

LP29 : Ondes électromagnétiques dans les milieux conducteurs

June 15, 2019

- 2017 : Les analogies et différences observées entre les différents milieux étudiés méritent d'être clairement soulignées. Il est intéressant d'évoquer les aspects énergétiques.
- 2015 : Cette leçon ne doit pas se réduire à la présentation exclusive du modèle de Drude. Les métaux ne sont pas les seuls milieux conducteurs.
- 2014 : Cette leçon ne doit pas être confondue avec la leçon 47 [qui était Mécanismes de la conduction électrique dans les solides.].
Jusqu'en 2013, le titre était : Effet de peau. Comportement d'une onde électromagnétique à la surface d'un conducteur.
- 2010 : Il faut s'interroger sur la dépendance en fréquence de la conductivité. L'étude peut également être menée en haute fréquence.
Jusqu'en 2003, le titre était : Effet de peau. Réflexion des ondes électromagnétiques planes à la surface d'un milieu conducteur.
- 2001 : Il faut bien caractériser le métal parfait comme limite du métal réel.
- 1997 : Le jury attend que les candidats sachent exprimer le facteur de réflexion d'un métal réel et soient capables d'expliquer la couleur orangée du cuivre.

Bon courage !

Références :

- *H-Prépa Ondes* (bleu), Brébec l'essentiel
- j'intègre tout en un PC PC* Sanz pour le traitement des équations. Le lire, il y a plein de choses intéressantes p 1001 et 1025 **LE REGARDER !**
- Physique du solide Hashcroft pour le modèle de Drude
- Dictionnaire de physique, Taillet définition : conducteur

Attention, la couleur de l'Or et du Cuivre est un effet de couplage pin orbite quantique. Il ne s'explique pas par ce qui est développé ici. Ici, on prédirait que les ondes dont la pulsation est supérieure à la pulsation de plasma ω_p ne seraient pas réfléchies. Les autres oui.

Souvent, ω_p est dans l'UV. Ce qui fait que les toutes les couleurs sont réfléchies. C'est pourquoi la plupart des métaux sont gris/blancs et miroitants.

Ici, on prédit que l'or c'est blanc. Nos modèles marchent bien pour l'Aluminium par exemple. Pour l'or ou le cuivre, il y a une histoire d'électrons qui sont trop loin du noyau et qui sont relativistes. Et ils voient une pulsation modifiée.

Niveau : L3

Prérequis :

- Électromagnétique dans le vide
- Conservation de la charge
- equation de diffusion
- vitesse de phase
- Modèle de Drude
- Modèle du plasma dilué froid
- passage en notation complexe
- Au cas où ça sert : la longueur de Debye λ_D dans un plasma est la distance caractéristique d'écrantage d'une charge libre (dans le Garing), $0.81mm$ dans l'ionosphère, $7,4\mu m$ dans un "plasma de synthèse" ?
- Il faut insister quand les relations sont vraies uniquement en fréquentiel/pour des OPPH et quand elles le sont en temporelles.

Attention à la définition charges libres $\neq$ électrons de valence. Les charges libres sont les électrons de la bande de conduction (et les « trous » associés dans la bande de valence), ie arrachés du nuage électronique. Tous les électrons de valence ne sont pas libres !

Introduction

Conducteur : "Se dit d'un milieu qu'un flux peut traverser avec peu de pertes." Taillet p106

Ici, on considère un flux de **porteurs de charges**. On parle alors de conduction électrique.

De nombreux phénomènes de la vie quotidienne peuvent être expliqués en discutant des ondes électromagnétiques dans les métaux. C'est le cas du miroir de la salle de bain ou bien du four à micro-ondes par exemple : l'épaisseur des parois est calculée pour que les ondes électromagnétiques ne se répandent pas dans la cuisine. Or, les métaux sont des milieux conducteurs.

Nous avons vu les équations de Maxwell dans la matière, qui sont la réponse des champs électromagnétiques en présence de matière. Nous nous intéresserons aujourd'hui au cas des milieux conducteurs électriques. En particulier, on va traiter deux cas limites de la conduction dans les conducteurs : Une onde de courant dans un fil en TP et le cas des ondes électromagnétiques dans la ionosphère.

TR :

Dans une première partie, nous allons commencer par déterminer le groupe d'équation de base nous permettant de résoudre un problème de propagation d'onde dans un conducteur.

