

# LP28 - Ondes électromagnétiques dans un diélectrique

June 15, 2019

## Contents

<b>1</b>	<b>Propagation dans les milieux diélectriques</b>	<b>3</b>
1.1	Les équations de Maxwell dans les milieux diélectriques . . . . .	3
1.2	Susceptibilité et fermeture . . . . .	4
1.2.1	ODG . . . . .	5
1.3	Relation de dispersion . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Dispersion et absorption</b>	<b>6</b>
2.1	Interprétation de l'indice du milieu . . . . .	6
2.2	Zone de transparence . . . . .	8
2.3	Exemples d'applications : . . . . .	9
2.3.1	Divers exemples : . . . . .	9
2.3.2	le four à micro-ondes . . . . .	10
<b>3</b>	<b>Retrouver quelques lois par l'électromagnétisme</b>	<b>11</b>
3.1	Rappel : relations de continuité . . . . .	11
3.2	Retrouver les lois de Snell-Descartes . . . . .	12
3.3	(Optionnel) : Formule de Cauchy . . . . .	12
<b>4</b>	<b>Annexe</b>	<b>13</b>
4.1	Hypothèses du modèle de l'électron élastiquement lié . . . . .	13
4.2	Relations de passage du champ électromagnétique (poly de Jérémie) . . . . .	13
4.2.1	Relation de passage pour le champ électrique . . . . .	13
4.2.2	Relation de passage pour le champ magnétique . . . . .	14

- 2017 : Cette leçon ne doit pas se limiter à un cours sur les milieux diélectriques ; cela n'en est pas l'objet.  
Jusqu'en 2013, le titre était : Dispersion et absorption d'une onde électromagnétique plane dans un milieu diélectrique. Modélisation microscopique.
- 2009, 2010 : Les conventions adoptées doivent être précisées avant toute discussion sur la partie imaginaire du vecteur d'onde.
- 2006 : Il y a souvent confusion entre absorption et atténuation.
- 2001 : Dans un diélectrique, l'équation de propagation ne peut être écrite sans précaution : en général la permittivité  $\epsilon_r$  dépend de la fréquence et est complexe. Le modèle de l'électron élastiquement lié ne peut être utilisé sans en discuter les limitations. Les aspects

quantiques de l'interaction entre l'onde électromagnétique et la matière peuvent être évoqués.

- 1999 : Le modèle de l'électron élastiquement lié n'est pas toujours bien compris. Il est trop souvent assimilé au rayon vecteur noyau-électron, le lien entre le terme de rappel et la force électrostatique n'est pas fait et l'origine du terme de frottement fluide n'est pas interprétée.
- 1998 : Cette leçon mérite une discussion physique des phénomènes de dispersion et d'absorption, supportée par des modèles de milieux matériels. Il est parfaitement inutile et contreproductif de s'enfermer dans de longs calculs formels sur les parties réelle et imaginaire de l'indice de réfraction.
- 1997 : Il est parfois utile de distinguer les raies de résonance des autres raies optiques.

Bon courage !

### Références :

- *H-Prépa* Ondes (bleu), Brébec l'essentiel
- Électromagnétisme, Mauras pour quelques précisions
- La physique par les objets quotidiens, Ray Application micro-onde
- Exercices et problèmes de physique, Olivier Application micro-onde
- Dictionnaire de physique, Taillet définition

### Niveau : L2

#### Prérequis :

- Électromagnétique dans les milieux diélectriques (équations de Maxwell, polarisation, susceptibilité...)
- Loi de Cauchy, dispersion par un prisme, Lois de Snell-Descartes
- Apparemment le Jury est friand de questions sur la **Ferroélectricité**
- **Attention à la définition charges libres  $\neq$  électrons de valence. Les charges libres sont les électrons de la bande de conduction (et les « trous » associés dans la bande de valence), ie arrachés du nuage électronique. Tous les électrons de valence ne sont pas libres !**
- Notions sur la dispersion (vitesse de phase/ vitesse de groupe / dispersion)
- Modèle de l'électron élastiquement lié
- Relations de continuité pour le champ électromagnétique

## Introduction

On utilise très souvent (surtout quand on est étudiant) le four à micro-onde pour réchauffer nos aliments. Le principe de fonctionnement diffère des méthodes utilisées historiquement à savoir chauffer par conduction, ici on utilise des ondes électromagnétiques.

Comment chauffer avec des ondes électromagnétiques ?

Un des éléments de base est que les aliments sont principalement composés d'eau et que l'eau est un milieu diélectrique. Je vous rappelle la définition :

"Diélectrique : Qualifie un milieu électriquement polarisable, c'est à dire que l'introduction d'un champ électrique provoque l'apparition d'une polarisation volumique par polarisation des constituants du milieu ou par alignement des dipôles déjà présents."

Taillet p156

Comment se comporte une onde électromagnétique dans un milieu diélectrique ? On se limite à la description de milieux homogènes, linéaires et isotropes et non magnétiques.

