

LP26 - Propagation avec dispersion

June 14, 2019

Contents

1	Dispersion sans atténuation	3
1.1	Relation de dispersion	3
1.2	Paquet d'onde	4
1.3	Déformation du paquet d'onde	5
2	Dispersion dans le câble coaxial	6
2.1	Équation des télégraphistes	6
2.2	Condition de Heaviside	7
3	Ondes gravito-capillaires	9
4	Annexe	10
4.1	Indice dans un diélectrique	10
4.2	Relation de dispersion dans un diélectrique :	10
4.3	Dispersion normale et anormale	11
4.4	Quelques questions	11

- 2016 : Il s'agit d'une leçon qui porte sur la dispersion et non sur la propagation.
- 2015 : Le jury invite les candidats à réfléchir sur les notions de vitesse de groupe et de vitesse de l'énergie qui ne s'identifient pas forcément.
Jusqu'en 2013, le titre était : Propagation dans un milieu dispersif : vitesse de phase, vitesse de groupe. Paquets d'ondes planes et évolution. Exemples.
- 2012, 2013 : Les candidats doivent avoir réfléchi à la notion de vitesse de groupe et à son cadre d'utilisation.
- 2009, 2010 : Il convient de ne pas consacrer trop de temps à présenter les circonstances (rares), où la vitesse de groupe ne s'interprète pas comme vitesse de transport de l'énergie.
- 2007, 2008 : Les candidats ont à leur disposition une petite animation qui permet d'illustrer les notions délicates que sont la vitesse de phase et la vitesse de groupe.

Retour de corrections :

dans une telle leçon, d'exploiter les résultats de relation de dispersion atteints sur les différents exemples afin d'en déduire des informations sur la structure de l'onde ainsi obtenue (évanescence, atténuée,...).

Bon courage !

Références :

- J'intègre PC*, Sanz l'essentiel du cours.
- Physique expérimentale, Jolidon les expériences fort bien décrites
- Expériences de Physique au CAPES, Duffait pour le cable coaxial et les ondes gravitationnelles.
- Hydrodynamique Physique, Guyon pour les ondes gravito-capillaires.

Niveau : L3

Prérequis :

- Électromagnétisme dans le vide et dans les milieux diélectriques
- Loi des mailles loi des noeuds
- modèle de l'électron élastiquement lié
- relations de structures des composants usuels
- Représentations dans l'espace de fourier
- Bases de d'analyse vectorielle

Introduction

On contextualise la leçon par l'utilisation les ondes en télécommunication :

 **Expérience :**
 Réaliser une image à l'infini (avec un achromat) d'une fente éclairé par une lampe Quartz-Iode mettre un prisme sur le chemin du rayon sortant puis projeter la figure de dispersion sur un mur

Le phénomène de dispersion peut simplement s'observer expérimentalement lors du passage de la lumière au travers d'un prisme.

Historiquement, Sir Isaac Newton a ainsi permis de montrer que la lumière blanche était constituée de multiples rayons monochromatiques. Le prisme, possédant un indice optique qui varie avec la longueur d'onde (cf. loi de Cauchy), à donner le nom de dispersion à ce phénomène.

Aujourd'hui, la télécommunication occupe une place centrale dans l'échange d'information. Ces informations sont envoyées sous la forme d'ondes (électriques ou électromagnétique). Ces dernières ne doivent pas être trop déformées et doivent subir un minimum de pertes lors de leur transport. Contrôler la dispersion¹ des ondes dans ces milieux est donc crucial.

¹ **Attetnion :** Il y a deux façon d'obtenir une propagation avec dispersion :

- Soit on fait se propager notre onde librement dans un milieu dispersif qui va nous donner une relation $k(\omega)$. C'est ce que l'on va traiter dans cette leçon
- Soit on impose des conditions aux limite qui ont une influence sur les k possibles.

