LP23 – Aspect analogique et numérique du traitement d'un signal. Étude spectrale.

30 mai 2019

Lagoin Marc & Ramborghi Thomas

Niveau : L2

Bibliographie

✍ *Physique PSI – PSI*, Cap Prépa* , **V. Renvoizé** page 51 pour les rappels sur la décomposition sur la série de Fourier

✍ *Leçon de 2019 sur le sujet*, **Clémentine Rouvière** pour avoir une première idée sur le sujet de la leçon et prendre des définitions.

✍ *Mathématiques pour la physique et les physiciens !*, **Walter Appel** pour les définitions rigoureuses (et se préparer aux questions de maths s'il en a !) page 251

✍ *Physique tout-en-un PSI – PSI*, J'intègre*, **S. Cardini** chapitre 5 page 127 pour les partie 2 et 3 de la leçon.

✍ *Traitement des signaux et acquisition de données*, **Cottet** page 133 Je pense qu'il s'agit d'un bon complément pour la seconde partie pour les questions (il parle des produit de convolution et donne une justification du critère de Shannon en terme de recouvrement spectral). *Physique expérimentale*, **Jolidon** page 539 pour l'expérience de l'effet Doppler de la partie 3.

Prérequis

- ➢ Séries de Fourier (introduction mathématique)
- ➢ Signaux de base en électronique (créneau)
- ➢ Filtres de bases en électronique
- ➢ Effet Doppler

Table des matières

Introduction

Le signaux harmonique que vous avez déjà vu occupe une place importante en physique. En effet, nous allons voir que l'étude de ces signaux permets par généralisation celle de signaux plus complexe que nous rencontrons quotidiennement [1].

Comme expérience introductive, nous allons regarder le signal délivré par un diapason en l'enregistrant sur Latis Pro. Nous devons pour cela prendre de bon paramètres d'acquisitions sur lesquels nous reviendrons par la suite. Nous remarquons que le signal obtenu n'est pas une simple sinusoïde dont la fréquence est celle indiquée sur l'objet. Il ne s'agit pas d'une bizarrerie mais plutôt d'un cas général. En effet si nous prenons l'exemple d'un piano ou d'une guitare, nous constatons que le son généré par une note change au cours du temps. De plus, nous avons été amener à générer en électronique des signaux sous forme de créneau à l'aide d'un GBF. Là encore le signal est plus complexe qu'une simple sinusoïde.

Comment pouvons-nous les caractériser ? Il s'agit de la première question à laquelle nous allons tenter de répondre.

1 Description d'un signal

1.1 Rappel : décomposition en série de Fourier

Il existe déjà un certain type de signaux que vous savez caractériser : il s'agit des signaux périodiques. En effet tout signal périodique peut être décomposé grâce à un outil mathématique que nous avions appelé décomposition en série de Fourier. Pour rappel, si ce signal est une fonction f(t) de période T et de pulsation ω alors il peut être écrit de la forme :

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)\right) \tag{1}$$

$$\text{avec : } \forall n \geq 0, \quad a_n = \frac{T}{2}\int_0^T f(t)\cos(n\omega t)\mathrm{d}t \quad \text{et} \forall n \geq 1 : \quad b_n = \frac{T}{2}\int_0^T f(t)\sin(n\omega t)\mathrm{d}t \tag{2}$$

que les physicien préfère réécrire sous la forme :

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(c_n \cos(n\omega t + \varphi_n)\right) \tag{3}$$

Le terme constant c_0 représente la valeur moyenne de notre signal $\langle f(t)\rangle$.

Les termes $n \geq 1$ sont appelés harmoniques de rang n de la série.

L'harmonique $n = 1$ est appelé harmonique fondamentale de la série car il est de même période que la fonction.

Cette décomposition est très utilisée par les physiciens car elle permet une description visuelle du signal. Plutôt que de travailler avec un signal dont l'amplitude varie dans le temps, nous choisissons de passer dans un nouveau domaine, celui des fréquences. Nous définissons le spectre de Fourier d'une fonction périodique f(t) de période T qui est le graphe donnant les coefficients a_n et b_n présent dans le signaux et donc les fréquences.

Nous pouvons acquérir le signal créneau et faire sa transformé de Fourier (sans le dire) et observer les différentes fréquences présentes dans son spectre. Le signal étant périodique le spectre est discret.

Comment décrire un signal plus général qui n'est pas périodique ?