## 1 Propagation dans les milieux diélectriques

### 1.1 Les équations de Maxwell dans les milieux diélectriques

Mauras pp242-246,

La réponse du matériau au champ électrique extérieur  $\vec{E}$  est un vecteur  $\vec{P}$  appelé polarisation  $\vec{P}$

Celui ci apparaît dans les équations de Maxwell sous forme d'une charge volumique :

$$\boxed{\rho_{\text{lie}} = \text{div}(\vec{P})} \quad (1)$$

qui s'ajoute aux charges libres. Par simple conservation de la charge, on déduit l'existence d'un courant :

$$\frac{\partial \rho_{\text{lie}}}{\partial t} + \text{div}(\vec{j}_{\text{lie}}) = 0 \quad (2)$$

donc :

$$\boxed{\vec{j}_{\text{lie}} = -\frac{\partial \vec{P}}{\partial t}} \quad (3)$$

On peut alors réécrire les équations de maxwell dans le milieu diélectrique comme :

$$(\mathcal{M}\mathcal{G}) \quad \text{div}(\vec{E}) = \frac{\text{div}(\vec{P})}{\epsilon_0} + \frac{\rho_{\text{libre}}}{\epsilon_0} \iff \boxed{\text{div}(\underbrace{\epsilon_0 \vec{E} - \vec{P}}_{\vec{D}}) = \rho_{\text{libre}}} \quad (4)$$

où  $\vec{D}$  est le vecteur **induction électrique**

$$(\mathcal{M}\Phi) \quad \boxed{\text{div}(\vec{B}) = 0} \quad (5)$$

$$(\mathcal{M}\mathcal{F}) \quad \boxed{\text{rot}(\vec{E}) = -\partial_t \vec{B}} \quad (6)$$

$$(\mathcal{M}\mathcal{A}) \quad \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B}) = \mu_0 \overrightarrow{j_{\text{libre}}} - \mu_0 \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \frac{1}{c^2} \partial_t \vec{E} \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B}) = \mu_0 \overrightarrow{j_{\text{libre}}} + \mu_0 \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}} \quad (7)$$

Notons que seul 2 des 4 équations ont été modifiées. En effet, les équations de Maxwell-Faraday et Maxwell-Thomson ne font pas intervenir de charge et de courant.

Comme on est dans un diélectrique parfait; Il n'y a donc pas de charges ni de courants libres. On peut donc réécrire les équations de Maxwell dans les diélectriques :

 **Équations de Maxwell dans les diélectriques :**

$$(\mathcal{M}\Phi) \quad \boxed{\text{div}(\vec{B}) = 0} \quad (\mathcal{M}\mathcal{F}) \quad \boxed{\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E}) = -\partial_t \vec{B}} \quad (8)$$

$$(\mathcal{M}\mathcal{G}) \quad \boxed{\text{div}(\vec{D}) = 0} \quad (\mathcal{M}\mathcal{A}) \quad \boxed{\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B}) = \mu_0 \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}} \quad (9)$$

Avec l'induction électrique  $\vec{D}$  qui est relié à  $\vec{E}$  et  $\vec{P}$  :

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} - \vec{P} \quad (10)$$

On a donc 9 inconnues ( $\vec{E}, \vec{B}, \vec{P}$ ). or les équations de Maxwell comptent pour **6 équations**. Le problème n'est pas fermé.

 **TR :**

La fermeture des équations doit se faire en régime harmonique (forçage sinusoïdale) afin de définir la susceptibilité proprement (nous verrons qu'il y a un  $\chi$  pour chaque  $\omega$ ). Je vous propose donc de se cantonner à trouver l'équation de dispersion. Qui correspond à la propagation des ondes planes.

## 1.2 Susceptibilité et fermeture

**Les notions que l'on va définir ne sont valable qu'en régime harmonique :** On va supposer que **puisque on considère un milieu linéaire, les ondes planes forment une base de solutions au problème.** On propose alors :

$$\vec{E} = E_0 \exp(i\{\omega t - kz\}) \vec{e}_x \quad (11)$$

On s'attend dès lors à ce que la réponse du système (qui est **linéaire**)  $\vec{P}$  soit également périodique de pulsation  $\omega$ .

**Pour fermer le problème,** il nous faut proposer une relation supplémentaire. On propose

pour un **Diélectrique linéaire homogène**<sup>1</sup> : le tenseur **Susceptibilité diélectrique** :

$$\vec{P}(\omega) = \underline{\underline{\chi}}(\omega) \vec{E}(\omega) \quad (13)$$

Cette formulation contient donc 3 relations supplémentaires qui permettent de relier  $\vec{P}(\omega)$  et  $\vec{E}(\omega)$ . Le problème est alors fermé.

Par commodité, on préfère souvent écrire :

$$\vec{D}(\omega) = (\mathbb{1} + \underline{\underline{\chi}}(\omega)) \vec{E}(\omega) = \epsilon_0 \epsilon_r(\omega) \vec{E}(\omega) \quad \text{avec : } \epsilon_r(\omega) = \mathbb{1} + \underline{\underline{\chi}}(\omega) \quad (14)$$

où  $\mathbb{1}$  est la matrice identité. On appelle  $\epsilon_r$  la **permittivité diélectrique relative**.