Nous verrons dans cette leçon comment se traduit le phénomène de dispersion lors de la propagation d'ondes. Et nous verrons comment il est possible d'éviter les pertes lors du transport d'information. Dans ce cadre, on fait ici l'étude du câble coaxial qui est notamment utilisé dans le transport de signaux électriques (ex : câbles ethernet) ainsi que dans les milieux diélectriques.

1 Dispersion sans atténuation

Dans cette section, on va s'intéresser à la propagation sans atténuation des ondes. C'est à dire qu'on va considérer k et ω réels tous les deux. Il ne faut pas oublier de le dire. Si non, on dira des choses imprécises, maladroitement voir fausses.

1.1 Relation de dispersion

On rappelle qu'une relation de dispersion est la donnée de la dépendance $k(\omega)$ obtenue en considérant une onde plane monochromatique (**OPPM**) dans l'équation de propagation.

Par exemple dans le cas des ondes électromagnétiques dans le vide : l'équation de propagation est l'équation de D'Alambert :

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E} - \Delta \vec{E} = 0 \quad c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \quad (1)$$

Posons une onde plane pour \vec{E} :

$$\vec{E} = A_0 \exp[i(\omega t - kx)] \vec{e}_y \quad (2)$$

Ce qui donne :

$$\boxed{k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}} \quad (3)$$

C'est une relation de dispersion.



Définition : dispersion

lorsque la vitesse de phase^a $v_\phi = \omega/k$ de l'onde dépend de sa fréquence, on dit qu'il y a dispersion.

Attention, la formule que l'on vient de donner est vraie seulement dans le cas où k et ω sont tous deux des réels.

^aest définie comme la vitesse de propagation des surfaces équiphasse de l'onde progressive.

Dans le cas précédent :

$$k = \pm \frac{\omega}{c} \quad \text{donc} : \forall \omega \quad v_\phi = c \quad (4)$$

Le vide n'est donc pas un milieu dispersif pour les ondes EM.²

²Il est peut-être important de préciser qu'il y a deux points de vue différents. k faut savoir passer de l'un à l'autre :

TR :

Cependant, on ne peut pas expérimentalement produire des ondes planes qui ne sont pas physiques (elles n'ont ni début ni fin, sont illimitées dans l'espace, transportent une énergie infinie...) pour tester cette relation. On va donc introduire la notion de paquet d'onde :

1.2 Paquet d'onde

Un paquet d'onde est une somme d'OPPH (un nombre infini³) donnant une fonction normalisable. Nous supposons que ces fonctions d'onde sont de la forme représentée en figure (1) gauche; c'est à dire qui représente un pic à la pulsations ω_0 dont la largeur (définie par exemple à mi-hauteur) est $\Delta\omega$.

On propose la qu'elle est décrite par une équation de la forme :

$$f(x, t) = P(x, t) \times G(x, t) = \exp \{i(\omega_0 t - k_0 x)\} G(x, t) \quad (5)$$

Où G désigne l'enveloppe du signal et P la porteuse.

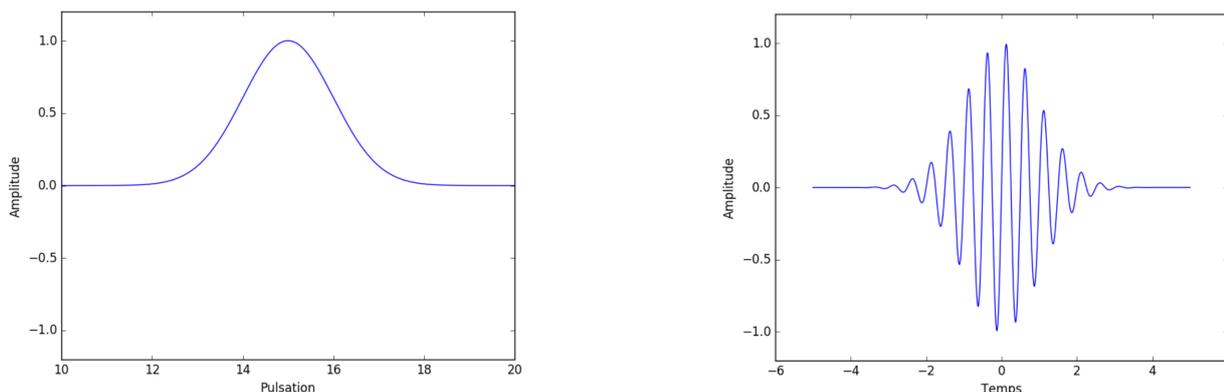


Figure 1: A gauche, enveloppe gaussienne. A droite : paquet d'onde correspondant.