1 Positionnement du problème :

Pour rendre cette démarche un peu plus complète, nous allons considérer le cas d'un fil de cuivre comme ceux que l'on peut l'utiliser en *TP*. On considère qu'on y impose une tension sinusoïdale. Quelle est l'onde de courant que si propage dans le fil. De plus, pour simplifier les calculs et les discussions, on considère que le fil est un plan semi-infini¹ s'étendant vers $z > 0$. Cette hypothèse peut paraître étrange mais nous montrerons au cours de cette leçon qu'elle n'est pas absurde.

On veut faire circuler un courant, que l'on fera correspondre à une densité de courant $\vec{j} = j\vec{e}_x$. La tension qu'on impose étant alternative, elle a une certaine fréquence $\omega < 10 \text{ GHz}$. Elle se traduit par un champ électrique E qui est dirigée selon l'axe $\vec{e}_x$. La coordonnée z correspond à aller vers l'intérieur du métal.

Faire un dessin comme celui donné en figure 1.

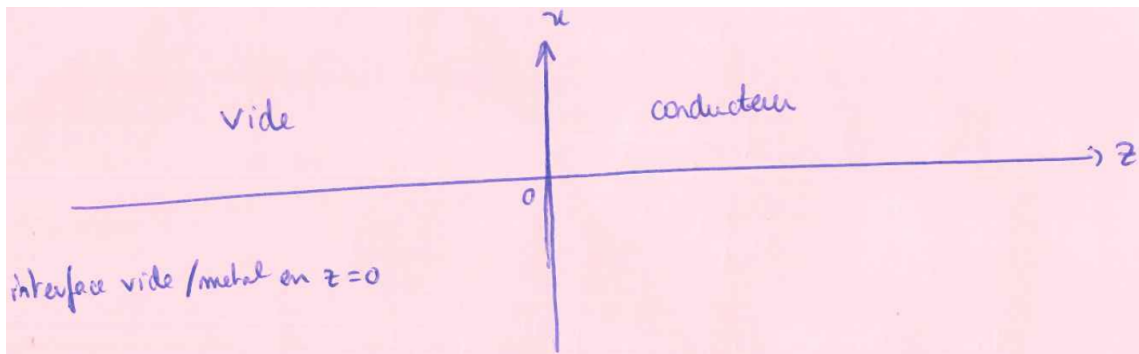


Figure 1: Position du problème

1.1 Nécessité de la relation constitutive

On considère que le fil est constitué d'un **conducteur, homogène et isotrope**. Dans lequel on va faire se propager une onde électromagnétique $(\vec{E}, \vec{B})$.

Comme on l'a dit en introduction, les milieux conducteurs se caractérisent par l'existence de **Porteurs de charges**.

Dans un métal à température ambiante, certains électrons sont à mêmes de se déplacer librement dans le métal. Ils donnent ainsi lieu aux courants que l'on peut mettre en évidence expérimentalement mais aussi à priori à une densité de charge ρ_{libre} . On choisit de représenter ces courants par la densité de courant volumique $\vec{j}_{\text{libre}}$.

La conservation de la charge doit être vérifiée :

Équations de conservation de la charge :

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_{\text{libre}} + \text{div}(\vec{j}_{\text{libre}}) = 0 \quad (1)$$

¹C'est ok tant que le rayon r est tel que $r \gg \delta$ si non, il faut considérer les conditions aux limites

C'est une relation scalaire. Elle compte pour 1 relation.

De plus, on a les équations de Maxwell :

 **Équations de Maxwell dans les milieux :**

$(\mathcal{M}\Phi) \quad \boxed{\operatorname{div}(\vec{B}) = 0}$	$(\mathcal{M}\mathcal{F}) \quad \boxed{\overrightarrow{\operatorname{rot}}(\vec{E}) = -\partial_t \vec{B}}$	(2)
$(\mathcal{M}\mathcal{G}) \quad \boxed{\operatorname{div}(\vec{E}) = \frac{\rho_{\text{libre}}}{\epsilon_0}}$	$(\mathcal{M}\mathcal{A}) \quad \boxed{\overrightarrow{\operatorname{rot}}(\vec{B}) = \mu_0 \overrightarrow{j_{\text{libre}}} + \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}}$	(3)

- **On a 10 inconnues :** $(\vec{E}, \vec{B}, \overrightarrow{j_{\text{libre}}}, \rho_{\text{libre}})$
- Les équations de Maxwell nous donnent 6 relations (petite subtilité : nous avons envie de dire que les équations vectorielles telles que celles où intervienne les rotationnels apportent 3 équations chacune. En réalité, de part la nature du rotationnel qui à valeur dans un plan orthogonal aux 2 vecteurs considérés, elles ne comptent que pour 2! Une autre façon de le voir est d'appliquer la divergence au rotationnel. Dans ce cas, la somme de ses 3 composante est nulle donc elles ne sont pas indépendantes.² La conservation de la charge nous donne 1 relation
On a donc **7 relations au total**.