Dans la suite, on va s'intéresser à son influence sur la propagation de la lumière dans un **matériau isotrope** : Dans ce cas précis,  $\vec{P}$  est colinéaire à  $\vec{E}$ . On a alors  $\underline{\underline{\chi}}(\omega) = \chi(\omega)$  est un nombre. Dès lors, on a la proportionnalité :

$$\boxed{\vec{D}(\omega) = \epsilon_0 \epsilon_r(\omega) \vec{E}(\omega)}$$

### 1.2.1 ODG

Dans un milieu, plusieurs polarisations peuvent être prises en compte.

Quelques valeurs de susceptibilité :

- $(\chi_e(\text{air}) = 5,7 \cdot 10^{-3})$  - pas trouvé l'origine : probablement les nuages électroniques qui se déforment)
- $\chi_e(\text{eau}) = 82,6$  - polarisation d'orientation des molécules
- $\chi_e(\text{BaTiO}_3) = 1760$  - polarisation ionique

Là, je mets le phénomène dominant mais dans la pratique, les effets se cumulent et les calculs sont complexes.

## 1.3 Relation de dispersion

On peut enfin réécrire les équations de Maxwell dans le cas des ondes planes pour un **diélectrique linéaire homogène isotrope** :

$$(\mathcal{M}\Phi) \quad \boxed{-ik \vec{e}_z \cdot \vec{B}(\omega) = 0} \quad (\mathcal{M}\mathcal{F}) \quad \boxed{-ik \vec{e}_z \wedge \vec{E}(\omega) = -i\omega \vec{B}(\omega)} \quad (15)$$

$$(\mathcal{M}\mathcal{G}) \quad -ik \vec{e}_z \cdot \vec{D}(\omega) = \boxed{-ik \epsilon_0 \epsilon_r(\omega) \vec{e}_z \cdot \vec{E}(\omega) = 0} \quad (16)$$

$$(\mathcal{M}\mathcal{A}) \quad -ik \vec{e}_z \wedge \vec{B}(\omega) = \mu_0 i\omega \vec{D}(\omega) \quad \iff \quad \boxed{-ik \vec{e}_z \wedge \vec{B}(\omega) = i\omega \mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r(\omega) \vec{E}(\omega)} \quad (17)$$

<sup>1</sup>**Homogène c'est important** ça permet de faire sortir le  $\epsilon_r$  du  $\text{div}(E)$  et d'avoir en fait  $\text{div}(E) = 0$  Si non, on se retrouve avec :

$$\Delta \vec{E} + \text{div}(\overrightarrow{\text{grad}}(\ln(\epsilon_r(\vec{r}))) \cdot \vec{E}) = -n \frac{-n\omega^2}{c^2} \vec{E} \quad (12)$$

Après, on peut toujours faire des ordres de grandeurs et sortir le terme moche. Pour cela, il faut prendre  $\lambda < L$ , avec  $L$ , une taille typique du système qui intervient dans les dérivées.

On a d'une part :

$$(-ik\vec{e}_z) \wedge (-ik\vec{e}_z) \wedge \vec{E} = -ik\vec{e}_z \wedge (-i\omega\vec{B}(\omega)) = -i\omega (-ik\vec{e}_z \wedge \vec{B}) = \omega^2 \underbrace{\mu_0\epsilon_0}_{\frac{1}{c^2}} \epsilon_r \vec{E} \quad (18)$$

Et d'autre part, comme  $\vec{A} \wedge \vec{B} \wedge \vec{C} = (A \cdot C)\vec{B} - (U \cdot V)\vec{W}$

$$(-ik\vec{e}_z) \wedge (-ik\vec{e}_z) \wedge \vec{E} = \underbrace{(i\vec{k} \cdot \vec{E})}_{=0} i\vec{k} - (i\vec{k} \cdot \vec{k})\vec{E} = k^2\vec{E} \quad (19)$$

### Relation de dispersion dans DLHI :

Donc, on trouve la **relation de dispersion** des ondes planes dans le milieu **diélectrique linéaire homogène isotrope**

$$k^2 = \frac{\epsilon_r(\omega)}{c^2} \omega^2 \quad (20)$$

où  $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}}$  est la vitesse de la lumière dans le vide.

### TR :

On peut faire remarquer qu'elle correspond à une équation de D'Alembert où la vitesse serait modifiée. C'est ce que l'on va questionner dans la seconde partie.

