LP27 - Propagation guidée des ondes

June 14, 2019

Contents

- 2014 : Les candidats doivent avoir réfléchi à la notion de vitesse de groupe et à son cadre d'utilisation.
  Jusqu'en 2013, le titre était : Propagation guidée. Exemples et applications.

- 2012, 2013 : Les notions de modes et de fréquence de coupure doivent être exposées. On peut envisager d'autres ondes que les ondes électromagnétiques.

- 2010 : La propagation guidée ne concerne pas les seules ondes électromagnétiques ou optiques. Il faut insister sur les conditions aux limites introduites par le dispositif de guidage.

- 2009 : La propagation guidée ne concerne pas les seules ondes électromagnétiques ou optiques.

- 2007 : Il s'agit d'une nouvelle leçon consacrée à la propagation guidée des ondes et à ses applications, importantes dans le domaine des télécommunications par exemple.

Bon courage !

Références :

- Tout ce qui est fait ici est fait et en mieux dans le cours d'Etienne Thiberge
- Pour les considérations de vitesse de phase et de groupe, je te renvoie à la LP26.
- Physique Tout-en-un MP-MP* p555, Sanz, pour le guide plan
- OEM dans le vide et milieux conducteurs, Garing pour le guide plan
- Ondes acoustiques, A. Chaigne Idées sur le guide d'onde acoustique, mais les calculs ne sont pas tous justes.

Niveau : L3

Prérequis :

- Conducteurs parfait
- conditions de passage pour E et B.
- Ondes électromagnétiques
- Dispersion de type Klein-Gordon
- Vitesse de phase et de groupe

Quelques choses à savoir :

"Le confinement modifie la structure de l'onde et donc les résultats connus pour un milieu illimité ne sont pas valables"

La dispersion intermodale est due au confinement et peut être éliminée en s'assurant que le guide soit monomode. La dispersion intramodale est lié au milieu, à la pureté du matériau dans lequel l'onde se propage, mais aussi aux conditions aux limites !!

une fibre à saut d'indice n'est plus utilisée dans la pratique à part pour des applications monomodes très restreintes.

Introduction

Nous avons étudié précédemment les ondes dans différents milieux, et nous avons découvert la propriété propagative des ondes. La propagation des ondes joue un rôle fondamental dans le transport d'information, notamment dans le domaine de la télécommunication.
Nous avons déjà étudié le cas de la propagation libre notamment entre une antenne relais et un téléphone portable. Nous avons constaté que, même dans un milieu sans absorption, l'amplitude d'une onde et L'énergie transmise diminuent avec la distance entre la source et le récepteur de l'onde. Ceci pose un problème pour transporter de l'information sur les grandes distances.

Experience :

On met un émetteur (alimenté par un GF 1 V 40 kHz) et un récepteur d'ultrasons à 2m l'un de l'autre. Sur oscilloscope en sortie du récepteur, on n'observe rien. Lorsqu'on intercale un tube en PVC entre les deux, on récupère un signal en sortie : on a guidé une onde acoustique et optimisé la transmission d'énergie.

Un guide d'onde est un dispositif qui permet de transporter une onde d'un point (émetteur) à un autre (récepteur) selon un chemin donné, avec le moins de pertes possible. On peut ainsi transmettre de l'information. Nous nous interesserons plus particulièrement aux ondes électromagnétiques car leur transmission est plus rapide, et donc plus exploitée, mais l'étude se généralise à tout type d'onde.

1 Première approche des guides d'onde : la fibre à saut d'indice

En premier exemple de guide d'onde, nous allons étudier la fibre à saut d'indice composé d'un coeur d'indice n_1 entouré d'une gaine d'indice n_2 (faire un dessin ou en prendre un sur internet). On propose ici une approche excessivement simplifiée. Elle permettra d'appréhender les concepts de modes et de dispersion.

On suppose que l'on se place dans le cadre de l'optique géométrique comme on a pu le faire lors de l'étude de la cavité Fabry Perrot. On ne s'intéressera pas aux conditions d'entrée de la fibre qui dépendent de son ouverture numérique. L'onde (plane) en entrée va se propager comme un rayon lumineux donné. Il est réfracté dans le coeur de la fibre avec un angle de réfraction interne α. Dans un premier temps, on se demande comment faire en sorte que le rayon puisse arriver en bout de fibre de longueur L grande. On suppose que le milieu du coeur est transparent (n_1 réel)

1.1 Conditions aux limites :

Ce rayon peut se réfracter et se réfléchir aux interfaces, en suivant les lois de Snell-Descartes. Pour que le guidage dans le coeur soit efficace, il ne faut pas que l'amplitude de l'onde soit diminuée par la partie réfractée : **on doit être dans les conditions de la réflexion totale**. Les matériaux sont donc choisis tels que

$$\boxed{n_1 > n_2} \tag{1}$$

et l'angle α est tel que :

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \boxed{cos(\alpha) > \frac{n_2}{n_1}} \tag{2}$$

On voit bien qu'en choisissant de tels paramètres, le rayon lumineux devrait arriver en bout de fibre. Il est pertinent ici de faire un petit dessin illustrant avec Snell-Descarte comment nous obtenons une réflexion totale.

L'utilisation d'interfaces (de conditions aux limites) judicieusement choisies permet le guidage d'une onde, c'est-à-dire son confinement dans une région restreinte de l'espace et sa propagation dans une direction donnée.

1.2 Condition de phase

A présent, on associe une **onde plane monochromatique** à chaque rayon lumineux : (cela revient par exemple en optique géométrique) à considérer que la source est à l'infini). On considère alors que le vecteur d'onde $\overrightarrow{k}$ est tangent au rayon lumineux[1].