 **TR :**

Le système d'équations n'est donc pas fermé. En l'état, on ne peut pas le résoudre.

Il nous faut trouver une relation constitutive du milieu qui nous donne 3 relations pour fermer le problème.

C'est ce qu'on propose de faire.

1.2 Loi d'Ohm locale et conductivité

On sait déjà qu'on trouve $U = RI$. Ce serait sympathique de relier $\vec{E}$ et $\overrightarrow{j_{\text{libre}}}$. Cela suffirait à fermer le problème.

Pour ne pas alourdir les notations, à partir de maintenant, on ne écrira simplement " $\overrightarrow{j}$ " pour " $\overrightarrow{j_{\text{libre}}}$ " !

1.2.1 Modèle de Drudes :

Aschcroft p12 (**A faire sur transparent je pense**)

On va utiliser les résultats du modèle de Drude. On modélise le **métal** comme un **réseau de cations dans lequel se déplacent des électrons**. On considère un volume V de métal avec N électrons dedans. La densité du *gaz d'électrons* est donc : $n = \frac{N}{V}$. On suppose

²Malinx le lynx! Pour une explication incompréhensible, il est possible de lire la page dédiée aux équations de Maxwell dans le Walter Appel.

- les électrons de conduction sont fournis par chaque atome et n'interagissent pas entre eux.
- les ions positifs (cations) du réseau sont fixes, seuls les électrons bougent ;
- On suppose que les électrons ont un comportement balistique (classique) **et leur vitesse est faible devant la vitesse de phase de l'onde.**
- Les électrons peuvent se heurter à un cation du réseau. Ils vont alors réaliser un choc élastique et (puisque les cations sont fixes) vont repartir avec une impulsion de direction aléatoire. La durée typique entre deux chocs pour un électron est τ . Entre deux chocs, les électrons sont soumis à un champ électromagnétique variable à la pulsation ω .

Comme vous l'avez déjà vu, pour $\vec{p}$ la quantité de mouvement des N électrons, le modèle de Drude donne, à l'ordre 1 en dt :

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{p} = -\frac{1}{\tau} \vec{p} + \vec{F}(t) \quad (+\mathcal{O}(dt^2)) \quad (4)$$

On y voit apparaître un terme de frottement visqueux linéaire qui décrit l'influence moyenne des chocs des électrons sur le réseau.

Il nous reste simplement à remplacer $\vec{F}$ par son expression. Ici, on a un champ $\vec{E}$ et un champ $\vec{B}$. L'électron subit donc la force de Lorentz :

$$\vec{F} = -e\vec{E} - e\vec{v} \wedge \vec{B} \quad (5)$$

Dans le cas des ondes planes, on a :

$$(\mathcal{MF}) \quad \vec{rot}(\vec{E}) = -\partial_t \vec{B} \iff k \parallel \vec{E} \parallel = \omega \parallel \vec{B} \parallel \iff \parallel \vec{E} \parallel \approx v_\phi \parallel \vec{B} \parallel \quad (6)$$

Donc :

$$\boxed{\frac{\parallel -e\vec{E} \parallel}{\parallel -e\vec{v} \wedge \vec{B} \parallel} \approx \frac{v_\phi}{v} \gg 1} \quad (7)$$

Par hypothèse, $v \ll v_\phi$. Le terme magnétique peut donc être négligé.

On a donc :

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{p} = -\frac{1}{\tau} \vec{p} - e\vec{E}(t) \quad (8)$$

1.2.2 ODG

- Cuivre : $\sigma_0 \approx 6 \cdot 10^7 \text{ S/m}$
- Eau pure : $\sigma_0 \approx 0.5 \text{ } \mu\text{S/m}$
- Eau Salée : $\sigma_0 \approx 56 \text{ mS/m}$

1.2.3 Relation constitutive, enfin !

On peut alors en profiter pour obtenir la relation entre $\vec{E}$ et $\vec{j}$. en utilisant que :

$$\vec{j} = -\frac{ne}{m} \vec{p} \quad (9)$$

Donc :

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{j} = -\frac{1}{\tau} \vec{j} + \frac{ne^2}{m} \vec{E}(t) \quad (10)$$

C'est la relation de structure que l'on cherchait !!!