## 2 Dispersion et absorption

H-prépa Ondes Brebebeck p266

### 2.1 Interprétation de l'indice du milieu

H-prépa Ondes Brebebeck p266

On vient de trouver la relation de dispersion du milieu. Considérons à présent une onde plane monochromatique de pulsation  $\omega$  se propageant par exemple selon l'axe des x positif, de vecteur d'onde  $\vec{k} = k\vec{e}_x$ <sup>2</sup>. Son nombre d'onde  $k$  est relié à la pulsation par la relation :

$$k = \underline{n} \frac{\omega}{c} \quad (21)$$

où nous avons introduit  $\underline{n}$  définit comme la racine à partie réel positive ou nulle de l'équation:

$$\underline{n}^2 = \epsilon_r \quad (22)$$

$\underline{n}$  est l'indice du milieu déjà rencontré en optique. Notons, qu'à priori,  $\underline{n}$  est un nombre complexe dépendant de la pulsation de l'onde (impliquant de la dispersion). Attention, dans

<sup>2</sup>NB : prendre  $k$  complexe et  $\omega$  réel est un choix et nous aurions pu choisir le contraire. Cependant une pulsation réel nous parle plus.

22 il s'agit d'un carré et non d'une norme ce qui implique que  $\underline{n}^2$  est un nombre complexe.

Nous écrirons<sup>3</sup> :

$$\begin{cases} \underline{\epsilon}_r &= \epsilon_1 - i \epsilon_2 \\ \underline{n} &= n_1 - i n_2 \end{cases} \quad (23)$$

En nous rappelant que  $\underline{\epsilon}_r = 1 + \underline{\chi}_e$ , nous obtenons :

$$n_1^2 - n_2^2 = \epsilon_1 = 1 + \mathcal{R}e[\chi_e] \quad (24)$$

$$2 n_1 n_2 = \epsilon_2 = \mathcal{I}m[\chi_e] \quad (25)$$

Le champ électrique de l'onde plane s'écrit alors :

$$\vec{E} = E_0 \exp\left(i \left\{ \omega t - \frac{n_1 - i n_2}{c} \omega z \right\}\right) \vec{e}_x = E_0 \exp\left(-\frac{n_2}{c} \omega z\right) \exp\left(i \omega \left\{ t - \frac{n_1}{c} z \right\}\right) \vec{e}_x \quad (26)$$

On peut alors s'intéresser à l'interprétation de cet indice :

### Indice optique : conséquences :

- **La vitesse de phase<sup>a</sup> :**

$$v_\phi = \frac{\omega}{\mathcal{R}e[k]} = \frac{c}{n_1} \quad (28)$$

Pour peu que  $\epsilon_r$  ou plutôt  $n_1$  dépende de  $\omega$ , on aura alors un milieu dispersif.  $n_1$  est appelé **indice de réfraction**.

- **Atténuation :** On voit directement que  $n_2$  prend part à l'amplitude de l'onde qui se propage. L'amplitude décroît au cours de la propagation dans le milieu. L'onde est **atténuée**. En fait, on peut facilement défendre que cette onde est absorbée par le milieu diélectrique. **On appelle aussi  $n_2$  l'indice d'extinction**.

<sup>a</sup> Pour s'en convaincre, on va prendre  $n'' = 0$ . On trouve donc :

$$\vec{E}(z, t) = E_0 \exp\left(i \omega \left\{ t - \frac{n_1}{c} z \right\}\right) \vec{e}_x = \vec{E} \left( t = 0, z - \frac{c}{n_1} t \right) \quad (27)$$

### TR :

Souvent, on néglige l'absorption dans les milieux diélectriques que l'on considère transparents. C'est par exemple le cas avec la lumière dans les lentilles en optique géométrique. A-t-on raison de le faire ?

<sup>3</sup>Le "-" n'est qu'une convention pratique pour les calculs et les interprétations.

## 2.2 Zone de transparence

H-prépa Ondes Brebebeck p267 figure 14 qui donne les indices de l'eau.

Afin d'obtenir les valeurs de  $n_1$  et de  $n_2$ , nous devons trouver un modèle nous donnant l'expression de  $\chi_e$ . Nous allons reprendre, pour cela, un modèle que vous connaissez maintenant bien : celui des charges élastiquement liées<sup>4</sup>.

Pour rappel, l'équation du mouvement était de la forme :

$$\frac{d^2}{dt^2}\vec{r} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{d}{dt}\vec{r} + \omega_0^2 \vec{r} = \frac{q}{m} \vec{E} \quad (29)$$

où  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$  est la pulsation propre que notre charge assimilée à un oscillateur amorti de masse  $m$  et de raideur  $k$  et  $Q = \omega_0 \tau$  son facteur de qualité (inversement proportionnel au temps de relaxation). Nous pouvons alors trouver l'expression de  $\vec{r}$  et donc du moment dipolaire  $\vec{p}$  puisque  $\vec{p} = q\vec{r}$ . En multipliant par le nombre de charge liées  $N$  du milieu, nous trouvons la polarisation.