Dans la fibre, il y a des interférences entre toutes les ondes qui s'y propagent. On peut faire l'analogie avec la figure en transmission d'une cavité Fabry-Perrot. Ainsi, **l'amplitude de l'onde en sortie n'est non nulle a priori que si le déphasage entre chacune des ondes issues des multiples réflexions**[2] **est multiple de** 2π :

Pour chercher la différence de phase, on considère l'origine des phases quand l'onde à gauche entre dans la fibre. Rappelons que les plans d'onde sont orthogonaux à la direction du rayon (théorème de Malus).

On peut par facilité construire des sources fictives comme c'est fait sur la figure (1). qui sont au croisement entre le plan d'entrée et le prolongement du rayon réfléchi deux fois qu'on veut faire interférer.

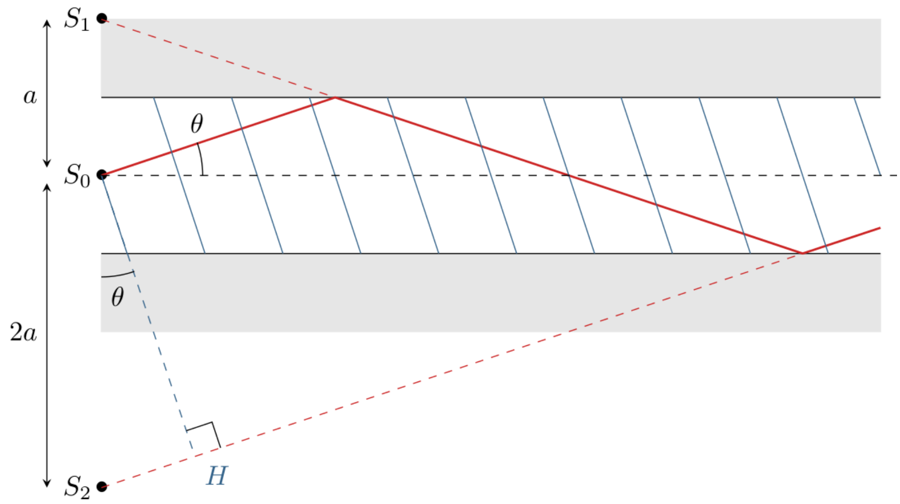


Figure 1: Calcul de la différence de marche. Figure issue du poly de cours d'Etienne Thiberge p 49. Pour garder les même notation que dans la leçon, l'angle θ correspond à l'angle α.

[1] Oui, je sais, le rayon lumineux il suit le vecteur de Poynting mais pour une onde plane dans un milieu isotrope, il est suivant $\overrightarrow{k}$.
En effet, dans un milieu biréfringent que l'on attaque pas suivant un axe optique, le vecteur de Pointing n'est plus nécessairement colinéaire à $\overrightarrow{k}$ (onde extraordinaire)

[2] Etienne Thiberge commente dans son cours : "Ce raisonnement peut étonner, puisque les interférences qu'on étudie ici ont lieu entre des plans d'ondes "qui ne se voient pas". Sa pertinence sera justifiée ultérieurement, , lors de l'étude analytique de ce modèle de guide [quand on traitera l'onde entre deux plaques conductrices]. D'ici là, admettons que la condition d'interférences constructives permet bien de trouver la bonne condition de propagation ... mais pas plus.
Cette approche interférentielle ne dit rien en effet sur ce qu'il advient d'une onde qui serait forcée en entrée et qui ne pourrait pas se propager dans le guide."

La différence de marche acquise entre deux rayons est[3] :

$$\delta = 2n_1 a\sin(\alpha) \qquad\qquad \Delta\phi = \frac{4\pi}{n_1\lambda}an_1\sin(\alpha) \tag{3}$$

La condition de phase : $\Delta\phi = p\times 2\pi$ avec $p\in\mathbb{N}$ devient[4] donc[5] :

$$\boxed{\sin(\alpha_p) = p\frac{\lambda}{2a} \qquad\qquad avec\ :\ p\in\mathbb{N}} \tag{4}$$

Les angles d'incidence permettant la propagation dans la fibre prennent des valeurs discrètes. Chaque valeur de l'indice p définit un **mode de propagation de la fibre optique**[6] [7].

1.3 Propriétés des modes de réflexion

On peut découvrir avec ce modèle simple deux propriétés très générales des modes de propagation d'un guide d'ondes.

1.3.1 Comportement passe-haut

Tout d'abord, l'angle α_p n'est défini que si :

$$\sin(\alpha_p) < 1 \iff \lambda < \frac{2a}{p} \iff \omega \geq \frac{\pi c p}{a} \tag{5}$$

On voit apparaître une comportement passe-haut : il faut dépasser une certaine **pulsation de coupure** pour que le mode existe.
Bien entendu, ce comportement est un peu particulier pour le mode 0, qui existe toujours dans ce modèle, et correspond tout simplement à une onde dirigée le long de l'axe du guide ($\alpha_0 = 0$).

1.3.2 Dispersion inter modale

Ensuite, on peut s'intéresser au temps mis par le mode p pour traverser un guide d'onde de longueur L. La vitesse de propagation dans le milieu est fixe, mais il est facile de voir à partir de la figure précédente que la longueur parcourue est plus longue. Pour le mode p, on parcourt la longueur effective $L_p = \frac{L}{\cos(\alpha_p)}$. On a donc une vitesse effective pour le mode p donnée par :

$$c_p = c\cos(\alpha_p) \tag{6}$$

[3]On notera bien l'usage de n_1 dans la définition de k qui intervient dans la phase : $k = \frac{2\pi}{\lambda_0}$ où λ_0 est la longueur d'onde dans le vide. On a alors : $c = \frac{c_0}{n_1}$ et $f_0 = f$ donc $\lambda_0 = n_1\lambda$
Ce facteur se compense dans le calcul de la phase

[4]On a pris $\mathbb{N}$ et pas $\mathbb{Z}$ car on choisit que α est par convention positif.