On vient de trouver une relation linéaire. Comme cette relation est linéaire, on peut dire que pour un champ $E(\omega)$ correspondant à celui d'une onde plane, la réponse se fera également à la fréquence ω et aura une forme semblable. On peut donc supposer :

$$\vec{E} = E_0 \exp(i\{\omega t - kz\}) \vec{e}_x \quad \vec{j} = j_0 \exp(i\{\omega t - kz\}) \vec{e}_x \quad (11)$$

On a alors :

$$i\omega \vec{j}(\omega) = -\frac{1}{\tau} \vec{j}(\omega) + \frac{ne^2}{m} \vec{E}(\omega) \quad (12)$$

Donc :

$$\left(i\omega + \frac{1}{\tau}\right) \vec{j} = \frac{ne^2}{m} \vec{E} \iff \vec{j} = \frac{1}{\left(i\omega + \frac{1}{\tau}\right)} \frac{ne^2}{m} \vec{E} \quad (13)$$

donc :

$$\vec{j} = \frac{ne^2\tau}{m(1 + i\omega\tau)} \vec{E} \quad (14)$$

Loi d'ohm locale :

On définit alors la conductivité $\sigma(\omega)$ de sorte que :

$$\boxed{\vec{j}(\omega) = \sigma(\omega) \vec{E}(\omega)} \quad \boxed{\sigma(\omega) = \frac{ne^2\tau}{m(1 + i\omega\tau)} = \frac{\sigma_0}{(1 + i\omega\tau)}} \quad (15)$$

1.2.4 Interprétation énergétique :

Rappel : effet Joule :

Comme vous le savez déjà, La puissance apportée au milieu par effet Joule s'exprime alors :

$$\langle \mathcal{P}_J \rangle = \langle \vec{j} \cdot \vec{E} \rangle \quad (16)$$

On rappelle qu'il s'agit de la puissance transférée par le champ E aux particules constituant le milieu.

On peut alors interpréter la loi d'ohm locale dans ses cas limites :

- pour $\omega = 0$, on retrouve la loi d'Ohm qu'on avait établie en continue :

$$\vec{j} = \frac{ne^2\tau}{m} \vec{E} = \sigma_0 \vec{E} \quad \langle \mathcal{P}_J \rangle = \sigma_0 E^2 \neq 0 \quad (17)$$

Comme σ est réel, on a bien transfert de puissance vers le milieu.

- A haute fréquence, on observe que la conductivité devient imaginaire pur. $\vec{E}$ et $\vec{j}$ battent en quadrature de phase ce qui fait que $\langle \mathcal{P}_J \rangle = 0$.
On peut l'interpréter en disant que les électrons ont une certaine inertie et ne sont pas capables de suivre les variations de champ électrique.

Dans notre cas, on est à assez basse fréquence pour considérer qu'il y a bien l'électroneutralité.

 **TR :**

On vient de trouver trois relations indépendantes. On a donc 10 inconnues et 10 relations entre elles. Le problème est fermé. On peut donc le résoudre.

On a obtenu cette relation constitutive dans le cadre des excitations sinusoïdales. Nous allons donc résoudre notre système avec des solutions sous la forme d'onde planes; ce qui n'est pas restrictif puisque toute solution peut être décomposée sur la bases des ondes planes. Nous verrons que la résolution générale est très compliqué et nous nous limiterons donc aux cas des basses fréquences.

2 Propagation d'ondes planes à basses fréquences dans les métaux

 **TR :**

Bilan : nous avons les équations de Maxwell et celle de conservation de la charge + relation de structure (loi d'Ohm). Nous allons donc voir comment cette dernière influe les 2 autres.

2.1 Conséquences sur la loi de conservation : densité de charge dans un métal homogène.

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \text{div}(\vec{j}) = 0 \iff i\omega\rho + \sigma \text{div}(\vec{E}) = i\omega\rho + \frac{\sigma_0}{1 + i\omega\tau} \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0 \iff \boxed{-\rho\tau\omega^2 + i\omega\rho + \frac{\sigma_0}{\epsilon_0}\rho = 0} \quad (18)$$

Nous introduisons :

$$\begin{cases} \omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{m\epsilon_0}} = \sqrt{\frac{\sigma_0}{\tau\epsilon_0}} \\ Q = \omega_p\tau \end{cases} \quad (19)$$

ce qui nous donne :

$$1 - i \frac{1}{Q} \frac{\omega_p}{\omega} - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} = 0 \quad (20)$$

NB : le signe devant le i dépend de la convention choisit pour définir l'onde plane.