Or nous avons vu que :

$$\vec{P} = \epsilon_0 \underline{\chi_e} \vec{E} \quad (30)$$

d'où :

$$\underline{\chi_e} = \frac{\chi_0}{1 + i \frac{\omega}{Q\omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \quad \text{où} \quad \chi_0 = \frac{Nq^2}{m\epsilon_0\omega_0^2} \quad (31)$$

Nous avons alors accès à  $n_1$  et de  $n_2$  en prenant les parties réels et imaginaire de l'expression trouvée. L'évolution de ces grandeurs en fonction de  $\omega$  est donnée en figure (1). Je conseil de montrer celle présente dans le livre Ondes, HPrépa page 267 à la flexcam.

Nous constatons que **loin des résonances**<sup>5</sup>, on a  $n \approx n_1$ . Dans ce cas il y a **peu d'absorption** et l'onde se propage comme dans le vide, à ceci près que sa vitesse de phase, (qui est d'ailleurs alors à peu près égale à sa vitesse de groupe), est  $\frac{c}{n_1}$  et non  $c$ .

Cependant, il est à noter que dans la réalité, Il peut y avoir plusieurs fréquences de résonance (on peut avoir plusieurs types de liaisons "élastiques", plusieurs couches électroniques, plusieurs types de molécules, etc.).

Quelques ODG :

- polarisation électronique  $f_e \approx 10^{14} - 10^{15}$  Hz - domaine du visible-UV
- polarisation atomique ou ionique  $f_i \approx 10^{12} - 10^{14}$  Hz - domaine IR

<sup>4</sup>Il est vivement conseillé de relire la partie traitant du sujet dans la leçon LP47 – Mécanismes de la conduction électrique dans les solides car les hypothèses seront forcément demandées pendant les questions.

<sup>5</sup> Proche des résonances, on ne peut rien dire du tout. D'ailleurs la vitesse de groupe peut devenir supérieure à  $c$  ( $n_1 > 1$ , on parle de **dispersion anormale**). Elle n'a plus de sens physique immédiat (en particulier ce n'est pas la vitesse de propagation de l'énergie).

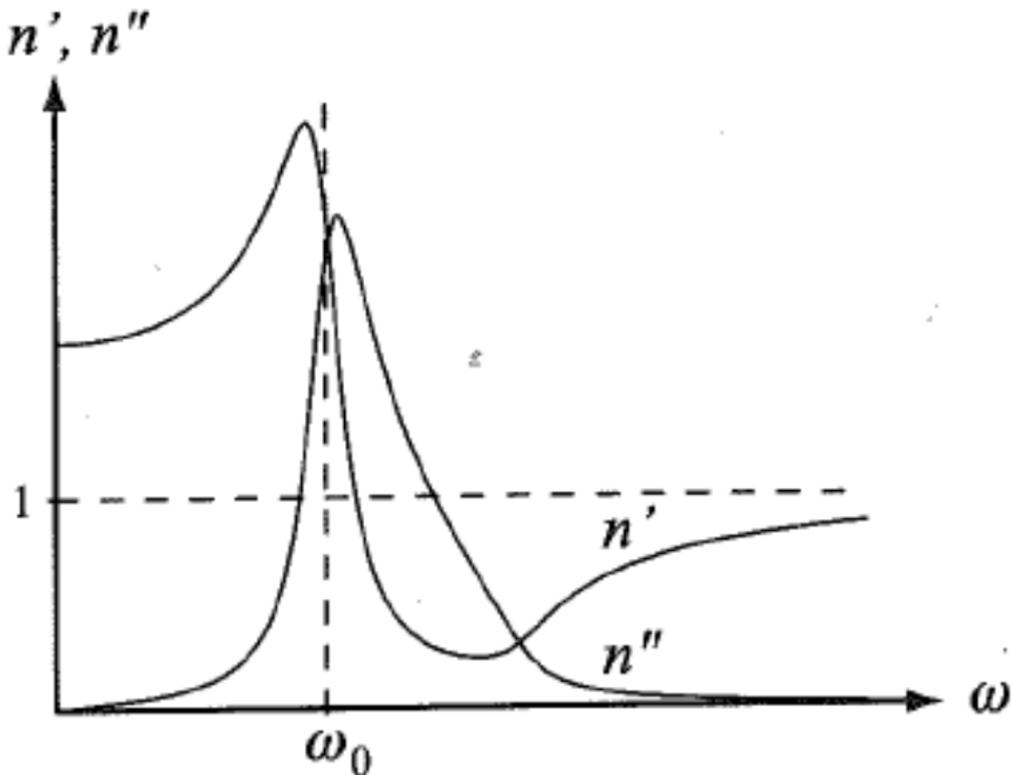


Figure 1: Évolution des indices de réfraction et d'extinction en fonction de la fréquence. En réalité les pics autour de la résonance sont plus marqués. Le facteur de qualité  $Q$  est grand. Loin de  $\omega_0$ ,  $n_2$  est négligeable. Typiquement,  $Q \approx 10^4$  et  $\omega_0$  peut se situer entre  $10^{12}$  et  $10^{15}$  Hz.

