LP24 - Ondes progressives, ondes stationnaires

Niveau : L2

Prérequis :
- eq Maxwell
- méca du point
- électrocinétique
- décompo série de Fourier

Bibliographie :

Quaranta I
Cap prépa PC*-PC
Ondes II Hprépa Brebec
Berkeley III - Ondes Crawford

Introduction : Les ondes nous entourent et on en retrouve dans nombre de domaines de la physique → les vagues, les ondes radio, etc.... (bouchons) D'après la notion intuitive de ce que l'on pense être une onde on peut la définir pour commencer comme la propagation d'une perturbation.

Par cette leçons, nous ~~essayerons~~ introduirons le traitement de cet objet et on se focalisera plus particulièrement sur les ondes progressives et les ondes stationnaires.

I- L'équation d'onde

Quand on regarde une onde, les vagues à la surface de l'eau, on observe une évolution couplé de l'amplitude en fonction du temps. Le but ici est de montrer que les ondes peuvent être décrite par des équations d'ondes qui couples les variations spatiales et temporelles de la grandeur scalaire ou vectorielle qu'on appelle amplitude de l'onde.

↳ On va commencer par la lumière dans le vide

I-1 - Propagation de la lumière dans le vide

Vous savez que ce que nous appelons lumière est en fait un champ électromagnétique $(\vec{E}, \vec{B})$ dont les fréquence appartiennent au domaine visible

champ EM décrit par eq de Maxwell

$$\mathrm{div}\,\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \mathrm{div}\,\vec{B} = 0$$

$$\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \vec{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\vec{rot}(\vec{rot}(\vec{E})) = \vec{grad}(\mathrm{div}\,\vec{E}) - \Delta\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\,\vec{rot}\,\vec{B}$$

or $$\vec{grad}(\underbrace{\cancel{\mathrm{div}\,\vec{E}}}_{=0 \text{ vide}}) - \Delta\vec{E} = -\underbrace{\cancel{\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\vec{j}}}_{=0 \text{ vide}} - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$

d'où $$\boxed{\Delta\vec{E} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0}$$ eq de d'Alembert

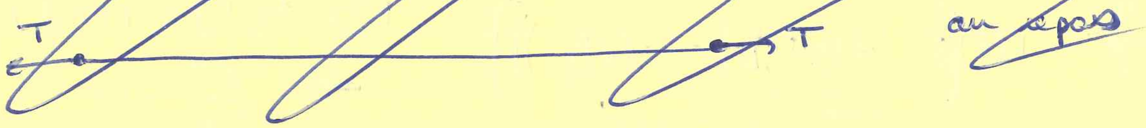
$$[\mu_0\varepsilon_0] = \left(\frac{1}{\text{vitesse}}\right)^2$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$$ = vitesse de la lumière dans le vide.

Idem en prenant $\vec{rot}(\vec{rot}\,\vec{B})$

I-2- Corde vibrante Cap prépa PC* p 559

~~. corde homogène de longueur L, de masse linéique μ~~
~~. Au repos corde horizontale tendue de sorte que le poids soit négligeable devant sa tension.~~

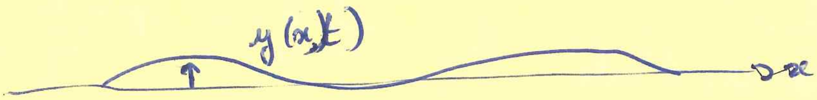


corde homogène de longueur L, masse linéique μ, section cste fixée entre ses 2 extrémités

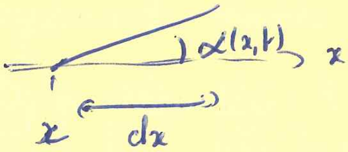
Au repos coordonnées des pts de la cordes : $(x, 0)$

On cherche à étudier les petits mvts de la corde autour de sa position d'équilibre.