1. principe de superposition valable lorsque l'équation est linéaire

1.2 Introduction à la transformée de Fourier

Nous allons devoir introduire un nouveau formalisme : la transformée de Fourier. Quelle en est sa définition ?

Soit une fonction f (elle peut être réelle ou complexe) d'une variable réelle t et de carré intégrable (en pratique, c'est le cas pour toutes les fonctions physiques). Alors nous appelons transformée de Fourier de f la fonction complexe de la variable ν telle que, pour tout ν de $\mathbb{R}$:

$$TF[f](\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-2i\pi\nu t} \mathrm{d}t \tag{4}$$

Tout comme la décomposition en série de Fourier , la transformée de Fourier permet de justifier l'étude que vous avez fait des OPPH. En effet, nous avons vu que ces ondes n'ont aucune réalité physique, mais elles sont une base de décomposition des ondes et c'est ce que traduisent la DSE et la TF.

Nos pouvons regarder le spectre du signal émis par le diapason et montrer qu'il est, dans la réalité, continu. Nous allons finir cette sous-partie par donner quelques propriétés de la transformée de Fourier qui seront utiles par la suite. C'est une liste non-exhaustive et elle s'enrichissera au fil des cours.

- linéarité : $TF[af(t)\,+\,g(t)](\nu)\;=\;aTF[f(t)](\nu)\,+\,TF[g(t)](\nu)$
- translation : $TF[f(t)e^{2i\pi\nu_0 t}](\nu)\;=\;TF[f](\nu-\nu_0) \quad , \quad TF[f(t-\tau)]\;=\;e^{-2i\pi\nu\tau}\,TF[f](\nu)$

Les signaux que nous avons montré jusqu'ici (l'amplitude en fonction du temps) sont appelés signaux analogique. Ce sont des signaux pouvant prendre n'importe quelle valeurs dans un intervalle continu. Avec cette définition, nous nous rendons bien compte que l'obtention de la transformée de Fourier est confronté à un problème. En effet, un ordinateur accumule des informations discrètes sous forme de 0 et de 1 et il faudrait une infinité d'information discrète pour décrire une information continue !

Comment passons-nous d'un spectre à l'autre tout en restant fidèle au signal d'origine ? Ceci fera l'objet de notre prochaine partie.

Nous pouvons montrer cote à cote un signal analogique et numérique pour montrer qu'ils sont différents (ne pas prendre le numérique associé à l'analogique car les liens ne doivent pas encore être fait entre les deux à ce stade).

2 Conversion analogique-numérique de signaux

2.1 Échantillonnage du signal

Le signal analogique est convertis en signal numérique via un convertisseur analogique-numérique. Le signal obtenu n'est rien d'autre d'un tableau de valeur comprenant une valeur de temps et une valeur d'amplitude associée. Pour l'obtenir, le signal est mesurer à intervalle de temps réguliers : il s'agit du processus d'échantillonnage.

L'intervalle entre deux mesure en est une caractéristique et portent le nom de période d'échantillonnage. Elle ne doit pas être choisit au hasard ! Pour illustrer cela, nous pouvons montrer 2 exemples d'acquisition de la réponde d'un diapason, l'un respectant le critère de Shannon et l'autre non. Nous observons alors que dans un cas le signal ressemble au signal analogique (que l'on modélise par un signal numérique avec beaucoup de points) alors que dans l'autre cas il est fortement déformé.

Il nous faut un critère nous permettant en amont de savoir si l'échantillonnage sera bon. En effet certaines acquisitions sont lancer sur plusieurs jours en recherche et nous ne pouvons pas nous permettre de la recommencer plusieurs fois. Nous utilisons alors le critère de Nyquist-Shannon : un signal est correctement représenté à partir de ses échantillons, si la fréquence d'échantillonnage est supérieure à 2 fois la fréquence maximal de son spectre. Autrement dit, il faut que :

$$f_e > 2f_{max} \tag{5}$$

Nous pouvons le montrer qualitativement à la main au tableau. En exemple nous pouvons parler des CD musicaux. La fréquence d'échantillonnage a été fixée à 44100Hz, supérieur au double de la fréquence maximal audible par une oreille humaine, qui est de l'ordre de 20kHz.

En première conséquence, le critère de Shannon nous fixe la fréquence maximal dans notre signal accessible. Un autre paramètre qui doit être fixée sur Latis-Pro est le temps total d'acquisition T_{ac}. Ce dernier est est relié à la précision en fréquence Δf par la relation :

$$\Delta f \;=\; \frac{1}{T_{ac}} \tag{6}$$

Le temps étant l'inverse d'une fréquence, nous comprenons que plus le temps d'acquisition est long (grand Δt), plus nous réserverons deux fréquences proches (petit Δf). Ceci doit vous rappeler l'incertitude d'Heisenberg rencontré en mécanique quantique. Cependant un temps d'acquisition très long nécessite d'attendre long temps et devient vite gourmand en énergie. Il faudra donc trouver un compromis.