- le facteur de qualité associé est élevé :  $10^4$  en moyenne. Les zones sont bien distinctes pour les absorptions électronique et ionique.
- polarisation d'orientation - domaine IR lointain

On voit apparaître des fenêtres assez étroites où la dispersion et l'absorption est forte; En dehors de ces zones, on a de grandes plages où l'absorption est faible et le milieu est peu dispersif est presque une droite.

#### 🌸 zones de Transparence :

On appelle **zones de transparence** les valeurs de  $\omega$  pour lesquelles l'absorption et la dispersion sont faibles.

#### 🌸 TR :

Bien, maintenant que l'on a posé les choses, on va passer à quelques applications :

## 2.3 Exemples d'applications :

### 2.3.1 Divers exemples :

- verre absorbe le rayonnement UV  $\lambda < 320 \text{ nm}$  lunettes solaires

- ozone/ $O_2$  absorbent dans l'UV ; protection de la Terre : Couche d'Ozone...
- eau/ $CO_2$  absorbent dans l'IR  $\lambda > 1400 \text{ nm}$  fait partie des mécanisme expliquant l'effet de serre atmosphérique : rayons solaires absorbés par le sol; ce dernier s'échauffe et émet un rayonnement IR ; Ce rayonnement IR est absorbé par l'eau et le  $CO_2$  et ainsi échauffe l'atmosphère<sup>6</sup>.

### 2.3.2 le four à micro-ondes

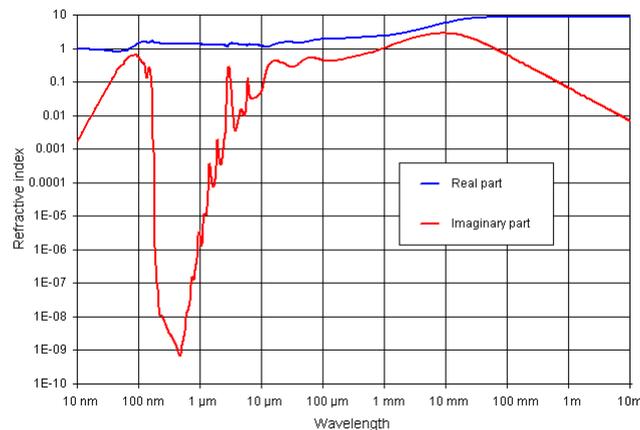


Figure 2: Segelstein's values for the complex refractive index of water for wavelengths from 10 nm to 10m. Ce graphique a été pris sur le site [ici](#).

Ray p65, Olivier p425

Fréquence de fonctionnement d'un four à micro-onde : 3 GHz. Pourquoi ?

Exemple de l'eau :

- Dans le visible, zone de transparence. On est loin des résonances, peu d'absorption, propagation à la vitesse  $c/n$  avec  $n_1 = 1,33$ .
- Zones d'absorption dans l'UV, dans l'IR,

Zone d'absorption dans le domaine des ondes centimétriques : c'est le principe du micro-ondes : Les aliments sont gorgés d'eau. Or, l'eau va absorber l'énergie des ondes près d'une telle raisonance : On peut alors faire chauffer un plat.

Ok, mais pourquoi ne pas être sur le pic d'absorption ? On est en fait loin du pic d'absorption à environ 0,3 GHz. Cela résulte d'un compromis entre deux données :

- D'une part, on veut être assez proche du pic d'absorption pour chauffer la nourriture. (En fait, cette contrainte est faible car les ondes sont piégées dans le four alors même si on absorbe que 0.01% des ondes, elles peuvent revenir 100 fois. Le temps de cuisson est à peine plus long.<sup>7</sup>

<sup>6</sup>Attention le modèle expliquant l'effet de serre est assez complexe et ne se résume pas qu'à ces quelques mots. Il faut en avoir conscience. Il y a un article dans le BUP 936 (article 21046) vraiment super à ce sujet mais il fait 20 pages.

<sup>7</sup>Attention, Le bruit du microonde vient je crois de l'agitateur. Il n'est pas au GHz sans quoi on ne l'entendrait pas.

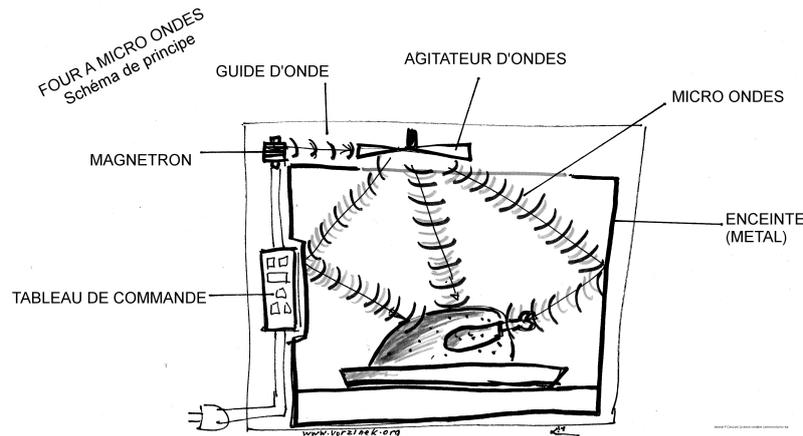


Figure 3: Inutile de montrer cette figure. C'est pour ta culture. Issu de Wikipedia.org