[5]Ce n'est ni plus ni moins que la condition donnant la position des pics d'intensité pour un réseau, ce qui n'a rien d'étonnant. On peut montrer l'équivalence avec Malus et le principe de retour inverse de la lumière. Il suffit de continuer à construire les sources secondaires comme sur la figure (1)

[6]Cette définition est cohérente avec la définition générale d'un mode.
Un mode de propagation de la fibre est bien une solution propagative, harmonique (l'onde est mono- chromatique à λ fixée), et compatible avec les conditions aux limites, ici prises en compte par le biais des interférences.

[7] Cependant, on fait systématiquement l'abus de langage de caractériser un mode de propagation par la seule donnée de p, oubliant le caractère harmonique (il faudrait aussi donner λ.
C'est ce que l'on fera par la suite en parlant "du mode p de la fibre" pour désigner l'ensemble des ondes harmoniques dont la propagation dans la fibre est caractérisée par l'indice p.

avec c la célérité dans le milieu.
Cette vitesse est dépendante du mode, et va donc entraîner une nouvelle source de dispersion : la **dispersion inter-modale**. On en discutera plus en détail un peu plus tard dans la leçon, mais on peut déjà distinguer les deux sources de dispersion habituelles :

- **dispersion intra-modale :** le fait que c dépend de λ. Ceci est principalement une caractéristique du au materiau que l'on retrouverait également dans le cas de la propagation libre dans le milieu d'indice $n_1(\lambda)$

Dispersion intra-modale :

Elle "caractérise la différence de vitesse effective de propagation de deux ondes harmoniques portées par un même mode (p fixé) mais de pulsations différentes. Elle est due à la fois aux propriétés intrinsèques du milieu de propagation et aux conditions aux limites."[a]

[a] En effet, dans toute cette leçon, on considère des propagations dans le vide (qui est intrinsèquement non dispersif et pourtant on a toujours trouvé de la dispersion intra-modale. Elle est due aux conditions aux limites.

- **dispersion inter-modale :** les différents modes ont des vitesses différentes.

Dispersion inter-modale :

" [Elle] caractérise la différence de vitesse effective de propagation de deux ondes harmoniques de même pulsation (ω fixée) mais portées par des modes différents. Elle est due aux conditions aux limites imposées à l'onde."

TR :

Cette première approche naïve nous donne une idée de ce que l'on va trouver en général pour un guide d'ondes : les conditions aux limites vont entraîner l'apparition de modes discrets à une fréquence suffisamment élevée, ces modes se propageant à une vitesse différente.
Cependant, si on veut pouvoir vraiment les caractériser, il va être nécessaire d'utiliser les vraies équations de propagation et de pousser les calculs un peu plus en détail.

2 Guide d'onde électromagnétique plan/plan

Physique Tout-en-un MP-MP* p555, Sanz, OEM dans le vide et milieux conducteurs, Garing

On v ici essayer d'être plus quantitatif en utilisant les équations de propagation.

2.1 Position du problème :

Nous allons étudier une onde électromagnétique (EM) qui se propage **dans le vide**[8], mais qui est **confinée entre deux plans conducteurs infinis supposés parfaits**, situés en $x = 0$ et $x = h$. La direction de propagation se fait selon l'axe (e_z) .

[8] La dispersion due au milieu diélectrique qui composerait notre fibre optique complique l'étude, et n'est pas propre aux phénomènes de guidage.

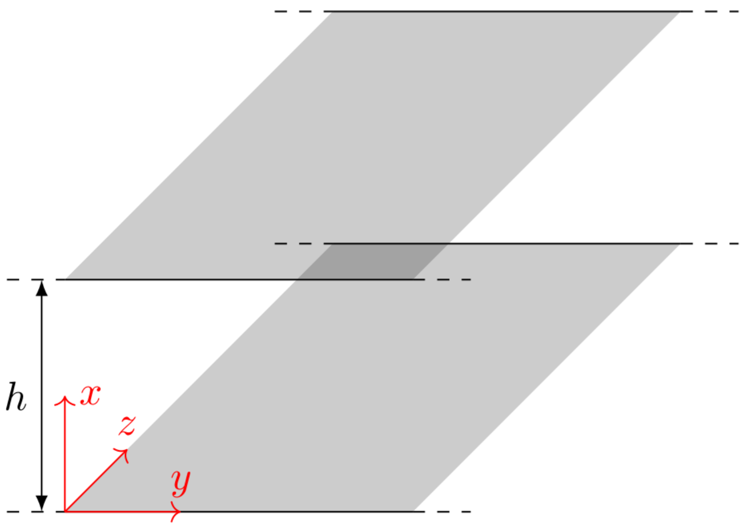


Figure 2: Schéma du guide d'onde étudié. Figure issue du poly de Clément Cabart

Cette propagation est régie par l'équation de d'Alembert :

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\overrightarrow{E} - \overrightarrow{\Delta}\overrightarrow{E} = 0 \tag{7}$$

Des conditions limites apparaissent à cause de la présence des plaques. En effet, dans un conducteur parfait[9], le champ électromagnétique est donc nul à L'Intérieur et ici, ni courant ni charges surfaciques par symétrie du problème [10] , Nos conditions aux limites sont donc :