2.2 Quantification du signal

Nous avons vu comment, à partir d'un signal analogique, nous obtenons un signal discret en temps. Cependant, le système ne va pas pouvoir prendre toutes les valeurs instantanées à chaque intervalle de temps, pour des raisons de temps de réponse et de stockage des données. Comment discrétiser les valeurs d'amplitude atteintes par le signal ? Cette seconde étape de la conversion est appeler quantification.

Cette quantification est également dû au temps requis par le système pour enregistrer les données. Nous utilisons un échantillonneur-bloqueur qui va bloquer le signal durant la période d'échantillonnage.

Après avoir découpé le signal continu en échantillons, il va falloir les mesurer et leur donner une valeur numérique en fonction de leur amplitude. Pour cela, on définit un intervalle de N valeurs destiné à couvrir l'ensemble des valeurs possibles. Ce nombre N est codé en binaire sur 8,16,20 ou 24 bits suivant la résolution du convertisseur analogique/numérique. L'amplitude de chaque échantillon est alors représentée par un nombre entier. L'ordinateur codant à l'aide de bits, ce nombre de valeurs N est relié au nombre n de bits par la relation :

$$N \;=\; 2^n \tag{7}$$

Ainsi, un codage sur 8 bits correspond à 256 valeurs possibles, un codage sur 16 bits $= 2^{16} = 65\,536$ valeurs possibles, un codage sur 20 bits $= 2^{20} = 1\,048\,576$ valeurs possibles et un codage sur 24 bits $= 2^{24} = 16\,777\,216$ valeurs possibles.

Nous introduisons ensuite le pas de quantification nous donnant un renseignement sur l'incertitude de la valeur enregistrée par rapport à la valeur mesurée (elle même entachée d'erreurs en tout genre !). Il s'agit du rapport de l'excursion en amplitude sur le nombre d'intervalle N. Ainsi, pour un signal variant entre la tension V_0 et $-V_0$, le pas de quantification δV est donné par :

$$\delta V \;=\; \frac{2V_0}{2^N} \tag{8}$$

Pour estimer l'erreur commise lors de la quantification que nous appellerons bruit de quantification e(n), nous pouvons calculer la variance de ce bruit. Pour cela, nous supposons en première approximation que l'erreur est uniformément distribuée entre $-\frac{\delta V}{2} < e(n) < \frac{\delta V}{2}$ [2]. La probabilité totale d'erreur étant de 1, l'amplitude de la fonction de densité de probabilité de l'erreur de quantification p_e est de $\frac{1}{\delta V}$ pour $-\frac{\delta V}{2} < e(n) < \frac{\delta V}{2}$ et 0 ailleurs. Par conséquent la variance du bruit s'exprime par :

$$\sigma_e^2 \;=\; \int_{-\frac{\delta V}{2}}^{\frac{\delta V}{2}} e^2 \frac{1}{\delta V} \,\mathrm{d}e \;=\; \frac{\delta V^2}{12} \;=\; \frac{V_0^2\, 2^{-2n}}{3} \tag{9}$$

2. raisonnable pour les faibles valeurs de δV

Maintenant que nous avons comment étudier un signal et le numériser, nous allons pouvoir passer à un exemple de traitement. Généralement le signal d'intérêt est contenu dans un signal bruité et il faut donc arriver à le séparer de cette environnement. Pour cela nous devons filtrer les fréquences ne correspondant pas à notre signal. [a] *Vous aurez le temps de traiter cette exemple dans la suite de votre scolarité et nous vous proposons ici une autre utilisation du traitement du signal : il s'agit de l'étude de l'effet Doppler par détection synchrone. L'écart en fréquence entre l'émission d'un objet en mouvement et l'émission de ce même objet à l'arrêt est souvent trop faible pour pouvoir être directement mesuré. Nous allons donc devoir ruser en utilisant nos nouvelles connaissances pour y parvenir*

a. pour pouvoir répondre aux éventuelles questions, il est judicieux de lire le Jolidon page 545

