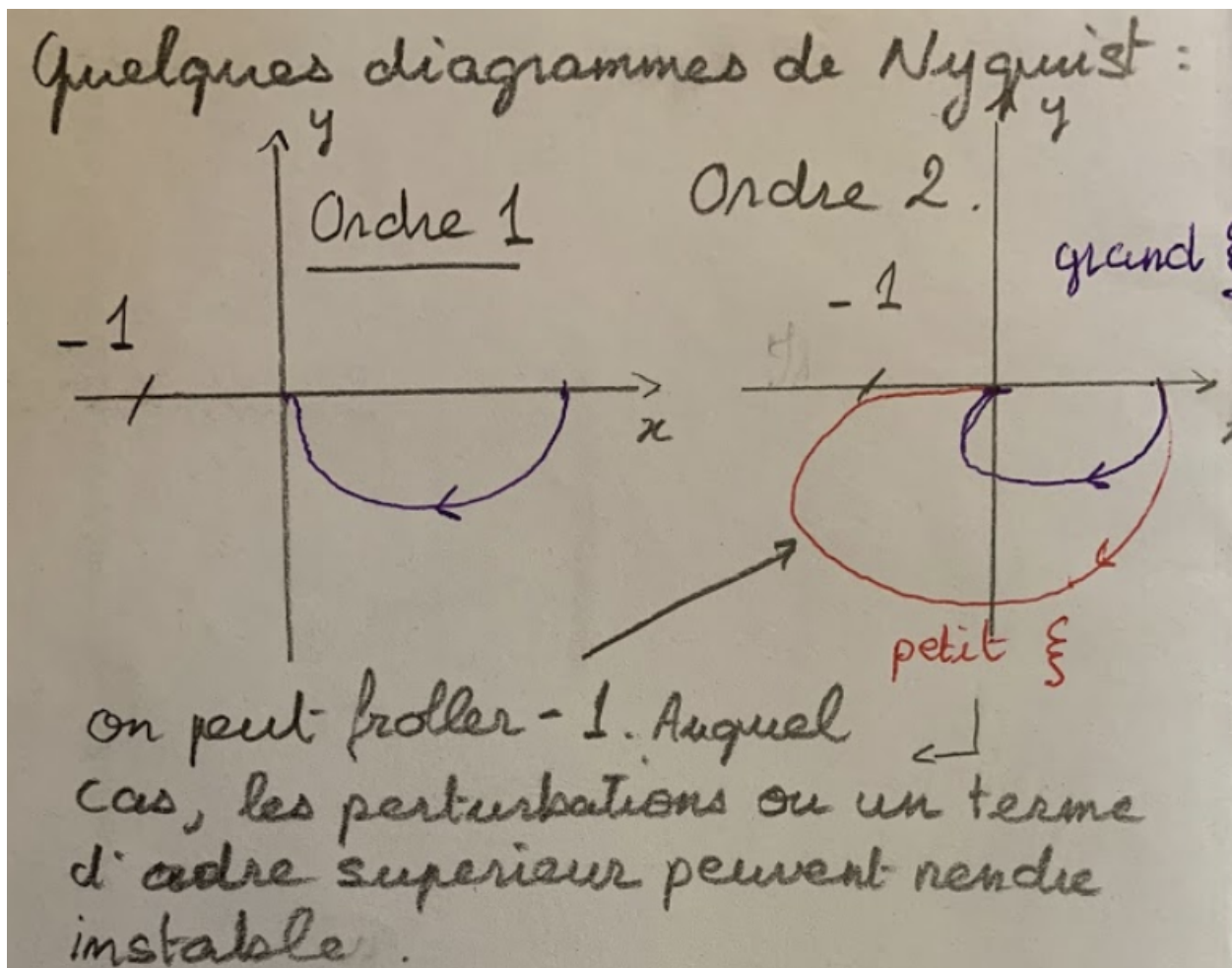
### 2.1.2 Critère de Nyquist :

On peut montrer qu'une étude harmonique est suffisante<sup>9</sup>. La condition devient :

**Un système stable en boucle ouverte est instable en boucle fermée si lors de l'étude harmonique de la fonction de transfert en boucle ouverte, celle-ci entoure au moins une fois le point  $-1$  dans le diagramme de Nyquist.**

Le système est stable en boucle fermée<sup>10</sup>, si la courbe décrite par  $\mathbf{FTBO}(p)$  dans le diagramme de Nyquist laisse le point  $(-1, 0)$  à sa gauche lorsqu'elle est décrite dans le sens des  $\omega$  croissant.