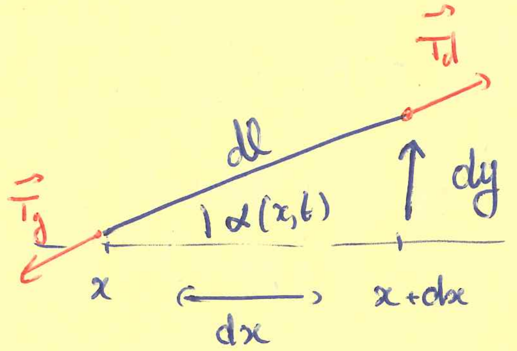
hypothèses : . corde inextensible abscisse x = cste et sans raideur



. angle $\alpha(x,t)$ que fait la tangente à la corde avec l'horizontale est infiniment petit



Isolons un élément de corde



$$dy = y(x+dx,t) - y(x,t) \simeq \frac{\partial y}{\partial x}\,dx$$

au premier ordre, $dl \simeq dx$ masse de l'élément $dm = \mu dl = \mu dx$

PFD dans R galiléen sur dm :

$$\mu dx\,\vec{a} = \vec{T_d} + \vec{T_g} \qquad \xrightarrow{\cdot \vec{e_x}} T(x+dx,t)\underbrace{\cos(\alpha(x+dx,t))}_{\simeq 1} - T(x,t)\underbrace{\cos(\alpha(x,t))}_{\simeq 1} = 0$$

$\cdot \vec{e_y}$

$$\mu dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T(t)\Big[\underbrace{\sin(\alpha(x+dx,t)) - \sin(\alpha(x,t))}_{\underbrace{\alpha(x+dx,t) - \alpha(x,t)}_{\simeq \frac{\partial \alpha}{\partial x}dx}}\Big] \qquad T(x+dx,t) = T(x,t) \rightarrow \frac{\partial T}{\partial x} = 0$$

or $\alpha \simeq \dfrac{\partial y}{\partial x}$

$$\rightarrow \mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T(t)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$ si tension cste (ordre 1)

Fcs $$\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{T_0}{\mu}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0}$$ eq d'Alembert à 1D

equation d'onde couplage entre variations spatiales et temporelles

$c = \sqrt{\dfrac{\mu}{T_0}}$ vitesse de l'onde

I-3- Point commun et analogies

. toujours 2 grandeurs couplées dont les eq de couplages font apparaître les cste fondamentales du pb, on arrive toujours à trouver une grandeur homogène à une vitesse au carrée.

→ On retrouve l'eq de d'Alembert ⟷ eq de propagation

↳ représente la propag d'une quantité physique, vitesse, tension, intensité, courant)

transparent

	Onde EM vide	onde vibrante	onde acoustique	câble coaxial
grandeurs couplées	$\vec{B}$ et $\vec{E}$	T_y et v_y	$\vec{v_1}$ et p_1	i et u
eq couplées	$\vec{rot}\,\vec{B} = \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ $\vec{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	$\frac{\partial v_y}{\partial x} = \frac{1}{T_0}\frac{\partial T_y}{\partial t}$ $\frac{\partial T_y}{\partial x} = \mu \frac{\partial v_y}{\partial t}$	$\text{div}\,\vec{v_1} = \chi_S \frac{\partial p_1}{\partial t}$ $\vec{grad}\,p_1 = \rho_0 \frac{\partial \vec{v_1}}{\partial t}$	$\frac{\partial i}{\partial x} = -\gamma\frac{\partial u}{\partial t}$ $\frac{\partial u}{\partial x} = -\lambda\frac{\partial i}{\partial t}$
impedance	$Z = \mu_0 c = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}$	$\mu c = \sqrt{\mu T_0}$	$\rho_0 c = \sqrt{\rho_0/\chi_S}$	$\lambda c = \sqrt{\frac{\lambda}{\gamma}}$
vitesse	$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$	$c = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}$	$c = \frac{1}{\sqrt{\rho_0\chi_S}}$	$c = \frac{1}{\sqrt{\gamma\lambda}}$
puissance	$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0}$	$P = -v_y T_y$	$P = -p_1\vec{v_1}$	$P = u\,i$
Densité d'NRJ	$\frac{1}{2}\varepsilon_0\vec{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0}\vec{B}^2$	$\frac{1}{2}\mu v_y^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{T_0}T_y^2$ homo sans raideur sans élasticité petite perturbations	$\frac{1}{2}\rho_0\vec{v_1}^2 + \frac{1}{2}\chi_S p_1^2$ incompressible transfo isentropique petite perturbation	$\frac{1}{2}\lambda i^2 + \frac{1}{2}\gamma u^2$