On vient de retrouver une équation différentiel d'ordre 2 en notation complexe. C'est un sinus amorti avec un temps caractéristique τ .

Pour les métaux, nous avons $Q \approx 100$.

Faire un dessin :

ODG : Comme $\epsilon_0 \approx 8,85 \cdot 10^{-12} \text{F} \cdot \text{m}^{-1}$,

• Cuivre : $n = 8.5 \cdot 10^{29} \text{ atomes}/\text{m}^3$ et on mesure $\sigma_0 \approx 6 \cdot 10^7 \text{ S}/\text{m}$ donc :

$$- \tau \approx 10^{-15} \text{s}$$

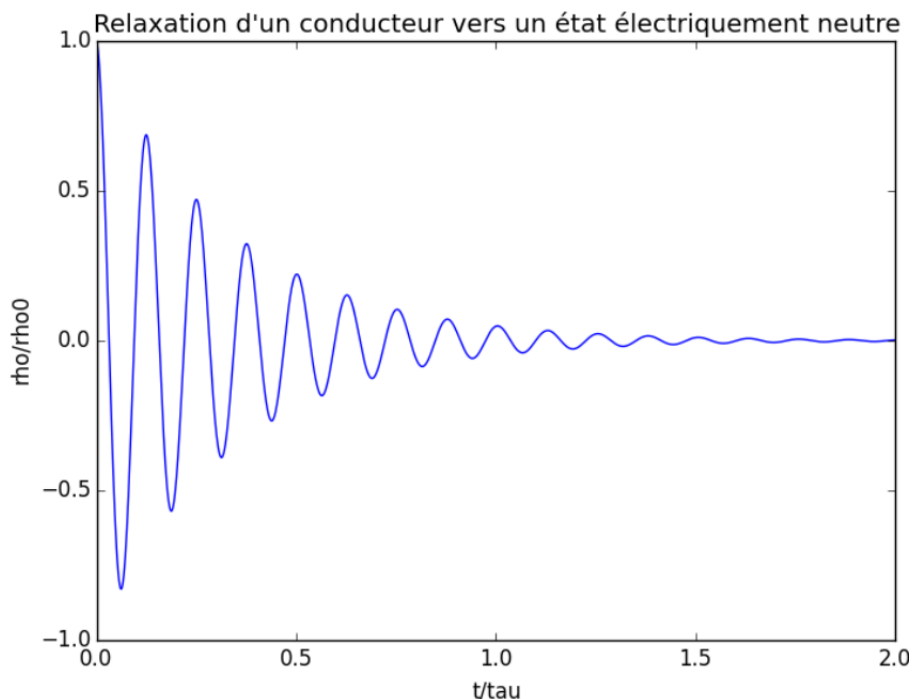


Figure 2: densité de charge en fonction de la distance dans le métal

- $\omega_p = 1.6 \cdot 10^{17}$ soit $f_p = 2.4 \cdot 10^{16} \text{ Hz}$
- $Q \approx 150$

✿ Neutralité pour $\tau\omega \ll 1$:

On en déduit donc qu'une densité de charge dans les conducteurs ne peut pas exister en volume pour $T \gg \tau^a$.

Dès lors, on peut supposer que pour $\omega\tau \ll 1$, il y a neutralité du métal.

$$\rho = 0 \quad (21)$$

On peut alors réécrire pour des ondes : $\omega\tau \ll 1$

$$(\mathcal{MG}) \quad \text{div}(\vec{E}) = 0 \quad \omega\tau \ll 1 \quad (22)$$

^aOn peut généraliser en mettant un temps t qui n'est pas forcément une période mais le temps caractéristique du retour à l'équilibre après une perturbation.

✿ TR :

Nous venons d'obtenir un résultat important : l'étude à basse fréquence assure l'électroneutralité et le problème va donc se retrouver simplifier. Nous avons déjà une conséquence sur l'équation de Maxwell-Gauss.

Continuons en regardant l'effet de la relation de structure sur les équations les autres équations de Maxwell.

2.2 Conséquence sur les équations de Maxwell

On suppose ici qu'on travaille dans un **métal homogène isotrope**. On prend :

$$\vec{E} = E_0 \exp(i\{\omega t - kz\}) \vec{e}_x \quad (23)$$

Comme on va le voir dans $(\mathcal{MF})$, le champ $\vec{B}$ sera de la même forme mais porté par $\vec{e}_y$.