Il est important ici de rappeler par un schéma ce qu'est le diagramme de Nyquist et comment l'obtenir<sup>11</sup>. C'est la courbe paramétrée par  $\omega$  :  $(\text{Re}(\mathbf{FTBO}(j\omega)); \text{Im}(\mathbf{FTBO}(j\omega)))$



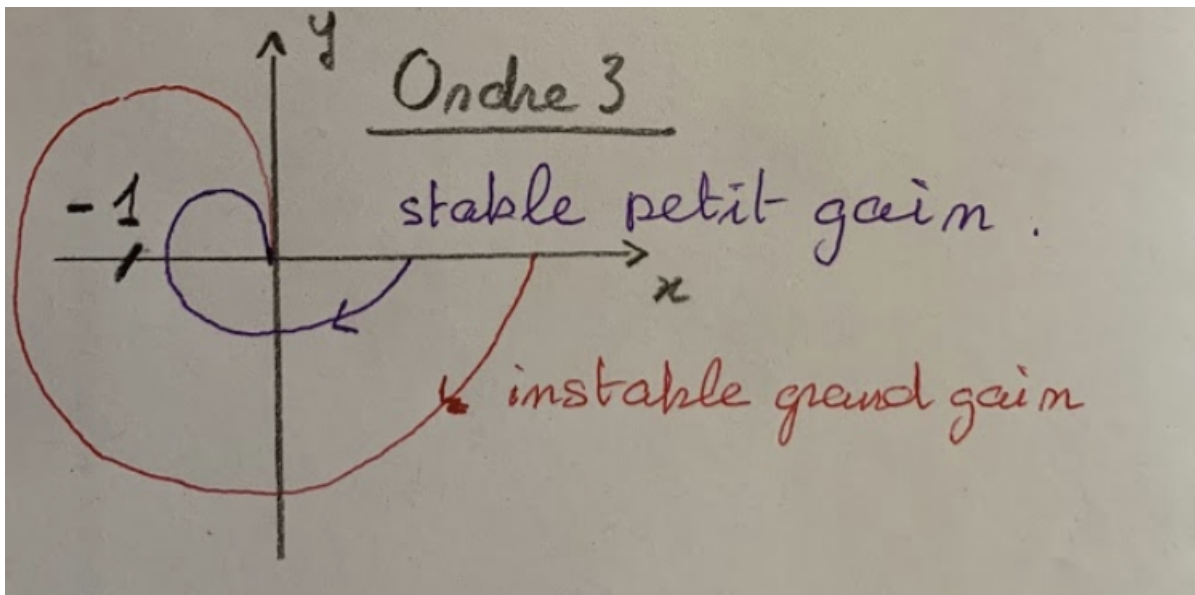
Première conclusion, il faut au moins avoir à un moment un déphasage de plus de  $180^\circ$  pour passer autour du point  $(-1, 0)$ . Donc :

<sup>9</sup>cf Annexes avec le critère de Cauchy

<sup>10</sup> La condition de stabilité est très simple à visualiser sur un diagramme de Bode. On trace la réponse fréquentielle en boucle ouverte, on détermine ensuite la pulsation  $\omega_c$  de coupure à  $0$  dB et on regarde la valeur du déphasage pour cette pulsation (La pulsation de coupure à  $0$  dB est la pulsation pour laquelle le gain du système est égal à 1; le gain en dB est alors  $20\log(1) = 0$ ). Si le déphasage est inférieur à  $180^\circ$ , le système est stable en boucle fermée, si le déphasage est supérieur à  $180^\circ$  le système est instable en boucle fermée.

<sup>11</sup>Il suffit de faire le diagramme de Bode puis tracer  $|H| \sin(\phi)$  en fonction de  $|H| \cos(\phi)$

Les systèmes du premier ordre intrinsèquement stables (<sup>12</sup> Pour un système linéaire



bouclé, une augmentation trop importante du gain provoque l'instabilité<sup>13</sup>

Tr

Naïvement, on se dit qu'il est préférable d'avoir un système stable pour les applications de la vie courante. On va voir ici que dans certains domaines, on peut exploiter les instabilités pour créer des oscillations

<sup>12</sup>en théorie pour les systèmes du second ordre, c'est vrai pour un retour unitaire.