↳ Cherchons des solution à cette equation differentielle !

<u>Onde</u> : Champ scalaire ou vectoriel obeissant à une équation aux dérivées partielles couplant l'espace et le temps

↳ d'Alembert = un cas parmis tant d'autre

II - Ondes progressives

II - 1 - Résoudre l'eq d'onde.

On se place à 1D :

Soit ψ le champ scalaire representant l'onde.

$$\boxed{\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}}$$

Changement de variable : $u = x - ct$
$v = x + ct$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial u}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial \psi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t} = -c\frac{\partial \psi}{\partial u}$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial \psi}{\partial u}\right)\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2\psi}{\partial u^2}$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2\psi}{\partial u^2}$$

donc

$\psi(x,t) \rightarrow \psi(u,v)$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t}\Big|_x = \frac{\partial A}{\partial u}\Big|_v \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_x + \frac{\partial A}{\partial v}\Big|_u \frac{\partial v}{\partial t}\Big|_x$$

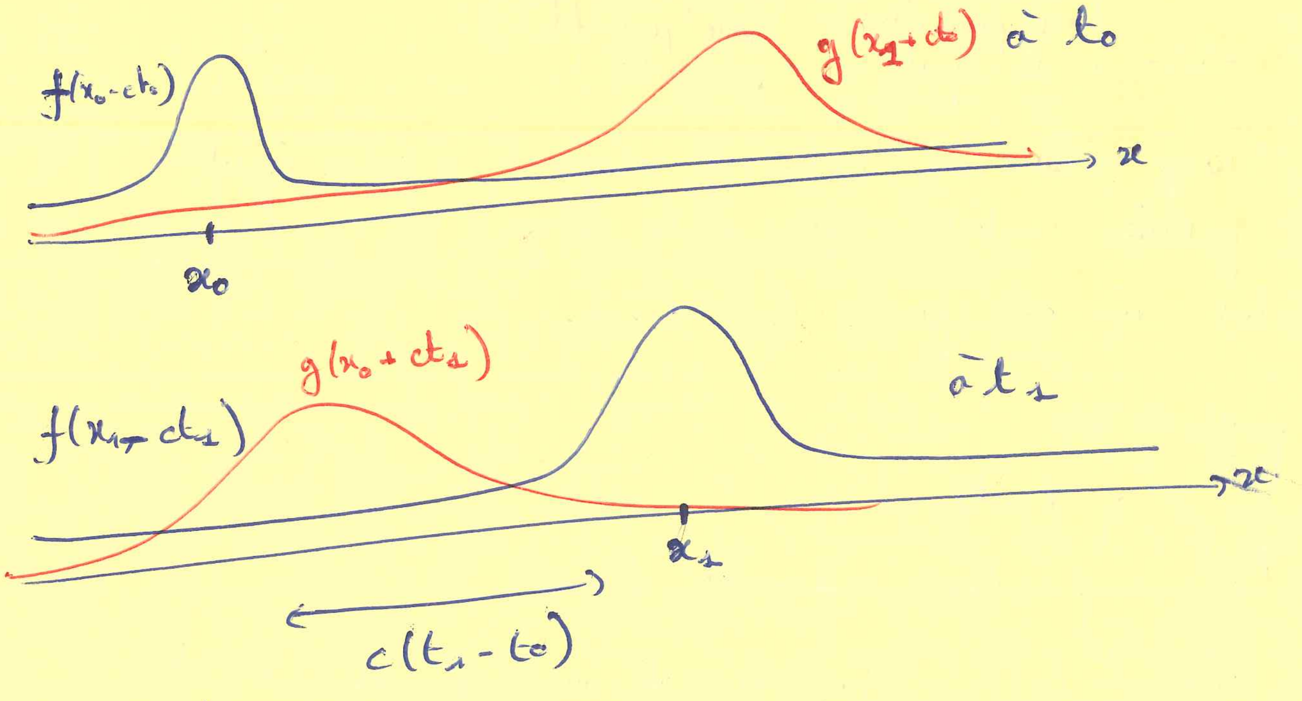
$$= \frac{\partial A}{\partial u}\Big|_v \times (-c) + \frac{\partial A}{\partial v}\Big|_u \times c$$