Pour de telles ondes, les dérivées prennent des formes simples.

 **Équations de Maxwell dans les métaux (+ électroneutralité) :**

$(\mathcal{M}\Phi) \quad \boxed{-i \vec{k} \cdot \vec{B} = 0}$

$(\mathcal{MF}) \quad \boxed{-i \vec{k} \wedge \vec{E} = i\omega \vec{B}}$

(24)

$(\mathcal{MG}) \quad \boxed{-i \vec{k} \cdot \vec{E} = 0}$

(25)

$$(\mathcal{MA}) \quad -i \vec{k} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + i\omega \mu_0 \vec{E} \underbrace{\Longleftrightarrow}_{Ohm} -i \vec{k} \wedge \vec{B} = \mu_0 \sigma(\omega) \vec{E} + i\omega \mu_0 \epsilon_0 \vec{E} \quad (26)$$

 **Équations de Maxwell dans les métaux (+ électroneutralité) :**

$\boxed{-i \vec{k} \wedge \vec{B} = \mu_0 \sigma(\omega) \vec{E} + i\omega \mu_0 \epsilon_0 \vec{E}}$

(27)

 **TR :**

La présence de deux termes est embêtante pour obtenir un équation de propagation facilement interprétable. Il nous faut trouver lequel domine dans notre problème.

Approximation des régimes quasi-stationnaire

L'équation précédente (Maxwell-Ampère) fait apparaître deux termes. D'abord un terme de courant volumiques. Et puis il y a le terme de courant de déplacement. On veut comparer l'influence de ces termes dans notre étude.

$$\frac{\|\mu_0 \sigma(\omega) \vec{E}\|}{\|i\omega \mu_0 \epsilon_0 \vec{E}\|} \approx \frac{\sigma}{\omega \epsilon_0} \approx \frac{\omega_p^2 \tau}{\omega} \approx \frac{(1.6 \cdot 10^{17})^2 \cdot 10^{-15}}{10^9} \approx 10^{10} \quad Hum \ hum \ !!!! \quad (28)$$

Dans le cas de notre exemple, on est à relativement **basse fréquence** et on peut alors négliger le courant de déplacement est petit devant le courant de charge. On peut alors écrire :

 **Équations de Maxwell-Ampère :**

$\boxed{-i \vec{k} \wedge \vec{B} = \mu_0 \frac{\sigma_0}{1 + i\omega \tau} \vec{E}}$

(29)



TR :

Maintenant que nous avons simplifier nos équations pour des ondes planes à basses fréquence dans notre métal, nous pouvons enfin passer à l'équation de propagation.

2.3 Équation de propagation

Sanz p1010

Rappel de la convention :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \exp(i\{\omega t - kz\}) \quad (30)$$

On a d'une part :

$$(-ik\vec{e}_z) \wedge (-ik\vec{e}_z) \wedge \vec{E} = -ik\vec{e}_z \wedge (-i\omega\vec{B}(\omega)) = -i\omega (-ik\vec{e}_z \wedge \vec{B}) = -i\omega\mu_0 \frac{\sigma_0}{1+i\omega\tau} \vec{E} \quad (31)$$

Et d'autre part, comme $\vec{A} \wedge \vec{B} \wedge \vec{C} = (A \cdot C)\vec{B} - (U \cdot V)\vec{W}$

$$(-ik\vec{e}_z) \wedge (-ik\vec{e}_z) \wedge \vec{E} = \underbrace{(i\vec{k} \cdot \vec{E})}_{=0} i\vec{k} - (i\vec{k} \cdot \vec{k})\vec{E} = k^2 \vec{E} \quad (32)$$

Donc :

$$k^2 \vec{E} = -i\omega\mu_0 \frac{\sigma_0}{1+i\omega\tau} \vec{E} \quad (33)$$

On obtient alors la relation de dispersion des ondes électriques dans le métal.



Relation de dispersion :

$$k^2 \vec{E} = -\mu_0 \frac{i\omega\sigma_0}{1+i\omega\tau} \vec{E} \quad (34)$$

Ce est aussi bien sûr la relation de dispersion pour le courant :

$$k^2 \vec{j} = -\mu_0 \frac{i\omega\sigma_0}{1+i\omega\tau} \vec{j} \quad (35)$$

que l'on va réécrire en régime basse fréquences ($\omega\tau \ll 1$) :

$$\boxed{k^2 = -\mu_0 i\omega\sigma_0} \quad (36)$$



TR :

Maintenant, il reste simplement à interpréter.

Épaisseur de peau.