En pratique, c'est mal vérifié. En effet, lors de la modalisation car on néglige souvent des termes. Par exemple, le circuit d'ordre 1 est parfois un ordre 2 avec une faible dissipation. Ainsi, les ordre 2 réels sont modélisables souvent par de ordres supérieurs en toute rigueur. C'est la faute au fait qu'on néglige des termes.

<sup>13</sup>C'est ce qu'on observe juste après avec l'oscillateur de Wien.

### 3 Oscillateurs quasi-sinusoïdaux

Qu'on se mette bien d'accord, les systèmes stables peuvent osciller : regardez donc un deuxième ordre avec un petit  $\xi$  !!!

Le phénomène que l'on cherche à mettre en évidence c'est le **Pompage**<sup>14</sup> : le système se mettra à osciller à une fréquence préférentielle donnée **quelque soit la consigne d'entrée**.

Ces phénomènes sont dus à la présence d'une boucle de retour, à des retards dans la chaîne directe et à un gain de boucle ( $B$ ) élevé.

#### 3.1 Expérience : Oscillateur de Wien :

Duffait Elec p181

##### 3.1.1 Expérience :



##### Expérience :

On prendra  $R_1 = 1k\Omega$ ,  $R_2$  variable (boîte à décade),  $R = 1k\Omega$  et  $C = 1\mu F$ .

##### Préparation :

Envoyer en entrée  $v_e$  une tension sinusoïdale de quelques volts. Relever la tension en sortie  $v_s$  et son déphasage par rapport à l'entrée pour différentes fréquences entre  $1Hz$  et  $100kHz$ .

Réaliser cela pour  $R_2 = 1,9k\Omega$  (donc légèrement inférieure à  $2R_1$ ), puis pour  $R_2 = 2,1k\Omega$  (donc légèrement supérieure à  $2R_1$ ). Tracer le diagramme de Bode de la boucle ouverte en gain et en module et le caractériser (ordre, fréquence de coupure, facteur de qualité)

##### Devant le Jury :

Dans le cas où  $R_2$  est légèrement supérieure à  $2R_1$ , enlever le générateur et brancher la sortie du filtre  $v_s$  sur l'entrée  $v_e$ . Le système est alors bouclé. On observe l'apparition d'oscillations<sup>a</sup>. Déterminer la fréquence des oscillations à l'aide de l'oscilloscope ou d'un fréquencemètre. On doit trouver la même fréquence d'oscillation que la fréquence propre du filtre passe-bande.

<sup>a</sup>Si l'on n'observe pas d'oscillations, on peut encore augmenter la valeur de  $R_2$ , en particulier si on utilise des boîtes à décades. En effet les incertitudes sur ces types de composants peuvent être importantes (de l'ordre de 5%). Penser à les sortir du circuit pour mesurer leur résistance à l'ohmmètre.

Ce montage peut se décomposer sous la forme d'une chaîne directe et d'une contre-réaction/chaîne de retour :

- la chaîne directe est un amplificateur non-inverseur de fonction de transfert :

$$A = 1 + \frac{R_2}{R_1} \quad (26)$$

<sup>14</sup>Penser au Lasers et revoir leur fonctionnement pour les questions :

L'excitation est faite par des flash, des décharges (à toutes les fréquences donc puisque ce sont des Dirac) le  $A$  c'est la cavité et le  $B$  c'est le milieu amplificateur. Le gain  $B$  est assez important pour assurer l'effet laser lorsque il y a inversion de population.