- Continuité du champ E tangent à l'interface :

$$E_y(x=0) = E_y(x=h) = 0 \qquad E_z(x=0) = E_z(x=h) = 0 \tag{8}$$

- Continuité du champ B normal à l'interface :

$$B_x(x=0) = B_x(x=h) = 0 \tag{9}$$

2.2 Structure de l'onde électromagnétique

On a une invariance dans la direction y, et les équations de Maxwell prennent la forme :

$$(\mathcal{MG}) \quad div(\overrightarrow{E}) = \boxed{\partial_x E_x + \partial_z E_z = 0} \qquad (\mathcal{M}\Phi) \quad div(\overrightarrow{B}) = \boxed{\partial_x B_x + \partial_z B_z = 0} \tag{10}$$

$$(\mathcal{MF}) \quad \overrightarrow{rot}(\overrightarrow{E}) = -\partial_t \overrightarrow{B} \iff \boxed{\begin{pmatrix} -\partial_z E_y \\ \partial_z E_x - \partial_x E_z \\ \partial_x E_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\partial_t B_x \\ -\partial_t B_y \\ -\partial_t B_z \end{pmatrix}} \tag{11}$$

$$(\mathcal{MA}) \quad \overrightarrow{rot}(\overrightarrow{B}) = -\frac{1}{c^2}\partial_t \overrightarrow{E} \iff \boxed{\begin{pmatrix} -\partial_z B_y \\ \partial_z B_x - \partial_x B_z \\ \partial_x B_y \end{pmatrix} = \frac{1}{c^2}\begin{pmatrix} \partial_t E_x \\ \partial_t E_y \\ \partial_t E_z \end{pmatrix}} \tag{12}$$

[9] La réflexion totale s'accompagne d'une onde évanescente dans la gaine, qui transporte de l'énergie hors du guide. Pour ne pas avoir à en tenir compte, disons que les plans sont faits de conducteur parfait

[10] $j = \sigma E$, σ tend vers $+\infty$ pour un conducteur parfait et j borné donc $E = 0$.

Modes Transverse électriques :

On voit apparaître deux familles d'ondes dont les équations sont découplées :

- **Le groupe transverse électrique (TE)** avec $\vec{E}$ de la forme $\vec{E} = E\,\vec{e_y}$, en bleu, couple les composantes E_y, B_x et B_z. La valeur de chaque composante est entièrement déterminée par la valeur du champ E_y.

- **Le groupe transverse magnétique (TM)** avec $\vec{B}$ de la forme $\vec{B} = B\,\vec{e_y}$, en rouge, couple les composantes E_x, E_z et B_y. La valeur de chaque composante est entièrement déterminée par la valeur du champ B_y.

Au vu de la linéarité du problème, on pourra toujours trouver une solution quelconque comme étant la somme de solutions appartenant à chacun des groupes.

Le découplage complet des composantes des champs n'est pas général, mais en revanche l'importance des modes TE et TM l'est. On retiendra que **Les modes TE et TM forment toujours une base des modes de propagation d'un guide d'onde uniaxe.**

Un mode qui n'est ni TE, ni TM, mais une combinaison linéaire TE+TM est appelé **mode hybride**.

TR :

On ne va étudier en détail qu'un seul groupe dans la suite, le groupe TE, mais l'étude du groupe TM suit les mêmes idées.

2.3 Résolution de l'équation d'onde

L'équation de d'Alembert pour la composante E_y est :

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}E_y - \Delta E_y = 0 \tag{13}$$

Ici, on va rechercher une solution propagative selon z, mais sans être une onde plane :

$$E_y(x,z,t) = f(x) \times \exp\left(i\left\{\beta z - \omega t\right\}\right) \tag{14}$$

En injectant dans l'équation d'onde, on a alors directement :

$$\frac{d^2}{dx^2}f(z) + \underbrace{\left(\frac{\omega^2}{c^2} - \beta^2\right)}_{=\alpha^2} f(z) = 0 \tag{15}$$

On pose, par définition, $\alpha^2 = \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \beta^2\right)$. Pour l'instant, on ne dit rien sur le caractère réel ou non de α et β !

L'équation est alors facile à résoudre :

$$f(x) = F_1 \exp\left(i\left\{\alpha x\right\}\right) + F_2 \exp\left(-i\left\{\alpha x\right\}\right) \tag{16}$$

Enfin, utilisons nos conditions aux limites. Sur les deux parois qui nous intéressent ($x = 0$ et $x = h$) on doit avoir $E_y = 0$. On peut facilement déduire de ces conditions :

$$F_1 = -F_2 \quad et \quad \alpha h = p\pi \quad avec \ : \ p \in \mathbb{N} \tag{17}$$

donc :

$$f_p(x) = F_P \sin\left(\frac{p\pi}{h}x\right) \quad avec \ : \ p \in \mathbb{N} \tag{18}$$

Donc enfin :

Modes Transverse électriques :

La solution pour p donné est le mode TE_p du guide que l'on étudie.

$$\boxed{E_{p\,y}(x,z,t) = F_P \sin\left(\frac{p\pi}{h}x\right) \times \exp\left(i\left\{\beta_p z - \omega t\right\}\right)} \quad avec \ : \ p \in \mathbb{N} \tag{19}$$

où[a] :

$$\boxed{\beta_p^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \left(p\frac{\pi}{h}\right)^2 \quad avec \ : \ p \in \mathbb{N}} \tag{20}$$

Les variables x et z jouent un rôle dissymétrique vis-à-vis de l'onde guidée. Cette dernière est en effet **progressive dans la direction** x et **stationnaire dans la direction** z.

Les modes de propagation TE sont entièrement caractérisés par un unique entier p non nul. Un **mode**[b] particulier est TE_p .