3 Traitement d'un signal : étude de l'effet Doppler par détection synchrone

3.1 Commençons par la théorie :

Notre émetteur, initialement à l'arrêt, émet un signal de la forme :

$$v_p(t) = V_p \cos(f_p t) \tag{10}$$

Puis, lorsqu'il est mis en mouvement, la fréquence que nous détection n'est plus f_p mais est légèrement modifier par effet Doppler. Nous acquérons un signal que nous qualifierons de modulé (en fréquence ici) de la forme :

$$v_m(t) = V_m \cos\big((f_p + \delta f)t + \varphi\big) \tag{11}$$

Multiplions maintenant $v_p(t)$ et $v_m(t)$ à l'aide d'un multiplieur (analogique ou numérique). Le signal en sortie est de la forme :

$$s(t) = \kappa V_p V_m \cos\big((f_p + \delta f)t + \varphi\big)\cos(f_p t) \tag{12}$$

avec κ une constante. En utilisant le formalisme de la transformée de Fourier précédemment introduit, nous trouvons :

$$\begin{aligned}
TF[s](\nu) &= \kappa V_p V_m\, TF[\big(e^{i(f_p+\delta f)t+\varphi} + e^{-i(f_p+\delta f)t+\varphi}\big)\big(e^{if_p t} + e^{-if_p t}\big)] \\
&= \frac{1}{2}\kappa V_p V_m\, TF[\cos(\delta f + \varphi) + \cos(2f_p + \delta f + \varphi)] \\
&= \frac{1}{2}\kappa V_p V_m \left(TF[\cos(\delta f + \varphi)] + TF[\cos(2f_p + \delta f + \varphi)]\right)
\end{aligned}$$

Nous montrerons en TD que la transformer de Dirac est égale à la somme de deux delta de Dirac, l'un positif et l'autre négatif. En ne gardant que les positif, nous en déduisons que le spectre de notre signal après le multiplieur est composé de 2 pics : l'un à la fréquence δf l'autre à la fréquence $2f + \delta f$.

Le premier pic contient donc l'information de l'effet Doppler et nous allons donc chercher à l'extraire. Pour supprimer l'autre composante, nous allons effectuer un filtrage.

Le signal qui nous intéresse est ici de faible fréquence. Nous allons donc utiliser un filtre passe-bas. En première année, vous avez étudié une certains nombres de filtres, notamment des filtres passe-bas du premier et du deuxième ordre, et en passant en notation complexe, vous avez déterminé leurs fonctions de transfert, qui les caractérisent. Nous allons faire le lien aujourd'hui avec le formalisme de la transformée de Fourier.

En fait, la fonction de transfert vous donne déjà le comportement du filtre dans le domaine fréquentiel.

Nous pouvons prendre l'exemple du filtre passe-bas le plus simple que vous connaissez : le circuit RC (faire un schéma). Sa fonction de transfert est (faire le calcul si le temps le permet LOL) :

$$H(\nu) = \frac{S(\nu)}{E(\nu)} = \frac{1}{1 + jRC\omega} \tag{13}$$

Nous connaissons aussi son diagramme de Bode que nous pouvons montrer (il doit se trouver facilement sur internet). Connaissant la fonction de transfert du filtre, nous avons accès à la transformée de Fourier du signal de sortie suivant le signal en entrée :

$$TF[s](\nu) = H(\nu)TF[e](\nu) \tag{14}$$

Ainsi, nous voyons l'effet du filtre dans le domaine fréquentiel en superposant le spectre du signal d'entrée et le diagramme de Bode en gain du filtre utilisé : il coupe les hautes fréquences (c'est pas nouveau mais c'est plus pratique d'utiliser la transformée de Fourier pour le voir). Nous pouvons projeter la figure 2b) page 541 du Jolidon ou le dessiner au tableau.

3.2 Mise en pratique (si nous avons le temps) :

Nous allons utiliser le dispositif Jeulin P73.23, schématisé en figure 1. Le boitier Doppler par ultrasons permet d'obtenir directement le résultat de la détection synchrone, mais la qualité du signal émis est mauvaise, et il ne permet pas d'observer les étapes intermédiaires de la détection synchrone. Nous ne l'utiliserons donc que pour contrôler la vitesse du moteur.