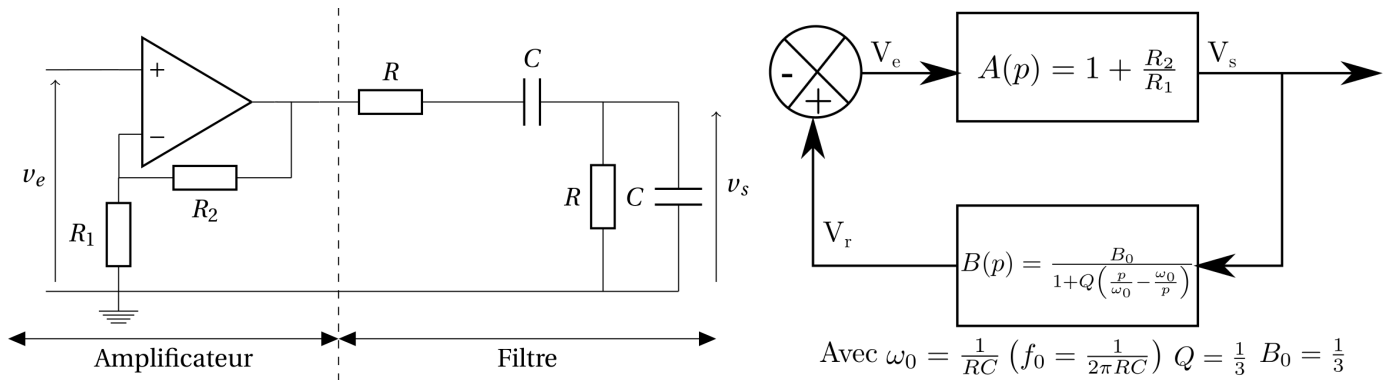


Figure 5: Tiré des polys de ALBERT Romain et Jeremy Ferrand

- la contre-réaction est un filtre passe-bande d'ordre 2 (RC série RC parallèle) de fonction de transfert

$$B = \frac{j\omega RC}{1 + 3j\omega RC + (j\omega RC)^2} \quad (27)$$

Le filtre obtenu est un filtre passe-bande de facteur de qualité  $Q = 1/3$ . Pour  $R_2$  inférieure à  $2R_1$ , le gain de la fonction de transfert doit toujours être inférieur à 1. Pour  $R_2 > 2R_1$ , à la résonance, le gain doit être légèrement supérieur à 1 dans une petite bande de fréquence. Le critère de Nyquist n'est alors pas vérifié. les oscillations peuvent apparaître.

Le bruit électronique va être amplifié par la chaîne directe, puis filtré par la chaîne de retour.

Si la résistance  $R_2$  est suffisamment grande, certaines fréquences seront amplifiées après être passées par l'amplificateur et le filtre. Ces fréquences sont celles qui sont les moins atténuées par le filtre, c'est-à-dire celles qui se situent autour de la fréquence propre du filtre passe bande. Si le gain de l'amplificateur est à peine plus grand que l'atténuation minimale du filtre, seule la fréquence du filtre sera amplifiée, les autres étant atténuées. On crée donc un signal (quasi-) sinusoïdal. Après plusieurs passages dans le système bouclé, le signal à la fréquence du filtre passe bande sera de grande amplitude.

Toutefois, cette amplitude est limitée par les effets non-linéaires de l'amplificateur opérationnel, et dépend du système utilisé pour amplifier. C'est pourquoi on sature par exemple à 5V et pas 15V.

Tr

On vient de mettre en évidence un critère pour que des oscillations puissent apparaître dans un système bouclé instable.

### 3.2 Condition de Baurkhausen :

Pour qu'un signal à la fréquence  $\tilde{\omega}$  puisse osciller dans la boucle, il faut que la boucle n'induisse pas de déphasage dans le signal (si non, le signal devient n'importe quoi...) et il ne faut pas non plus d'amplification sans quoi il n'est pas périodique car il change d'amplitude à chaque

passage dans la boucle<sup>15</sup> Donc :

$$E(j\tilde{\omega}) = \mathbf{FTBO}(j\tilde{\omega}) \times E(j\tilde{\omega}) \quad (28)$$

Ce qui revient à  $\mathbf{FTBO}(j\tilde{\omega}) = A(j\tilde{\omega})B(j\tilde{\omega}) = 1$

Dans le cas où  $A(j\tilde{\omega})B(j\tilde{\omega}) > 1$ , les oscillations vont augmenter exponentiellement en amplitude comme on peut le constater expérimentalement.

Ce critère possède deux parties : un **accord de phase** et un **d'amplitude**.

Dans la mesure où nous avons un amplificateur non inverseur, il provoque un déphasage nul ; pour que des oscillations stables existent, il faut donc que l'oscillation soit à la fréquence de résonance du filtre. Ce critère peut également se comprendre en disant que les **oscillations doivent être en phases dans le système bouclé**<sup>16</sup>,

Le **critère d'amplitude** nous donne lui le gain qu'il faudrait pour que les oscillations soient stables, c'est-à-dire **un gain de 1**. Il est impossible avec une résistance de se placer exactement à un gain de 1. C'est pourquoi on observe l'apparition de saturation : les non-linéarités de l'AO vont empêcher le signal de croître et fixer donc son amplitude, provoquant ainsi un enrichissement spectral. Cependant, en utilisant astucieusement un élément non linéaire, on peut se placer très précisément sur le critère de Barkhausen.