- D'autre part, il y a un problème d'épaisseur de peau : Si on suppose qu'on a une onde plane, on a toujours :

$$\vec{E} = E_0 \exp\left(-\frac{n_2}{c}\omega z\right) \exp\left(i\omega\left\{t - \frac{n_1}{c}z\right\}\right) \vec{e}_x \quad (32)$$

La distance typique de pénétration de l'onde atténuée est de  $\delta = \frac{c}{\omega n_2}$ . Si on se place à forte absorption,  $n_2$  est très grand et l'onde est totalement absorbée par la surface du plat. Le chauffage n'est alors pas homogène. La purée est brûlante sur le bord et froide au centre.

Du coup, on choisit de diminuer  $n_2$  en s'éloignant de la résonance pour obtenir le chauffage homogène.

### 3 Retrouver quelques lois par l'électromagnétisme

 **TR :**

Maintenant qu'on a vu ce qui se passait pour une onde traversant un diélectrique, on peut regarder ce qui arrive à une onde à l'interface entre deux milieux diélectriques. Ça arrive tout le temps, c'est à la base de l'optique géométrique et de la propagation guidée dans les fibres optiques par exemple.

#### 3.1 Rappel : relations de continuité

démonstration dans le Maura p62 ou voir annexe.

Les équations de Maxwell-Faraday et Maxwell flux ne changent pas dans les milieux diélectrique, et ce sont elles qui donnent les relations de continuité. On a donc toujours continuité de  $\vec{E}_{//}$  et de  $\vec{B}_{\perp}$ .

Si on fait les calculs, on obtient des relations sur les vecteurs d'onde qu'on va pouvoir exploiter vu qu'on connaît leur expression en fonction de  $n$  dans la zone de transparence.

## 3.2 Retrouver les lois de Snell-Descartes

H-prépa p271-272

Tout y est bien fait. Il faut montrer chaque point suivant :

- Les  $\vec{k}$  sont tous coplanaires
- égalité des composantes tangentielles de  $k$  ui donne la loi de la réflexion et de la réfraction.

Les démos sont p272

## 3.3 (Optionnel) : Formule de Cauchy

Une application pratique de ces équations de propagation, c'est de justifier la formule de Cauchy qui donne l'évolution de l'indice optique d'un milieu en fonction de la longueur d'onde :

$$n^2 = 1 + \chi_0 \left( 1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + \frac{\omega^4}{\omega_0^4} \right) \quad (33)$$

(La plupart du temps, la relation  $n^2 = A + \frac{B}{\lambda^2}$  suffit.)

Pour le verre, la fréquence de résonance est dans l'UV lointain. On peut donc faire l'approximation  $\omega \ll \omega_p$ . Nous sommes donc loin de la résonance  $\underline{n} \approx n_1$ . Nous pouvons montrer que si nous ne considérons qu'un seul type de charge liées  $\underline{\epsilon}_r$  prend la forme approchée suivante :

$$\underline{\epsilon}_r \approx 1 + \chi_0 \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (34)$$

où le terme d'amortissement a été négligé. Nous pouvons effectuer un développement limité<sup>8</sup>:

$$1 + \chi_0 \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \approx 1 + \chi_0 \left( 1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4 \right) \quad (35)$$

## Conclusion

Dans cette leçon, on a pu comprendre comment la propagation des ondes se fait dans un milieu polarisable, et dans quelle mesure on peut ramener l'étude de ces milieux à celle, connue, de la propagation dans le vide.

Quand les phénomènes mis en jeu diffèrent radicalement de cette situation idéale, on a vu quels nouveaux phénomènes (absorption, dispersion, etc.) aux applications pratiques nombreuses apparaissent.

On a également vu que l'introduction d'un indice optique, si elle ne modifie pas la structure d'une OPPM, donne lieu à des phénomènes aux interfaces entre diélectriques qui sont essentiels

---

<sup>8</sup>Puisque  $\lambda \propto 1/\omega$  on retrouve la formule de Cauchy. Cependant les coefficients  $A, B$  sont expérimentalement différents des valeurs que le modèle propose. C'est parce qu'on ne considère pas d'autres effets que la polarisation électronique et parce que notre traitement est entièrement classique (c'est peu adapté quand on parle d'atomes...). Il faut se souvenir que ce modèle a été introduit à l'époque de modèle de Thomson de l'atome.

à la compréhension de l'optique géométrique et de l'optique guidée.

L'électromagnétisme dans les milieux possède d'autres branches : au choix, on peut s'intéresser aux milieux magnétiques (où une aimantation, analogue de la polarisation, apparaît) ou aux milieux conducteurs comme les métaux, dans lesquels les charges libres ont une influence majeure.

On pourrait aussi s'intéresser aux milieux anisotropes et se laisser émerveiller par la biréfringence. D'ailleurs, vous connaissez le **compensateur de Babinet**<sup>9</sup> ?