Remarquons que chacun des termes de (21) est positif, ce qui contraint les valeurs permises de p à ω fixée.
Une onde de fréquence donnée ne peut se propager que dans un nombre fini de modes.

[a] **!!!!!** Bien que l'onde soit harmonique, β n'est pas un vecteur d'onde car l'onde n'est pas plane. Par conséquent, il n'est ***a priori*** pas possible d'utiliser la relation de structure de l'onde plane en faisant jouer à β le rôle du vecteur d'onde.

[b] Le cas $p = 0$ conduit à un champ nul partout et est donc sans intérêt

Pour obtenir B, il faut utiliser $-\partial_t \overrightarrow{B} = \overrightarrow{rot}(\overrightarrow{E})$ puis intégrer la relation :
On trouve une onde qui a des composantes sur e_x et e_z. B n'est donc pas transverse avec E. On n'a bien pas une onde plane !!!

A retenir :

Les conditions aux limites modifient considérablement la structure de l'onde. Autrement dit, la structure d'une onde ne dépend pas que du milieu de propagation[a] .

[a] Un point important est l'existence d'une onde Transverse Électro-Magnétique (TEM), pour laquelle E et B sont tous les deux orthogonaux à la direction de propagation. Lire le poly de cours d'Etienne Thiberge p 55.

2.4 Propriétés des modes TE_p

Étudions plus en détail les propriétés de ces modes[11], et en particulier la relation de dispersion.

$$\boxed{\beta_p^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \left(p\frac{\pi}{h}\right)^2 \quad avec\ :\ p \in \mathbb{N}} \tag{21}$$

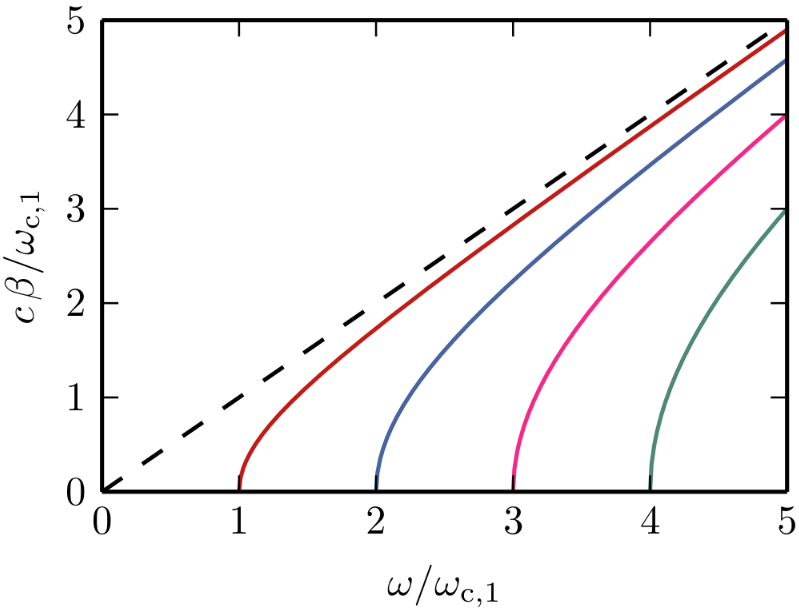
On reconnaît une relation de dispersion de type Klein-Gordon, mais qui dépend de l'indice p du mode.
On voit notament que la constante de propagation β_p associée au mode p est réelle uniquement si la pulsation ω est suffisamment élevée.
On pose alors la pulsation de coupure :

$$\omega_{c,p} = p\frac{\pi c}{h} \qquad avec\ :\ p \in \mathbb{N} \tag{22}$$

On a donc propagation du mode p si $\omega > \omega_p$, tandis qu'on aura une onde évanescente dans le cas inverse. Cette pulsation est la même que celle que l'on avait trouvé avec notre modèle simplifié, mais maintenant on peut savoir ce qui arrive à une onde qui ne peut pas se propager. Dans le cas propagatif, plusieurs remarques sont à faire :

- **La propagation est dispersive**[12], avec une relation de dispersion représentée en figure (3)) :

$$\omega(\beta) = \sqrt{c^2\beta^2 + \omega_p^2} \tag{23}$$



On y représente β en fonction de ω normalisées respectivement par c et la pulsation de coupure du premier mode $\omega_{c,1} = \pi c/h$

- dispersion du vide libre : Noir
- Dispersion dans le guide :
  - rouge : $p = 1$
  - bleu : $p = 2$
  - violet : $p = 3$
  - vert : $p = 4$

Figure 3: Dispersion du guide plan/plan. Figure issue du poly d'Etienne Thiberge p 55

La propagation d'une onde dans le guide dépend grandement de sa pulsation ω :

Pour chaque mode, on a une équation de Klein-Gordon[13] de fréquence de coupure $\omega_{c,\,p}$[14]

[11]Pour TM_p, on a la même relation de dispersion mais avec un autre indice q et des $\omega_{c,q}$ différents

[12]si on s'y intéresse à ω fixée, on trouve la dispersion intermodale, alors que si on s'y intéresse à p fixé, on étudie la dispersion intramodale.

[13]Clément nous dit : "Relation de dispersion de Klein-Gordon. Décrit en MQ le champ associé à une particule de spin 0. Seul le boson de Higgs vérifie cette propriété."

[14]Rappel :

Cependant, ici, du fait de la présence de tous ces modes, la physique est bien plus complexe :

Interprétation de la figure (3)

Il suffit de choisir ω sur l'axe des abscices puis remonter et voir si on croise une courbe colorée et combien on en croise. Les croisements donnent les valeurs réelles de β_p solution et les modes p correspondants. Si pas de croisement, alors β est imaginaire pur.