Si nous revenons sur l'oscillateur de Wien, le critère de Barkhausen impose (entre autre) que le gain du montage globale sur un cycle doit être de 1 (ou supérieur puisque dans ce cas là il y aura saturation par les éléments non-linéaires). Or puisque le facteur de qualité du filtre est de  $\frac{1}{3}$  alors le gain de l'amplificateur doit être de 3; d'où :

$$1 + \frac{R_2}{R_1} = 3 \quad \text{donc :} \quad R_2 = 2 R_1 \quad (29)$$

Tr

Une manière historique de faire est d'utiliser une ampoule à incandescence. La résistance d'une ampoule augmente lorsqu'elle chauffe, c'est-à-dire lorsque la tension augmente à ses bornes. En la plaçant à la place de  $R_1$ , on peut ainsi faire en sorte de stabiliser l'oscillation. Lorsque l'amplitude est faible, la résistance est faible et le gain fort, l'amplitude va donc augmenter. Si l'amplitude augmente trop, la résistance augmente et le gain diminue ce qui fait que l'amplitude diminue. L'amplitude de l'oscillation va donc être stabilisée. Pour l'anecdote, c'est la méthode qui a été utilisée pour réaliser le premier oscillateur audio de haute puissance.

## 4 Conclusion :

Pour conclure, la physique des asservissements linéaires est très riche. et les différents critères de performance que nous avons évoqué peuvent paraître impossible à remplir de manière simultanés ; les correcteurs que nous n'avons pas étudié ici peuvent proposer des solutions à ces

<sup>15</sup>Oh, que c'est bien mal formulé !!!!

Rappelons que l'on se place dans l'ARQS donc les signaux ne se "propagent" pas dans le circuit.

<sup>16</sup>comme pour une cavité Fabry-Pérot mais les élèves le verront plus tard.

problèmes. Par ailleurs, les oscillateurs linéaires ne sont pas les seuls, et il existe une vaste classe d'oscillateurs non linéaires, dont les oscillateurs à relaxation qui sont très utilisés. De manière générale, l'utilisation de phénomènes non linéaires permet d'améliorer significativement la performance de la plupart des systèmes étudiés, au prix d'une complexité plus importante.

Si non, on pourra étudier la réponse temporelle et le critère de rapidité la prochaine fois.

## 5 Annexe :

### 5.1 Une petite réécriture :

$$\begin{aligned}
 FTBF &= \frac{A}{1+AB} = \frac{\frac{P_0}{1+\frac{P}{\omega_0}}}{1 + \frac{P_0}{1+\frac{P}{\omega_0}} \cdot \frac{R_1}{R_1+R_2}} = \frac{1+\frac{P}{\omega_0}}{1+\frac{P}{\omega_0}} \cdot \frac{P_0}{\left[1+\frac{P}{\omega_0} + P_0 \frac{R_1}{R_1+R_2}\right]} \\
 &= \underbrace{\frac{P_0}{1+\frac{P_0 R_1}{R_1+R_2}}}_{H_0} \cdot \underbrace{\frac{1}{1 + \frac{P}{\omega_0} \cdot \frac{1}{\left(1+P_0 \frac{R_1}{R_1+R_2}\right)}}}_{\frac{1}{1+\frac{P}{\omega_c}}}
 \end{aligned}$$

Figure 6: calcul pour le premier ordre

### 5.2 Critères pour qualifier l'asservissement :

#### 5.2.1 Précision :

Le critère qui nous vient généralement est un **critère de précision**. En effet, si l'on utilise une rétroaction, c'est souvent pour l'améliorer. On peut l'aborder d'un point de vue expérimental : si l'on tente de modifier l'angle de l'axe du moteur, il nous oppose une certaine résistance. Si on augmente le gain de la boucle, on observe que la résistance qui nous est opposée augmente également. En pratique, on est ici en train de tester **l'erreur statique, c'est-à-dire que l'on impose une perturbation constante à un système ayant une consigne constante**, et on peut montrer mathématiquement que l'erreur est d'autant plus faible que le gain est fort comme nous l'avons intuité expérimentalement. Il est à remarquer que le critère de précision statique n'est pas le seul pertinent, mais le seul raisonnablement évocable dans le temps limité de cette leçon.