Sanz p1025

Que se passe-t-il si on choisit ω réel ? (convention émetteur)

$$\vec{j} = j_0 \exp(i\{\omega t - kz\}) \vec{e}_x \quad (37)$$

La relation de dispersion impose³ :

$$k = \pm \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}} \right) \sqrt{\mu_0 \sigma_0 \omega} = \pm \left(\frac{1}{\delta} - \frac{i}{\delta} \right) \quad \text{avec : } \boxed{\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \sigma_0 \omega}}} \quad (38)$$

En réinjectant la forme avec le "-" dans la solution proposée⁴, on trouve donc :

$$\vec{j} = j_0 \exp \left(i \left\{ \omega t - \left[\frac{-1}{\delta} + \frac{i}{\delta} \right] z \right\} \right) \vec{e}_x = \boxed{j_0 \exp \left(-\frac{1}{\delta} \right) \exp \left(i \left\{ \omega t - \frac{z}{\delta} \right\} \right) \vec{e}_x} \quad (39)$$

- On remarque que la vitesse des ondes dans le métal est relié à la partie réelle de k . Mais on en parlera plus tard quand on parlera de dispersion.
- On remarque que la partie imaginaire de k a une influence sur l'amplitude de l'onde se propageant dans le métal. l'onde est atténuée quand on s'enfonce dans le métal.



Effet de peau :

On remarque^a que l'onde de courant quise propage dans le métal à basses fréquences ne se propage que dans un volume proche de la paroi sur une épaisseur caractéristique δ appelée l'épaisseur de peau.

En particulier, dans le cas d'un **métal parfait** ($\sigma_0 \rightarrow \infty$) les courants sont uniquement surfaciques.^b

^aJe conseille vivement de lire le Sanz PC p1024-1026 pour avoir les idées claires sur les métaux.

^bEn fait, on peut simplement montrer que pour un conducteur non parfait, les courants surfaciques n'ont plus de sens. C'est fait dans H-prépa chapitre 8.

Ordres de grandeurs

Pour un fil de cuivre de rayon $r = 0,5 \text{ mm}$, $\sigma_{\text{cuivre}} = 6 \cdot 10^7 \text{ Sm}^{-1}$:

- $f = 50 \text{ Hz}$: $\delta = 9,8 \text{ mm}$, l'effet de peau n'est pas visible
- $f = 100 \text{ kHz}$: $\delta = 0,2 \text{ mm}$ l'effet de peau est visible
- $f = 100 \text{ MHz}$: $\delta = 6,6 \text{ }\mu\text{m}$ le courant ne se propage que dans une très fine.
- $f = 5 \text{ GHz}$: $\delta = 0,9 \text{ }\mu\text{m}$

³ (se souvenir que $(-i)^{\frac{1}{2}} = \pm \frac{-1+i}{\sqrt{2}}$)

⁴Attention, il se passe un truc subtil dans le choix de la forme de la solution. L'équation de diffusion n'est pas invariante par conjugaison. Cela fait que la solution $\vec{j} = j_0 \exp(-i\{\omega t - [\frac{1}{\delta} + \frac{i}{\delta}]z\}) \vec{e}_x$ décrit un sens différent d'écoulement du temps. Si on prend cette solution, on a l'onde dans le métal que l'on fait ensuite propager vers l'extérieur et il faut donc que son amplitude croisse. C'est assez complexe à expliquer. Donc je propose de simplement injecter dans la forme qui marche et que tout le monde soit content.

Application : le four micro-onde

Il est intéressant de se demander pourquoi le four micro-onde ne chauffe pas le reste de la cuisine... C'est à cause de l'effet de peau : On travaille au dessus de 10^6 Hz ce qui donne $\delta = 10 \mu\text{m}$

Donc en théorie les ondes ne sortent pas de la carcasse^{5 6}



TR :

Maintenant que nous avons étudié les ondes planes de faible pulsation dans un milieu conducteur, nous allons pouvoir en étudier un autre type aux propriétés particulières : les plasmas^a.

^aÉtat de la matière globalement neutre dans lequel les charges électriques de signes opposés ne sont pas liées entre elles, une des populations au moins étant libre de se déplacer sur de grandes distances.

3 Ondes électromagnétiques dans les plasmas

Sanz p1001 Garring 144

3.1 Position du problème :

On s'intéresse à la propagation par exemple d'une onde radio dans l'atmosphère et ce qu'il se passe lorsqu'elle rencontre la ionosphère ([Wikipedia](#)). C'est une zone de la haute atmosphère ionisée par les vents solaires que l'on va modéliser comme un **plasma dilué et froid**. On va supposer que l'onde qui arrive est une onde plane (EM) se propageant suivant z et que le plasma occupe le demi espace $z > 0$. On assimile l'atmosphère à du vide.