$$\hookrightarrow \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}\Big|_x = c^2 \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2} - 2\frac{\partial^2 \psi}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2} \right)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}\Big|_t = \frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 \psi}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2}$$

eq d'Alembert $\Rightarrow \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial u \partial v} = 0$

$$\Rightarrow \psi_{(u,v)} = g(v) + f(u)$$
$$= g(x+ct) + f(x-ct)$$



onde | qui se propage à c dans la direction des x croissant
champ scalaire |

f et g peuvent être quelconque $\rightarrow f(x-ct)$ et $g(x+ct)$ sont des ondes progressives.

onde progressive : On appelle onde progressive une onde qui se propage dans une direction repérée par un vecteur unitaire $\vec{u}$, sans se déformer, à la célérité c.

Cap prépa p 566

Son expression générale est $\boxed{f(\vec{u}\cdot\vec{r}-ct)}$

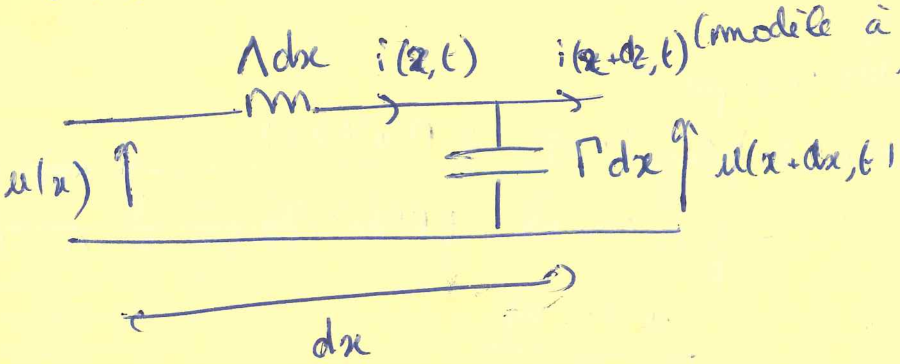
ex : $\vec{u} = +\vec{e_x} \rightarrow f(x-ct)$

$\vec{u} = -\vec{e_x} \rightarrow g(x+ct)$

II-2 - Impédance et énergie

Hprépa ondes p62

• On va ici discuter du cas du câble coaxial aussi déterminé par l'équation de d'Alembert dans le modèle électrocinétique du cable coaxial (modèle à cste répartie)



les grandeurs couplées sont i et u et vérifie toutes les 2 d'alembert

équations de couplage : $\dfrac{\partial u}{\partial t} = -\dfrac{1}{\Lambda}\dfrac{\partial i}{\partial x}$

$\dfrac{\partial i}{\partial t} = -\dfrac{1}{\Lambda}\dfrac{\partial u}{\partial x}$

si $i = f(x-ct)$ (onde plane progressive)

alors $\dfrac{\partial u}{\partial x} = -\Lambda\dfrac{\partial i}{\partial t} = \Lambda c f'(x-ct)$

$\Rightarrow \underbrace{u(x,t)}_{\text{sol de d'Alember}} = \underbrace{\Lambda c f(x-ct)}_{} + \phi(t)$