On peut réécrire ce paquet d'onde avec la transformée de Fourier comme :

$$f(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} [A(\omega) \exp(i(\omega t - kx))] d\omega \quad (6)$$

On peut factoriser par $P(x, t) = \exp(i(\omega_0 t - k_0 x))$:

$$f(x, t) = \exp \{i(\omega_0 t - k_0 x)\} \int_{-\infty}^{+\infty} [A(\omega) \exp \{i((\omega - \omega_0)t - (k - k_0)x)\}] d\omega \quad (7)$$

- **Point de vue de l'Opérateur :** la pulsation ω est imposée par forçage du milieu. Elle est donc réelle. C'est k qui va alors s'adapter par la relation de dispersion. Il peut alors être complexe.
- **Point de vue de l'Observateur :** k est mesurée par un mesure de longueur d'onde de l'onde reçue. k est donc pris réel. La relation de dispersion impose alors ω qui peut être complexe.

Du coup, les deux descriptions sont équivalentes et il faut bien en avoir conscience.

Ici, sauf mention contraire, on se place dans le premier cas en supposant ω réel.

³Cohen tome 1 page 24/25

donc :

$$G(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} [A(\omega) \times \exp \{i((\omega - \omega_0)t - (k - k_0)x)\}] d\omega \quad (8)$$

On se placera dans un premier temps dans le cas où k est réel : c'est à dire qu'il n'y a pas d'atténuation par le milieu⁴.

On peut maintenant supposer que le k dépend de ω par une relation de dispersion, et que $\frac{\Delta\omega}{\omega_0} \ll 1$ où $\Delta\omega$ est la largeur typique de l'enveloppe dans l'espace des fréquences. On peut écrire un développement limité de k à l'ordre 1 :

$$k(\omega) = \underbrace{k(\omega_0)}_{=k_0} + (\omega - \omega_0) \left(\frac{\partial k}{\partial \omega} \right)_{\omega_0} \quad (9)$$

En réinjectant cette expression dans l'expression de l'enveloppe on a :

$$G(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[A(\omega) \times \exp \left\{ i \left((\omega - \omega_0)t - \left(k_0 + (\omega - \omega_0) \left(\frac{\partial k}{\partial \omega} \right)_{\omega_0} - k_0 \right) x \right) \right\} \right] d\omega \quad (10)$$

$$G(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[A(\omega) \times \exp \left\{ i(\omega - \omega_0) \left(t - \left(\frac{\partial k}{\partial \omega} \right)_{\omega_0} x \right) \right\} \right] d\omega \quad (11)$$

donc :

$$G(x, t) = G \left(x = 0, t - \left(\frac{\partial k}{\partial \omega} \right)_{\omega_0} x \right) = G \left(x = 0, t - \frac{x}{v_g} \right) \quad (12)$$

On se rend ici compte qu'on a une vitesse de déplacement de l'enveloppe⁵ :

$$v_g = \frac{1}{\left(\frac{\partial k}{\partial \omega} \right)_{\omega_0}} = \left(\frac{\partial \omega}{\partial k} \right)_{k_0} \quad (13)$$



Animation python : propagation sans dispersion

On peut présenter l'animation donnée par le code `Etalement-paquet-ondes.py` tiré de la banque de donnée de l'agrégation.

Le paquet d'onde possède une enveloppe gaussienne d'écart type 1, de vitesse de groupe $v_g = 1$ (u.a) égale à la vitesse de phase $v_\phi = 1$ (u.a). Bien préciser qu'il s'agit de l'amplitude de l'onde en fonction du temps puisqu'il n'y a pas d'axe!