- Si $\omega < \omega_{c,\,1}$, alors aucune onde ne se propage dans le guide (sous la forme TE). On obtient que β est imaginaire pur et que **l'onde est évanescente.**
- Si $\omega_{c,\,1} < \omega < \omega_{c,2}$, **l'onde n'est propagée que par le mode fondamental**. En effet, les autres modes étant encore évanescents car $\omega < \omega_{c\,p} \quad \forall \ p > 1$, la propagation ne se fait que dans le mode $p = 0$. **Le guide est alors dit monomode pour l'onde considérée.**
On voit alors que la vitesse de phase (pente de la courbe) dépend de la pulsation, On a donc **propagation avec dispersion (intramodale) mais sans atténuation**, car β est réel.
- Si $\omega_{c,p} < \omega < \omega_{c,p+1}$, l'onde est propagée par p modes et sans atténuation.
Le guide est alors multimode pour l'onde en question.
Cependant, la propagation se fait avec une double dispersion, à la fois intramodale (les courbes ne sont pas des droites) et intermodale (les courbes ne donnent pas les mêmes β.

On trouve que les vitesses de phase et de groupe sont alors, pour le mode p :

$$v_\phi = \frac{\beta}{\omega} = c \times \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\omega_{c,\,p}^2}{\omega^2}}} \qquad\qquad v_g = \frac{\partial \omega}{\partial \beta} = c \times \sqrt{1 - \frac{\omega_{c,\,p}^2}{\omega^2}} \tag{24}$$

Un paquet d'onde dans le mode p se propage donc plus lentement que le même paquet dans le vide. On retrouve de plus exactement la formule de la vitesse naïve pour la vitesse de groupe !

On a vu que le guide pouvait donc transmettre toute l'énergie d'un signal sans pertes (dans ce modèle un peu simplifié). Cependant, cette transmission se fait au détriment de la qualité du signal. En effet, la dispersion intermodale peut entraîner de grosses déformations des paquets d'ondes que l'on envoie. **Pour une utilisation pratique, les dimensions du guide doivent être adaptées à l'onde que l'on souhaite guider. On aime souvent utiliser des guides monomodes.**

3 Application : Le cable coaxial

Cette partie devra être faite sur transparent.

Le câble coaxial permet d'avoir une composante du champ laissée libre ! Ce n'est pas tout

- Pour $\omega > \omega_{c,\,p}$, il y a propagation dans le mode p.
- Si non, On a une onde évanescente : pas de propagation dans le milieu.

C'est en prérequis alors pas nécessaire de la rappeler à fait direct à voir, car on a une invariance non pas par translation mais par rotation dans ce cas.

3.1 Ondes TEM dans le câble coaxial

Rappelons comme représenté figure 3.12 qu'un câble coaxial est constitué de **deux conducteurs parfaits cylindriques coaxiaux**, de rayons a et $b > a$, séparés par un isolant. Pour s'affranchir des propriétés diélectriques de **l'isolant, on l'assimile au vide**.

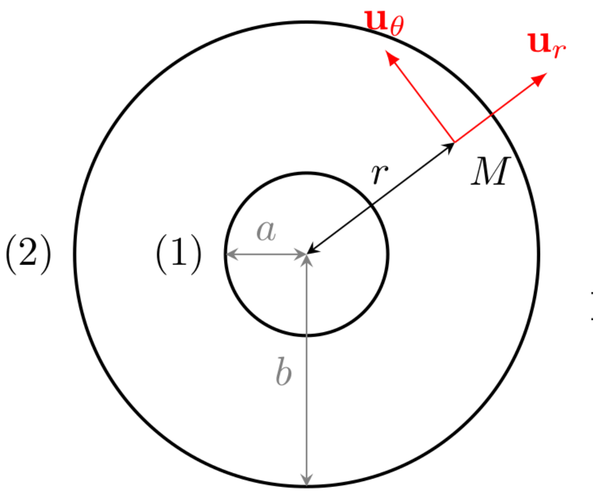


Figure 4: Schéma en coupe d'un cable coaxial. (Oz) est orienté vers nous. Figure issue du poly de Clément Cabart

L'équation de propagation est toujours l'équation de D'Alembert.

Le câble coaxial est donc un guide d'ondes électromagnétique, dont le mode fondamental est un mode TEM vérifiant la relation de dispersion d'une onde plane[15] On parle de **Mode TEM**. Cette onde a une relation de dispersion linéaire : $\omega = \beta c$. L'onde se propage à la vitesse de la lumière dans le milieu concerné sur le mode TEM[16]. **Cependant, il ne s'agit pas d'une onde plane**, car les champs associés ne sont pas constants sur toute une surface de z constant.

$$\overrightarrow{E} = \frac{1}{r}\frac{U_1 - U_2}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}\cos\left(\omega t - k_{00}z\right)\overrightarrow{u_r} \tag{25}$$

$$\overrightarrow{B} = \frac{1}{r}\frac{U_1 - U_2}{c\ln\left(\frac{b}{a}\right)}\cos\left(\omega t - k_{00}z\right)\overrightarrow{u_\theta} \tag{26}$$

Cependant, ces équations permettent[17] de trouver que le champ U :

$$U(z) = (U_1 - U_2)\cos(\omega t - k_{00}z) \tag{27}$$

[15]Parmi les modes TM_p , il existe un mode unique pour lequel propagation de l'onde se rapproche de celle d'une onde plane.
[16] Voir annexe pour les propriétés intéressantes du mode TEM
[17]Le champ I auquel U est couplé est donné par l'intégrale du courant surfacique associé à la relation de passage pour B sur la surface des conducteurs. On trouve bien un courant dans un sens différent pour chaque conducteur.

se comporte comme une onde plane, couplée à l'onde de courant dans le conducteur 1. De plus,

$$I_1(z) = \frac{2\pi}{\mu_0 c \ln\left(\frac{b}{a}\right)} U(z) \tag{28}$$

On retrouve donc bien un modèle de propagation d'une "onde courent/tension" dans le câble coaxial.