$\Rightarrow$ sol de d'Alembert donc cste dont on tient pas compte.

d'où $u(x,t) = Z\, i(x,t)$ avec $Z = \Lambda c = \sqrt{\dfrac{\Lambda}{\Gamma}} \approx 50\,\Omega$

relation de structure de l'onde progressive se propageant vers les $x \nearrow$

Si vers les $x \searrow$ on aurait $u = -Z i$

la relation de structure d'une onde plane progressive scalaire est une relation de proportionnalité. le coef de prop Z est appelé impédance propagative et ne dépend que du milieu de propag et pas du type d'onde qu'on veut propager à l'intérieur.

Case analogie à compléter $\longrightarrow$

<u>énergie</u>? Toujours sur le cours !

Energie stockée dans un élément de ligne de longueur dx ?

$\hookrightarrow$ NRJ accumulée dans inductance Λdx et capacité Γdx

$$\longrightarrow \quad d\mathcal{E} = \frac{1}{2} \Lambda dx \, i^2(x,t) + \frac{1}{2} \Gamma dx \, u^2(x,t)$$

densité d'NRJ linéique ?

$$e(x,t) = \frac{1}{2} \Lambda i^2(x,t) + \frac{1}{2} \Gamma u^2(x,t)$$

$$= \frac{1}{2} \Lambda i^2(x,t) + \frac{1}{2} \Gamma Z_c^2 i^2(x,t) = \Lambda i^2(x,t)$$

$$= \frac{u^2(x,t)}{\Gamma}$$

~~OPH~~ OPH vers $x \nearrow$

Puissance transmise par la partie gauche à la partie droite ?

$$\mathcal{P}(x,t) = u(x,t) i(x,t) \qquad \delta W = \mathcal{P}(x,t) \delta t$$

Soit v_e la vitesse de propag de l'énergie

$$\delta W = e(x,t) v_e \delta t \longrightarrow \mathcal{P}(x,t) = e(x,t) \delta t$$

$$\boxed{v_e = \frac{\mathcal{P}(x,t)}{e(x,t)} = \frac{Z_c i^2(x,t)}{\Lambda i^2(x,t)} = \frac{Z_c}{\Lambda} = c}$$

Pour une OPH

retour tableau analogie

II-3 - Le cas particulier des ondes harmonique.

Comme nous l'avons vu en cours (un autre jour), l'analyse de Fourier permet de décomposer toute fonction périodique en une somme de fonctions sinusoïdales.

Ainsi ces fonctions sinusoïdales méritent que l'on s'intéresse à elles.
↳ C'est d'autant plus vrai que l'équation d'onde de d'Alembert est linéaire ! On va donc traiter les ondes progressives harmoniques !

OPH : Une onde progressive est dite harmonique ou monochromatique si sa dépendance en temps est sinusoïdale

↳ notons ω la pulsation correspondante.

progressive $x\uparrow$

$$f(x,t) = f_0 \cos\Big(\underbrace{\omega\big(t - \tfrac{x}{c}\big)}_{\omega t - kx} + \varphi\Big)$$

progressive $x\searrow$

$$g(x,t) = g_0 \cos\Big(\underbrace{\omega\big(t + \tfrac{x}{c}\big)}_{\omega t + kx} - \varphi\Big)$$

↳ d'Alembert

$$-k^2 f - \frac{1}{c^2}(-\omega^2) f = 0 \Rightarrow \boxed{\omega = kc}$$ relation de dispersion.

k : pulsation spatiale $\quad k = \dfrac{\omega}{c} = \dfrac{2\pi}{T c} = \dfrac{2\pi}{\lambda}$

λ longueur d'onde.

d'autant plus intéressante lorsque l'éq d'onde n'est pas d'Alembert.

vitesse de φ : $v_\varphi = \dfrac{\omega}{k}$ vitesse à laquelle la phase de l'onde se propage

vitesse de groupe : $v_g = \dfrac{\partial \omega}{\partial k}$ vitesse à laquelle le paquet d'onde se déplace.