TR :

On voit donc que la vitesse de propagation de l'enveloppe (vitesse de groupe) et celle de la porteuse, n'est pas forcément la même. De plus, dans certain cas, la vitesse de groupe dépend encore de ω . Cela peut conduire à une déformation du paquet d'onde.

1.3 Déformation du paquet d'onde

⁴On verra plus loin que tout reste pareil mais en prenant la partie réelle de k .

⁵Se transforme facilement juste en développant k par rapport à ω à l'ordre 1

Animation python : propagation avec dispersion

On peut présenter de nouveau l'animation donnée par le code Etallement-paquet-ondes.py tiré de la banque de donnée de l'agrégation. Il suffit de changer une ligne de code pour avoir une vitesse de phase différente de la vitesse de groupe. Ceci revient, dans le fichier python à commenter la ligne 50 et à décommenter la ligne 64.

Le paquet d'onde possède alors ici une enveloppe gaussienne d'écart type 1, de vitesse de groupe $v_g = 1$ (u.a) égale à la vitesse de phase $v_\phi = 1,5$ (u.a). Bien préciser qu'il s'agit de l'amplitude de l'onde en fonction du temps puisqu'il n'y a pas d'axe!

On peut montrer en poussant le DL à l'ordre 2 qu'un paquet d'onde gaussien s'étalera si v_g dépend de ω ⁶

2 Dispersion dans le câble coaxial

Experience :

Nous pouvons envoyer un pulse carré dans un câble coaxiale libre à l'autre extrémité. En regardant le temps séparant le pulse incident et le pulse réfléchis nous pouvons remonter à la différence de groupe. Il s'agit du Δt entre les 2 maxims. La mesure donne environ $2 \cdot 10^8$ m/s. On peut en profiter pour montrer qu'il y a déformation.

2.1 Équation des télégraphistes

Un câble de transmission peut-être modélisé par le schéma équivalent de la figure (2) :

Une application de la loi des mailles et de la loi des noeuds donne, sur une tranche⁷ dx du câble :

$$\frac{\partial i}{\partial x} = -gu - \Gamma \frac{\partial u}{\partial t} \quad (16)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -ri - \Lambda \frac{\partial i}{\partial t} \quad (17)$$

On peut découpler les variables $i(x, t)$ et $u(x, t)$ en écrivant l'égalité suivante :

$$\frac{\partial}{\partial x}(17) = -r \times (16) - \Lambda \frac{\partial}{\partial t}(16)$$

⁶En effet :

$$k(\omega) = k_0 + (\omega - \omega_0) \underbrace{\left\{ \left(\frac{\partial k}{\partial \omega} \right)_{\omega_0} + (\omega - \omega_0) \left(\frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2} \right)_{\omega_0} + \dots \right\}}_{=1/\alpha(\omega)} \quad (14)$$

Si on reprend le calcul précédent, on trouve :

$$G(x, t) == G \left(x = 0, t - \frac{x}{\alpha} \right) \quad (15)$$

Il y a alors un étalement du paquet d'onde si $\alpha(\omega)$ ce qui survient quand $\left(\frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2} \right)_{\omega_0} \neq 0$ ou pour tout ordre supérieur non nul en fait.

⁷Je pense qu'il s'agit de prendre une tranche de taille $dx \ll T_0 \times C$ pour pouvoir dire qu'on est dans l'ARQS sur chaque tranche. C'est une démarche semblable à l'équilibre thermodynamique local.