#### 5.2.2 temps de réponse :

Un autre critère très important est le **temps de réponse du système asservi**. Le critère généralement utilisé est le **temps de réponse à 5%**. C'est le temps minimal qu'il faut au système pour être confiné entre 0.95 et 1.05 de la valeur de consigne. Ce temps de réponse à 5% dépend de l'amortissement dans la fonction de transfert en boucle fermée comme on peut le voir à la figure 3.

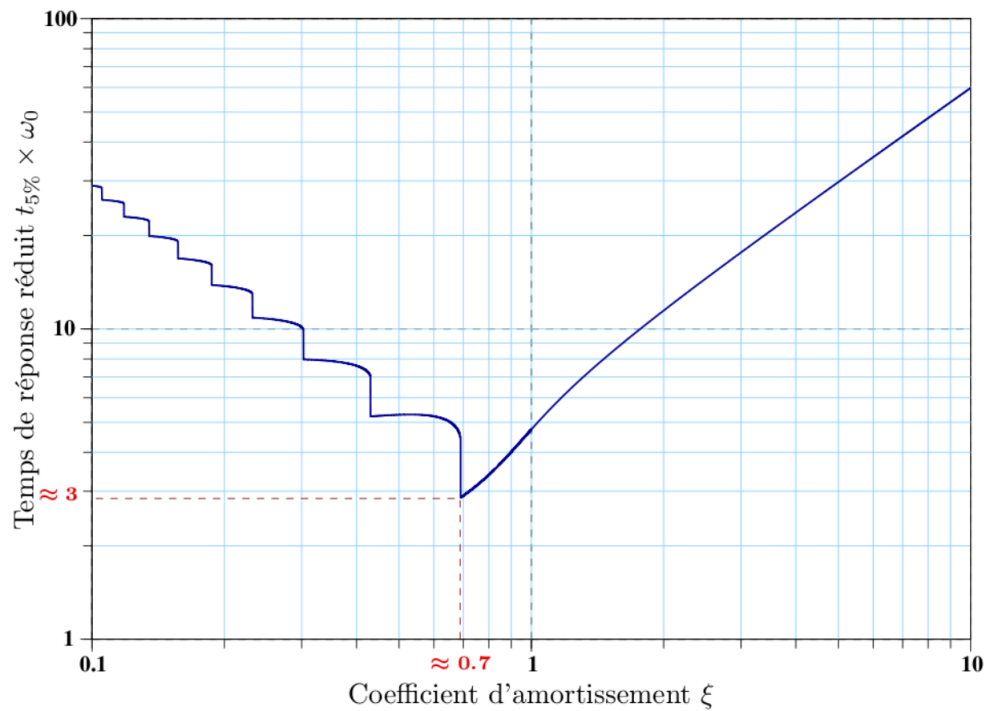


Figure 7: Le minimum correspond au régime critique.

Les différents paliers correspondant au régime pseudo-périodique, où le cas optimal est obtenu dans le cas où la première oscillation frôle la limite. Notons que pour  $\xi > 1$ , il n'y a plus d'oscillations et que le temps de réponse est bien supérieur à l'optimum. En pratique on ne cherchera pas forcément à optimiser le temps de réponse du système, parfois le dépassement n'est pas admissible, par exemple dans le cadre d'usinage.

Par ailleurs, le temps de montée est parfois plus important. Il est généralement défini comme étant le temps qu'il faut au système pour passer de 0.1 à 0.9 de la valeur de consigne. Lorsque la valeur de consigne va être amenée à changer, ce temps de montée est parfois plus pertinent que le temps de réponse à 5%.

### 5.3 Théorème de Cauchy - preuve de Nynquist

#### 5.3.1 Théorème de Cauchy

Soit  $F = 1 + \text{HTBO}$  Une fonction méromorphe<sup>17</sup>, alors pour  $p$  qui décrit un contour du plan complexe entourant  $Z$  zéro et  $P$  pôle de la fonction  $F$ ,