↳ on y reviendra

↳ ondes progressives solution de d'Alembert il y en a d'autres ?

↓ on montre un mode de Melde....

↳ il manque des trucs.

III - Ondes stationnaires

III - 1 - De nouvelles solutions ?

Sur l'exemple, on voit que les noeuds et les ventres ne se déplacent pas et que l'amplitude d'un point donné varie au cours du temps.
↳ On a envie de chercher $\psi(x,t) = f(x)\,g(t)$

Une onde stationnaire est une onde qui peut se mettre sous la forme $\psi(x,t) = f(x)g(t)$. Les grandeurs d'espaces et de temps sont découplés.
↳ d'après l'expérience elles semble solution de l'éq d'onde de d'Alembert.
↳ On injecte l'expression

$$f(x)\,g''(t) = c^2\,g(t)\,f''(x) \Leftrightarrow \underbrace{\frac{g''(t)}{g(t)}}_{f^o \text{ de } t} = \underbrace{c^2\,\frac{f''(x)}{f(x)}}_{f^o \text{ de } x} = -\omega^2$$

homogénéité. solut° physique

$$\rightarrow \quad g''(t) = -\omega^2 g(t) \quad \rightarrow \quad g(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$

$$f''(x) = -\underbrace{\frac{\omega^2}{c^2}}_{k} f(x) \quad \rightarrow \quad f(x) = B\cos(kx + \varphi)$$

$$\rightarrow \quad \psi(x,t) = AB\cos(\omega t + \phi)\cos(kx + \varphi)$$

Rq Pas de nouvelle solution car $\psi(x,t) = \frac{AB}{2}\left[\cos(kx - \omega t + \varphi - \phi) + \cos(kx + \omega t + \phi + \varphi)\right]$
↳ mais nouvelle base.

→ une onde stationnaire = 2 ondes progressive harmonique se propageant en sens opposé et de même amplitude.

III - 2 - Interprétation φque

Comment choisir telle ou telle base ?

Lorsque les conditions aux limites sont imposé, il vaut mieux travailler avec les ondes stationnaire.

Par exemple, si on considère la corde vibrante de longueur L fixées en ses 2 extrémités $\psi(x=0,t) = \psi(x=L,t) = 0$ et qu'on injecte dans $\psi(x,t) = \psi_0\cos(\omega t + \phi)\cos(kx + \varphi)$

alors $\psi(x=0,t) = 0 \Leftrightarrow \varphi = \frac{\pi}{2} + k\pi \; ; k \in \mathbb{Z}$

$\psi(x=L,t)=0 \rightarrow k_m = m\frac{\pi}{L}$; $m \in \mathbb{N}$

↳ quantification du vecteur d'onde

Idée très générale qu'on retrouvera dans de nombreuses situations en physique que ce soit EM ou ψ du solide (LP44)

↳ C'est ce qu'on appelle les modes propres (ici de la corde)

le mode $m=1$ est appelé fondamentale
$m>1$ harmonique

pt fixe au cours du temps = noeud.
– variations d'amplitude max = ventre

On peut montrer (exo) → distance noeud-noeud / ventre-ventre $= \frac{\lambda}{2}$

distance ventre-noeud $= \frac{\lambda}{4}$

voir Quaranta I p 227 si reste du temps

Conclusion : les ondes sont des objets récurrents à tous les domaines de la physique, méca flus, quantique, EM, ψ du solide, RG)

↳ les eq d'ondes sont pas toujours aussi simple que d'Alembert mais l'étude de cette dernière nous a permis de mettre en évidence 2 grandes base de sol° que l'on choisi suivant les condition imposé.

En regardant d'autres pb on verra de nouvelles eq d'onde qui implique des choses nouvelles par rapport à d'Alembert → dispersion / atténuation

Enfin mode propre important en construction pour éviter phénomène de résonance.