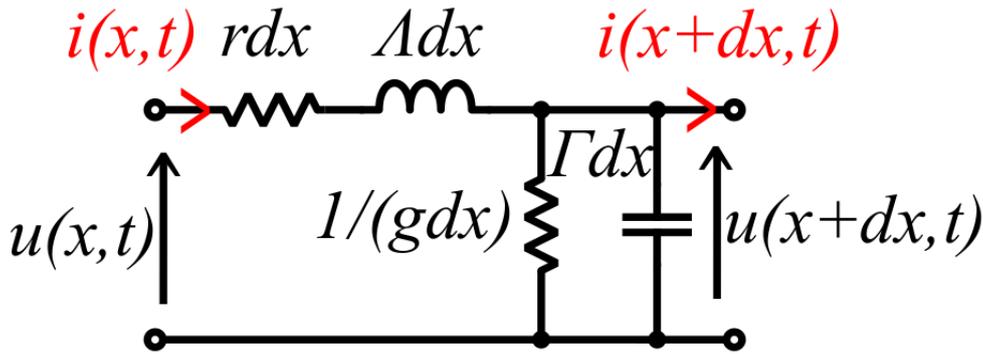


Figure 2: Schéma équivalent d'un câble coaxial, modèle complexe. A basses fréquences, on peut enlever les résistances

Ce qui nous permet d'obtenir l'équation de propagation dans le câble coaxial, l'équation des télégraphistes :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} u = \Gamma \Lambda \frac{\partial^2}{\partial t^2} u + (r\Gamma + g\Lambda) \frac{\partial}{\partial t} u + rgu \tag{18}$$

Calculons maintenant la relation de dispersion en injectant dans l'équation une OPPM, $u(x, t) = u_0 \exp \{-j(\omega t - kx)\}$ on obtient donc :

$$k^2 = \Gamma \Lambda \omega^2 + j\omega(r\Gamma + g\Lambda) - rg \tag{19}$$

Qu'on peut reformuler plus commodément :

$$k^2 = \Gamma \Lambda \omega^2 \left(1 + j \frac{g}{\omega \Gamma} \right) \left(1 + j \frac{r}{\omega \Lambda} \right) \tag{20}$$

On vient de trouver une relation de dispersion compliquée qu'on va essayer de commenter :

- L'expression de k n'est pas aisée à établir dans le cas général. En tous cas, il peut être un nombre complexe.
- la simulation montre un étalement du paquet d'onde.
- $v_\phi(\omega)$ donc on est en présence d'un milieu dispersif *a priori*.

TR :
 Cette relation de dispersion est fort compliquée à interpréter directement. On va donc se placer dans un cas particulier pour exhiber les propriétés de cette relation de dispersion.

2.2 Condition de Heaviside

Un câble peut être construit de telle manière que $g\Lambda = r\Gamma$. Il s'agit de **la condition de Heaviside**.

On remarque alors que la relation de dispersion prend la forme :

$$\boxed{k^2 = \Gamma \Lambda \omega^2 \left(1 + j \frac{g}{\omega \Gamma} \right)^2} \quad \boxed{g\Lambda = r\Gamma} \tag{21}$$

On va alors choisir k et en tirer un certain nombre de propriétés :

- Donc :

$$k = \pm\sqrt{\Gamma\Lambda} \left(1 + j\frac{g}{\omega\Gamma}\right) \omega = \pm(k' - j k'') \quad \begin{cases} k' = \mathcal{R}e[k] \\ -k'' = \mathcal{I}m[k] \end{cases} \quad (22)$$

On va étudier les conséquences de cette relation dans ce cas particulier. Si on considère $k = k' - j k''$ une onde plane : $u = u_0 \exp \{j(\omega_0 t - k(\omega_0)x)\}$:

$$u = u_0 \exp \{j(\omega_0 t - (k' - j k'')x)\} = u_0 \exp \{j(\omega_0 t - k'x + j k''x)\} \quad (23)$$

$$\boxed{u = u_0 \exp \{-k''x\} \exp \{j(\omega_0 t - k'x)\}} \quad (24)$$



Précisions : Vitesse de phase corrigée et atténuation

- **Vitesse de phase** : On remarque que seule la partie réelle de k intervient dans la phase de l'onde. On va donc reprendre la définition donnée en début de leçon et la généraliser :

$$\boxed{v_\phi = \frac{\omega}{\mathcal{R}e[k]}} \quad (25)$$

- De même pour la vitesse de groupe et l'étalement du paquet d'onde, on regarde $\mathcal{R}e[k]$. Tous les résultats obtenus dans la première section restent valables.
- On remarque que la **partie imaginaire de k intervient dans l'évolution de l'amplitude de l'onde**. Ici, on voit que l'amplitude de l'onde décroît avec la propagation dans le milieu. On parle d'**atténuation^a/amplification**.