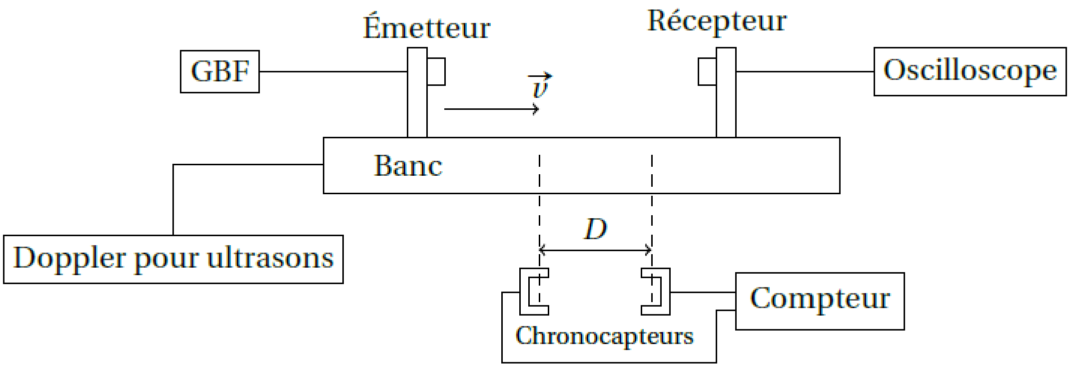

FIGURE 1 – Mesure d'un décalage en fréquence dû à l'effet Doppler. Cette figure, ainsi que l'ensemble de cette sous-partie, a été prise dans le poly de Jérémy Ferrant.

Alimentons le moteur du banc P73.23 à l'aide du boitier Doppler par ultrasons P73.23. Plaçons l'émetteur ultrasonore P73.23 sur la partie mobile du banc P73.23, et l'alimenter par une tension sinusoïdale de quelques volts à l'aide d'un GBF. Plaçons le récepteur P73.23 sur la partie fixe à droite du banc et observons le signal à ses bornes sur un oscilloscope. Cherchons la fréquence de résonance des transducteurs (autour de 40 kHz) pour s'y placer.
Nous allons mesurer la vitesse v du banc en mesurant le temps T mis pour parcourir une distance D séparant deux capteurs.

Plaçons deux chronocapteurs à fourche P96.27 le long du banc de telle sorte que la petite languette de la partie mobile du banc passe dans les fourches au cours du déplacement. Séparons les deux fourches d'une distance $D = 20$cm. Relions les fils Signal et Masse du premier capteur aux bornes Départ d'un chronocompteur P96.26, réglé sur Ouverture, et les fils du second capteur aux bornes Arrêt réglé sur Ouverture. Sélectionnons le mode chrono. Relions les deux fils Alimentation aux bornes rouges 3,5 V.

Faire avancer l'émetteur vers le récepteur en contrôlant la vitesse et le sens du déplacement avec le boitier (les câbles d'alimentation de l'émetteur ne doivent pas être tendus au cours du déplacement sinon ils risquent de ralentir le banc).

Mesurons le temps T entre le passage des deux fourches pour en déduire la vitesse du banc $v = \frac{D}{T}$ (quelques $\mathrm{cm\,s^{-1}}$). Mesurons la fréquence $f_{mesurée}$ du signal reçu par le récepteur.

Le décalage en fréquence δf dû à l'effet Doppler est de l'ordre de quelques Hz. Il n'est pas mesurable de façon directe à l'oscilloscope, d'où l'intérêt de la détection synchrone.

À l'aide d'un multiplieur P41.15, multiplions le signal reçu par le récepteur avec la tension du GBF. Filtrons le signal en sortie du multiplieur par un filtre passe-bas d'ordre 4 P41.21 (le filtre passe 1 présenté dans la leçon n'est pas assez fort) réglé sur 10 Hz et alimenté en 15 V.

Enfin, mesurons la fréquence δf des oscillations à la sortie du filtre, qui correspond au décalage en fréquence dû à l'effet Doppler. Utilisons le mode Défilement de l'oscilloscope et maintenons le signal affiché sur l'écran avec le bouton Run Stop pour réaliser la mesure (δf est de l'ordre du Hz).

Conclusion

Nous avons pu voir à travers cette leçon la décomposition d'un signal en fréquence en utilisant le formalisme de Fourier. Nous avons pu voir qu'en s'intéressant au spectre d'un signal il était facile de le manipuler (filtrage, modulation). Nous avons vu aussi ce qu'il faut avoir en tête lorsque nous numérisons un signal (critère de Shannon, bruit de quantification), opération fréquemment réalisée puisque nous travaillons de plus en plus sur des signaux numériques.

Maintenant que nous avons correctement étudié les signaux, nous pourrons nous intéresser à leur mise en place ainsi qu'à leur transport (petite ouverture sur l'électrocinétique donc à relire vite fait).