Pour ce couple d'ondes planes, on peut de plus retrouver le circuit électrique habituel du câble coaxial avec les inductances et capacités[18] linéiques suivantes :

$$\Lambda = \frac{\mu_0 \ln\left(\frac{b}{a}\right)}{2\pi} \qquad \Gamma = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \tag{29}$$

OdG[19] : Pour un câble de télévision, $a = 2.4\ mm$ et $b = 8.8\ mm$. On trouve $\Lambda = 0.26\ \mu H/m$ et $\Gamma = 43\ pF/m$.

Enfin, les fréquences de coupures[20] associées aux modes TE et TM de ce câble sont un peu plus compliquées à obtenir (car symétrie cylindrique implique des Bessel partout), mais on peut trouver (cf Garing) que les premières fréquences de coupure sont données par :

- Mode TE : $f_c = \frac{c}{\pi(b+a)} = 8.5\ GHz$
- Mode TM : $f_c = \frac{c}{2(b-a)} = 23\ GHz$

Ça ne pose pas de problème pour la télévision (autour de $550 MHz$) ni pour les TPs où on a donc des guides monomodes.

4 Conclusion

Dans cette leçon, on s'est intéressé à l'influence des conditions aux limites sur la propagation. On a ainsi vu qu'elle restreignait les solutions possibles au problème. De plus, elle introduisait de la dispersion (modale et intermodale.

Le guidage d'onde est très important de nos jours dans la communication. Dans cette leçon, on ne s'est intéressés qu'à des ondes électromagnétiques (et électrocinétiques). Cependant, on peut également guider des ondes mécaniques comme c'est le cas dans les instruments de musique par exemple. La prochaine fois, on pourra s'intéresser à l'acoustique des instruments de musique, un domaine où les conditions aux limite sont primordiales.

[18] On peut noter que Γ est la valeur obtenue pour un condensateur cylindrique, ce qui rend l'analogie encore meilleure

[19]

[20] En vrai, avec le comportement résistif du câble, on a en plus un passes bas qui commence à couper vers $2\ MHz$ pour les câbles de TP de $100\ m$ de long.

5 Annexe

5.1 Ondes TEM

Voir poly d'Etienne Thiberge p55 puis p63. Les démos sont p66

Les propriétés importantes des ondes TEM sont :

- Pour qu'un guide d'ondes électromagnétiques puisse propager un mode TEM, il faut qu'il soit constitué d'au moins deux conducteurs différents.
- Un mode TEM vérifie toujours la relation de dispersion des ondes planes dans le milieu illimité. En revanche, une onde TEM n'est pas forcément plane au sens strict.
- Par opposition aux modes TE et TM, lorsqu'il existe, le mode TEM est unique. (D'après ce que j'ai compris, c'est un cas particulier de TM).

A noter qu'en acoustique : Une onde acoustique plane peut se propager sans déformation dans un tuyau sonore si sa direction de propagation est confondue avec l'axe du tuyau. C'est parce que les conditions aux limites sont plus laxistes.

5.2 Relation de dispersion plan/plan

5.3 Fibre optique

Voir wikipedia et si on nous demande une "ref plus sérieuse"

Il existe des fibres optiques à l'intérieur desquelles l'indice optique varie de façon continue, toujours plus grand au centre que sur les bords de la fibre. On a maintenant des trajectoires courbées, et non une succession de lignes brisées. On peut donc choisir un gradient tel qu'il n'y ai plus de différence de marche entre les rayons. On s'affranchit ainsi de la dispersion intermodale. En effet, la dispersion intramodale n'a pas beaucoup d'influence ici puisque l'on code l'information de façon binaire par des impulsions lumineuses et en pratique, l'atténuation est plus vite problématique que l'étalement.
Les fibres optiques permettent d'atteindre des débits d'information très élevés avec des pertes quasi inexistantes sur des longues distances (inférieures à 0, 2dB/m).
Pour des très grandes distances, par exemple des liaisons transatlantiques, il est nécessaire d'utiliser des répétiteurs pour ré amplifier le signal. Elles représentent le premier mode de télécommunication actuellement mais elles ont les défauts d'être fragiles et très coûteuses.

Il y en a plein partout dont le cable sous-marin permettant les télécommunications entre les continents (environ 99% du trafic intercontinental, données et téléphone, sont transmis sous les océans selon Wikipedia). L'atténuation d'une fibre optique est d'environ 0,2 dB/km. On utilise des répétiteurs (amplificateurs optiques) pour que le signal puisse traverser des milliers de km.