^aLe terme d'atténuation est un terme général. Si l'onde est plane et se propage quand même dans le milieu, on peut parler absorption. Mais il faut alors s'assurer que de l'énergie est bien transmise au milieu par l'onde.

Par exemple, une onde évanescence est atténuée mais pas absorbée. En effet, le bilan de puissance montre que la puissance est totalement réfléchiée.

Une onde sphérique est aussi atténuée en $1/r$ sans que absorption n'intervienne.

- La vitesse de phase est $\boxed{v_\phi = \sqrt{\Gamma\Lambda}}$ C'est celle qu'on trouvait dans le modèle simple du câble coaxial. Le milieu est non dispersif.
- La vitesse de groupe vaut également $\boxed{v_g = \sqrt{\Gamma\Lambda}}$. On a affaire à un milieu où les paquets d'ondes ne se déforment pas.

Le câble coaxial ayant été largement utilisé au XXème siècle pour transmettre des signaux analogiques. Pour un signal analogique aussi bien la phase que la "forme" du signal est essentiel à l'information. D'où la nécessité de minimiser la dispersion quitte à s'accommoder d'un effet d'atténuation. C'est pourquoi les constructeurs ont beaucoup cherché à s'approcher au plus près du critère de Heaviside.



TR :

Nous venons de voir un système dont la dynamique n'était pas décrite par l'équation de d'Alembert à travers le câble coaxiale. Cependant il s'agissait d'une équation dérivée obtenu en ajoutant de petites perturbations (résistance parasite). Nous allons donc voir en troisième partie un exemple très différents : les ondes gravito-capillaires.

3 Ondes gravito-capillaires

L'obtention de l'équations régissant la dynamique, de la relation de dispersion et la discussion des hypothèses sont très bien faites dans le Jolidon page 503 et nous ne le détaillerons pas ici. Nous pouvons également consulter le livre de Guyon, Hulin et Petit page 256 pour plus d'explication.

Je vais simplement un peu détailler comment obtenir la forme de la solution générale (équation 7 dans le Jolidon) :

Nous cherchons une solution sous la forme d'ondes planes progressives se propageant le long des x croissants sous la forme :

$$\varphi(r, t) = f(z) e^{i(kx - \omega t)} \quad (26)$$

Nous injection alors cette expression dans celle de Laplace (eq 1) et nous retrouvons l'équation d'onde :

$$\frac{d^2 f}{dz^2} - k^2 f = 0 \quad (27)$$

Par intégration, nous trouvons :

$$f(z) = A e^{kz} + B e^{-kz} \quad (28)$$

La condition verticale de la vitesse est nulle au fond du récipient (eq 4) nous donne $A = B$. D'où :

$$\varphi(r, t) = A \cosh(kz) e^{i(kx - \omega t)} \quad (29)$$

Il y a des vidéos (eau profondes) très intéressantes que j'ai toué sur Youtube pour illustrer la propagation des paquets d'onde :

[Ici](#) pour un paquet d'ondes sphériques 2D et

[Ici](#) pour le sillage d'un bateau.

Conclusion

Durant cette leçon, nous avons mis en évidence par l'étude de signaux réels les phénomènes de dispersion liés à des milieux (à la fois conducteurs et diélectriques). Ces phénomènes de dispersion vont être très important à comprendre car ils limitent le transport de signaux en télécommunication. Les signaux réels peuvent ensuite être représenté par des paquets d'ondes. Premièrement un signaux réel (paquet d'ondes) s'étale au fur à mesure d'une dispersion. Deuxièmement il se propage à une vitesse dite de groupe qui est généralement associé au transport de l'information et de l'énergie. Nous verrons dans une prochaine leçon l'influence des conditions aux limites dans un milieu fini sur la dispersion⁸.