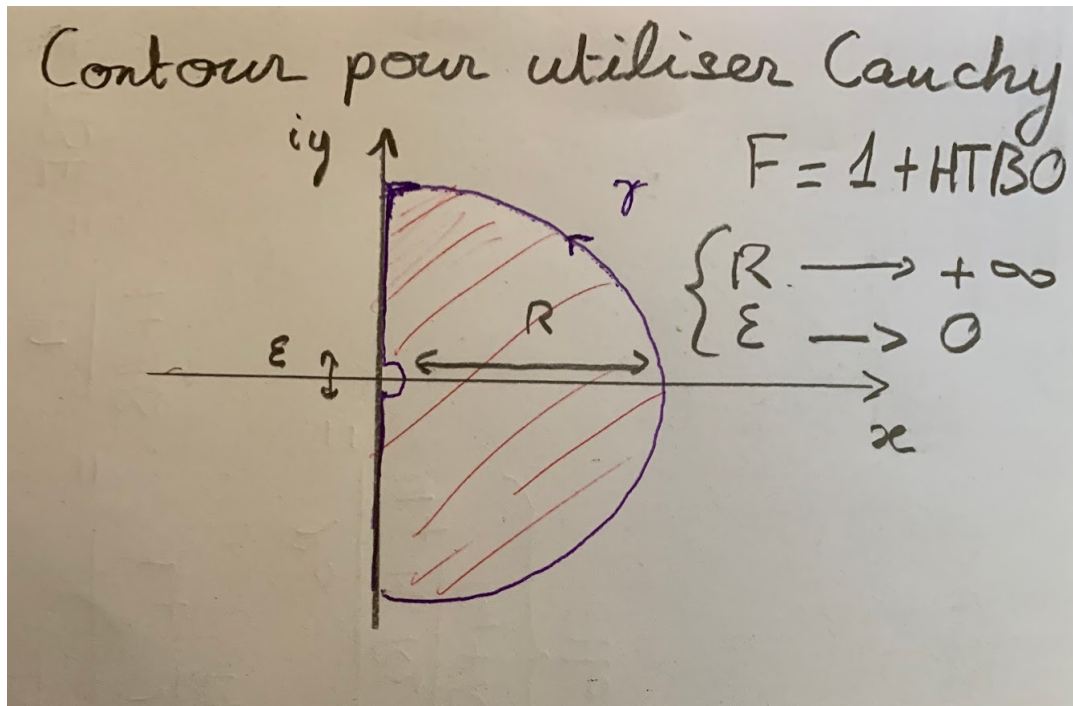
Alors, la fonction  $F(p)$  tourne  $Z - P$  fois autour de l'origine du plan complexe. On prend le contour  $j\omega$  et un arc de cercle à l'infini vers les parties réelles positives (on exclue 0 car il peut être une racine triviale en faisant un mini détour autour). Le contour est donc l'axe des ordonnées plus un arc de cercle vers les  $x$  positifs et de rayon infini.

(Comme la fonction  $F$  est physique, son module doit s'annuler à l'infini et donc l'arc de cercle n'a pas besoin d'être décrit en pratique. Une étude harmonique sur l'axe des  $y$  avec  $j\omega$  suffit)

$F(j\omega)$  tourne autant de fois autour de l'origine qu'elle a de pôles dont la partie réelle est

<sup>17</sup> fonction complexe définie et dérivable (au sens complexe) en tout point d'un sous ensemble ouvert du plan complexe sauf en quelques points isolés qui sont chacun des pôles de la fonction.

Ici, c'est ok.



positive.

Pour avoir le critère de Nyquist, il suffit de tout re-translater car  $HTBO = F - 1$ . Bingo !

#### 5.4 Quelques questions auxquelles il faut savoir répondre :

- Pourquoi utiliser la transformée de Laplace et pas la transformée de Fourier ?  
La transformée de Laplace permet de traiter les régimes transitoires alors que la transformée de Fourier ne peut être employée que pour les régimes permanents.
- Quelles hypothèses sont nécessaires sur l'amplificateur opérationnel ?  
Bien préciser que l'on se place en régime linéaire ou en saturation, et que l'AO est supposé idéal.
- Comment se nomment les différents montages ?  
Précisez : amplificateur non-inverseur, filtre passe-bande, diviseur de tension, etc.
- Qu'est-ce que la bande passante d'un amplificateur non-inverseur ?  
Il s'agit d'un passe-bas, toutes les fréquences inférieures à la fréquence de coupure  $\omega_c$  passent. La bande passante est donc simplement  $\omega_c$ .
- Pourquoi y a-t-il un dépassement de consigne avec le moteur asservi en position ? Les systèmes asservis du premier ordre n'ont, en théorie, pas de dépassement de consigne, mais ce n'est pas le cas des systèmes du second ordre comme le moteur asservi. Pour avoir l'ordre du système, il faut regarder la chaîne directe dans son intégralité. En