Sur des petites distances, on utilise des fibres multimodes avec un c'ur de 50 $'m$ environ, car la dispersion in- termodale n'est pas très grave pour faire passer l'info du bloc relais à la box. Par contre, pour les fibres intercon- tinentales, on a un diamètre de 9 μm seulement pour rester dans le cadre monomode ! Le minimum de dispersion pour les monomodes est atteint avec $\lambda = 1310\ nm$, mais le minimum d'atténuation est plutôt vers $\lambda = 1570\ nm$, avec $0.15\ dB/km$

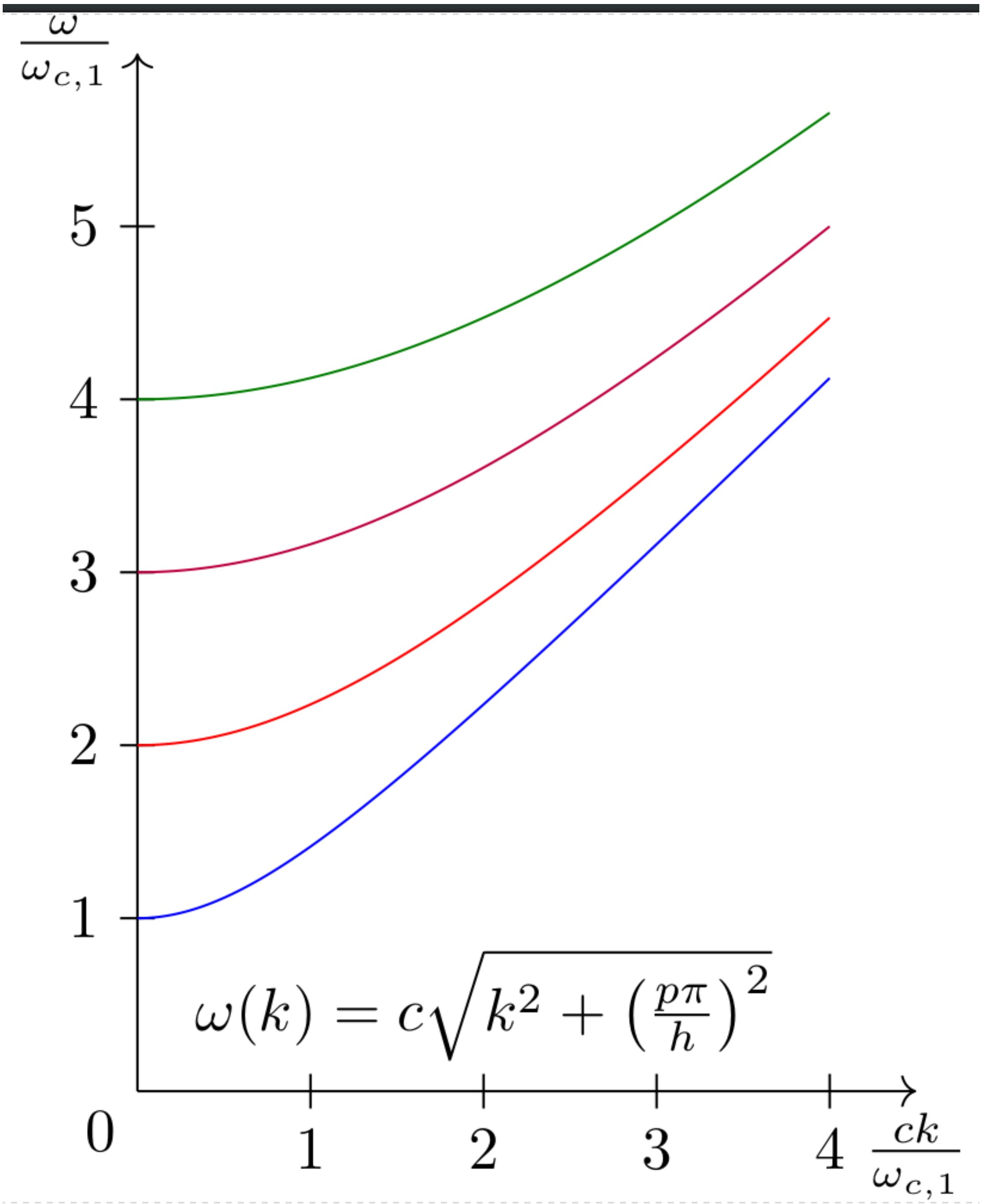


Figure 5: Schéma du guide d'onde étudié. Figure issue du poly de Clément Cabart

5.4 Quelques questions

- Peut-il y avoir propagation d'une onde et transport de matière ?
  Oui, par exemple une onde sonore dans un fluide qui s'écoule dans une canalisation.

- Pourquoi le champs EM est nul dans conducteur parfait ?
  Conséquence de la loi d'Ohm avec une conductivité infinie.

- Un guide d'onde EM peut-il propager autre chose d'un mode TE ou un mode TM ?
  La réponse est oui : comme le milieu est linéaire, une combinaison de modes TE et TM peut se propager, il s'agit de modes hybrides.

- Une fibre optique à gradient d'indice bien calibrée est-elle vraiment non dispersive ?
  La dispersion intermodale est bien compensée, mais il reste une (faible) dispersion intramodale résiduelle, qui est due à l'absorption par la fibre (OdG : 0.2 dB/km) . La longueur d'onde de 1,3 microns choisie en pratique est celle qui limite au maximum cette dispersion.

- Vous avez parlé de quantification. Quel lien faites-vous avec la mécanique quantique ? Qu'est-ce que l'effet Casimir ? (voir Le Bellac)

- On peut montrer qu'on peut guider une onde acoustique dans un tube en PVC jusqu'au microphone. Cela fonctionne-t-il pour toutes les fréquences longueurs d'ondes sonores ?
  Non : Les conditions son les mêmes que pour la fibre optique par exemple.

- Comment faire pour maximiser l'amplitude du signal reçu par le microphone ?
  Il s'agit une question d'adaptation d'impédance, ici avec un cornet avec une forme adaptée. Cette situation est totalement similaire à ce qui apparaît pour le guide d'ondes EM rectangulaire ou pour le câble coaxial.
  ATTENTION : parler d'adaptation d'impédance dans le cadre de la leçon nous semble hors sujet.