⁸Se référer à la leçon LP27

4 Annexe

4.1 Indice dans un diélectrique

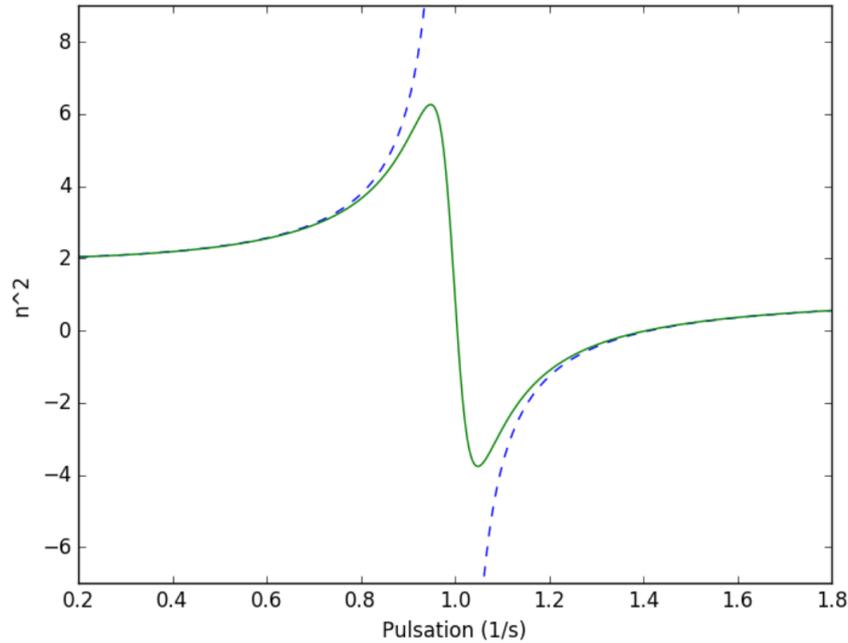


Figure 3: En pointillé le tracé de la formule de Sellmeier et en ligne pleine le tracé de la formule de Kettler-Helmholtz (un autre modèle)

4.2 Relation de dispersion dans un diélectrique :

Les équations régissant les ondes électromagnétiques dans le milieu que nous considérons (ici c'est le verre) sont les équations de Maxwell en particulier ici Maxwell-Faraday et Maxwell-Ampère. Tout est fait dans la leçon sur les diélectriques LP28.

Sachant:

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B}) = \mu_0 \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad \text{div}(\vec{D}) = \vec{0} \quad \vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}$$

On trouve :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E})) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}(\vec{E})) - \Delta \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (30)$$

Donc :

$$\Delta \vec{E} - \frac{\epsilon_r}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \quad (31)$$

Considérons maintenant la propagation d'une OPPM dans le diélectrique,

$$\vec{E} = E_0 \exp \{j(\omega t - kx)\} \vec{e}_y \quad (32)$$

On en déduit alors la relation de dispersion suivante :

$$k^2 = \frac{n^2}{c^2} \omega^2 \quad (33)$$

La question que l'on doit maintenant se poser est comment n dépend-t-il de ω ?⁹

4.3 Dispersion normale et anormale



Formule de Rayleigh :

De manière assez générale, on peut facilement exprimer la **formule de Rayleigh** :

$$v_g = v_\phi + k \frac{\partial v_\phi}{\partial k} = v_\phi - \lambda \frac{\partial v_\phi}{\partial \lambda} \quad (35)$$

On définit alors deux régimes de dispersion sont ainsi définis.