## 4 Annexe

### 4.1 Hypothèses du modèle de l'électron élastiquement lié

- Chaque électron est traité comme un oscillateur harmonique soumis à un forçage par un champ électrique extérieur sinusoïdal.
- amorti par frottement fluide (perte d'énergie par rayonnement (charges accéléré + "collision" avec électrons)).
- Le champ de l'onde est uniforme à l'échelle de chaque atome : la longueur d'onde de l'onde est bien plus grand que les dimensions de l'atome.
- Pour un milieu peu dense, on néglige les champs créés par les atomes voisins. Le champ électrique local est confondu avec celui du forçage.
- On néglige l'action du champ magnétique de l'onde.

### 4.2 Relations de passage du champ électromagnétique (poly de Jérémie)

#### 4.2.1 Relation de passage pour le champ électrique

La relation de Maxwell-Gauss s'écrit en coordonnées cartésiennes :

$$\partial_x E_x + \partial_y E_y + \partial_z E_z = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (36)$$

On considère une nappe chargée, infinie selon les directions x et y et qu'on fait tendre vers 0 selon z. Intégrons l'équation selon l'épaisseur z. On considère que la nappe à une épaisseur a et on fera tendre cette quantité vers 0 :

$$\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dz \partial_x E_x + \partial_y E_y + \partial_z E_z = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dz \rho \quad (37)$$

Les variations du champ électrique selon x et y ne seront pas affecté par le fait qu'on fasse tendre a vers 0. Ainsi leur intégrale tend vers 0 lorsque a tend vers 0. Par contre les variations selon z peuvent être très intense dans une nappe infiniment fine et ainsi son intégrale peut prendre une valeur finie lorsque a tend vers 0. Ainsi on a :

$$E_z\left(\frac{a}{2}\right) - E_z\left(-\frac{a}{2}\right) = \frac{\sigma}{2} \quad a \rightarrow 0 \quad (38)$$

qu'on écrit parfois en nommant les espaces 1 et 2 de par et d'autre de la surface :

---

<sup>9</sup>Flee away you fools !

$$E_{z2} - E_{z1} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (39)$$

Concernant les composantes tangentielles, il faut utiliser la relation de Maxwell-Faraday qui s'écrit en coordonnées cartésiennes :

$$\begin{aligned} \partial_y E_z - \partial_z E_y &= -\partial_t B_x \\ \partial_z E_x - \partial_x E_z &= -\partial_t B_y \\ \partial_x E_y - \partial_y E_x &= -\partial_t B_z \end{aligned}$$

Lors de l'intégration, les dérivées en dehors de z tendent vers 0 pour les mêmes raisons que précédemment (même pour le temps) et on trouve avec les deux premières équations que :

$$\begin{aligned} E_{y2} &= E_{y1} \\ E_{x2} &= E_{x1} \end{aligned}$$

Et donc on en déduit la relation de passage pour le champ électrique :

$$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}_{12} \quad (40)$$

où  $\vec{n}_{12}$  est le vecteur unitaire perpendiculaire à la nappe orienté de 1 vers 2.

#### 4.2.2 Relation de passage pour le champ magnétique

On procède de la même façon pour le champ magnétique. Comme la divergence du champ magnétique est nul, on a en coordonnées cartésiennes :

$$\partial_x B_x + \partial_y B_y + \partial_z B_z = 0 \quad (41)$$

Et par intégration sur la coordonnées z, avec l'épaisseur du plan qui tend vers 0 on obtient que :

$$B_{z2} = B_{z1} \quad (42)$$

et donc la composante normale du champ magnétique est continue à la traversée d'une nappe de courant. Avec la l'équation de Maxwell-Ampère on a :

$$\begin{aligned} \partial_y B_z - \partial_z B_y &= \mu_0 j_x + \frac{1}{c^2} \partial_t E_x \\ \partial_z B_x - \partial_x B_z &= \mu_0 j_y + \frac{1}{c^2} \partial_t E_y \\ \partial_x B_y - \partial_y B_x &= \mu_0 j_z + \frac{1}{c^2} \partial_t E_z \end{aligned}$$

Lorsqu'on intègre, toutes les dérivées en dehors de z tendent vers 0. Ainsi la dernière équation ne nous apporte pas d'information par contre la première nous donne :

$$B_{y2} = B_{y1} = \mu_0 \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} j_x dz \quad (43)$$

En définissant la composant selon x du courant surfacique comme :

$$j_{Sx} = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} j_x dz \quad a \longrightarrow 0 \quad (44)$$

On trouve que :

$$B_{y2} = B_{y1} = \mu_0 j_{Sx} \quad (45)$$

De même avec la deuxième relation sur le rotationnel on trouve que :

$$B_{x2} = B_{x1} = \mu_0 j_{Sy} \quad (46)$$

On peut alors réunir toutes ces relations en une seule équation :

$$\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_S \wedge \vec{n}_{12} \quad (47)$$