- La dispersion est dite normale si $v_g < v_\phi$, c'est à dire si $\frac{\partial v_\phi}{\partial \lambda} > 0$
- La dispersion est dite anormale si $v_g > v_\phi$, c'est à dire si $\frac{\partial v_\phi}{\partial \lambda} < 0$

NB : Dans le cas de dispersions anormales il est possible de trouver des phénomènes qui ne semblent pas physique comme des vitesse de groupe dépassant la célérité de la lumière dans le vide ou des vitesses de phases négatives. Ce ne sont évidemment pas des lois fondamentale de la physique qui sont violé mais bien les interprétations qu'on a des vitesses de phase ou des vitesses de groupe qui ne sont plus valide. Notons que ces zones sont des zones de forte absorption, donc les phénomènes de dispersion y sont très compliqué à observé à cause des faibles distances de propagation des ondes à ces fréquences dans le milieu.

4.4 Quelques questions

- Pourquoi utilise-t-on habituellement une décomposition en séries de Fourier pour caractériser une onde plane et une transformée de Fourier dans le cas d'un paquet d'onde ?
Une onde plane est périodique, elle peut se décomposer en séries de Fourier et son spectre est donc discret. Un paquet d'onde n'est pas périodique, et on ne peut pas le décomposer en séries de Fourier.
Il faut alors introduire la notion de transformée de Fourier afin de remonter à son spectre continu.
- Pourquoi considère-t-on les noyaux immobiles dans le modèle de l'électron élastiquement lié ?
La masse d'un électron étant très inférieure à celle d'un noyau, son mouvement peut être négligé. C'est l'approximation de Born-Oppenheimer.

⁹Il y a au moins deux modèles semi-phénoménologiques : Cauchy ($n = A + \frac{B}{\lambda^2}$) et équation de Sellmeier

$$n = 1 + \frac{B_1 \lambda^2}{\lambda^2 - C_1} + \frac{B_2 \lambda^2}{\lambda^2 - C_2} + \frac{B_3 \lambda^2}{\lambda^2 - C_3} \quad (34)$$

C'est ce qu'on utilise ici.

- Quelle est l'origine du terme de frottement fluide dans le modèle de l'électron élastiquement lié ?
Le terme de frottement fluide est introduit de manière phénoménologique dans le modèle. Il permet de prendre en compte la dissipation par rayonnement de l'électron, ainsi que les collisions dans un gaz ou les interactions avec les vibrations du réseau cristallin dans un solide.
- Que représentent les parties réelles et imaginaires d'un vecteur d'onde ?
On décompose habituellement le vecteur d'onde de la forme $k = k' + ik''$. Sa partie réelle k' est liée à la dispersion de l'onde, et sa partie imaginaire k'' correspond à l'évolution de son amplitude au cours de sa propagation. Si $k'' < 0$, le milieu est absorbant, c'est le cas de la plupart des milieux. Si $k'' > 0$, le milieu est amplificateur, les cavités laser en sont un exemple.
- Comment sont reliés les phénomènes de dispersion et d'absorption ?
La partie réelle k' et la partie imaginaire k'' d'un vecteur d'onde sont reliées par les relations de Kramers-Kronig.
- Est-ce que la vitesse de propagation de l'énergie est toujours égale à la vitesse de groupe ?
Non, ce n'est pas le cas lorsque les milieux sont fortement dispersifs et avec un étalement important. La résonance d'une onde dans un diélectrique est un bon contre-exemple, car la vitesse de groupe est alors supérieure à la célérité de la lumière.
- Citer un exemple d'onde se propageant dans un milieu dispersif mais pour laquelle sa dispersion est compensée.
Un soliton (ou onde solitaire) se propage sans se déformer dans un milieu dispersif à cause des non-linéarités du milieu. C'est une solution de l'équation de Korteweg-de Vries qui modélise par exemple les ondes à la surface de l'eau dans le cas d'une faible profondeur.
- Pour les exemples présentés, la pulsation ω est réelle et le vecteur d'onde k est complexe, est-ce que l'inverse est possible ?
Lorsque l'on fixe la pulsation ω d'une onde, on étudie sa propagation dans l'espace en remontant à son vecteur d'onde k , qui peut être complexe. Mais par analogie il serait également possible de fixer son vecteur d'onde k réel, puis d'étudier l'évolution temporelle de l'onde avec sa pulsation ω , qui pourrait être complexe.