On se placera dans le cadre de la réponse linéaire et donc la réponse a lieu à la même pulsation ω On suppose de plus que le milieu est **Homogène**.

3.2 Relation constitutive

Sanz p 11004

On utilise le résultat du modèle du plasma dilué et froid : Dans le cas où la vitesse des particules est faible devant la vitesse de phase de l'onde :

$$\vec{j} = -i \frac{ne^2}{\omega} \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M} \right) \vec{E} \quad (40)$$

où n est la densité d'électrons libres, m la masse des électrons et M la masse des noyaux (ici 1 électron libre par noyau...)

⁵En moyenne, le flux maximal toléré perçu à 5 cm est, pour un micro-onde neuf environs 10 fois inférieure à celui d'une box ou d'un téléphone portable. [Wikipedia](#).

⁶On va nous poser la question. La grille du micro-onde a son pas adapté pour absorber les micro-ondes (fonctionne comme deux polariseurs croisés. Ce n'est pas de la diffraction je pense. Mais le pas est trop grand pour stopper les ondes lumineuses (plus haute fréquence)

Loi constitutive dans le plasma :

On vient de donner un équivalent de la loi d'ohm mais avec une conductivité imaginaire pure...

$$\vec{j} = \sigma(\omega) \vec{E} \quad \boxed{\sigma = -i\epsilon_0 \frac{\omega_p^2}{\omega}} \quad \boxed{\omega_p = \sqrt{ne^2 \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M} \right)}} \quad (41)$$

Tout de suite, on observe quelque chose d'intéressant : j et E sont en quadrature, donc pas de puissance moyenne cédée au milieu, contrairement au cas précédent est nulle !

$$\langle \mathcal{P}_J \rangle = \langle \vec{E} \cdot \vec{j} \rangle = 0 \quad (42)$$

3.3 Conservation de la charge

On a :

$$i\omega\rho = -i\vec{k} \cdot \vec{j} = -i\sigma(\omega) \vec{k} \cdot \vec{E} \quad (43)$$

donc, avec $(\mathcal{MG})$:

$$i\omega\rho = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \rho \iff i\omega\rho = \frac{i\epsilon_0 \frac{\omega_p^2}{\omega}}{\epsilon_0} \rho \quad (44)$$

donc :

Electroneutralité du plasma homogène isotrope froid et dilué :

$$\boxed{(\omega^2 - \omega_p^2)\rho = 0} \quad (45)$$

Donc, pour $\omega \neq \omega_p$ (qui correspondra comme on le verra par la suite à une onde qui ne se propage pas, on a $\rho = 0$ dans le métal^a

^aOn peut alors facilement montrer que le champ E doit se propager de façon transverse car $\text{div}(\vec{E}) = 0$

TR :

Plaçons nous à l'une de ces fréquences et voyons ce que devient une onde plane dans le plasma.

3.4 Équations de Maxwell dans le plasma

Du faite que l'électroneutralité soit toujours respectée, nous avons les mêmes expressions pour les équations de Maxwell que pour le cas des faibles pulsations de la partie 2 mais sans restreinte l'étude à une gamme de fréquence ici :

Équations de Maxwell dans les diélectriques :

$$(\mathcal{M}\Phi) \quad \boxed{-i\vec{k} \cdot \vec{B} = 0} \quad (\mathcal{M}\mathcal{F}) \quad \boxed{-i\vec{k} \wedge \vec{E} = i\omega\vec{B}} \quad (46)$$

$$(\mathcal{MG}) \quad \boxed{-i \vec{k} \cdot \vec{E} = 0} \quad (47)$$

$$(\mathcal{MA}) \quad -i \vec{k} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + i\omega\mu_0 \vec{E} \xLeftrightarrow[Ohm]{} -i \vec{k} \wedge \vec{B} = \mu_0 \sigma(\omega) \vec{E} + i\omega\mu_0 \epsilon_0 \vec{E} \quad (48)$$

Équations de Maxwell dans les diélectriques :

$$\boxed{-i \vec{k} \wedge \vec{B} = i\mu_0 \epsilon_0 \frac{\omega_p^2}{\omega} \vec{E} + i\omega\mu_0 \epsilon_0 \vec{E}} \quad (49)$$

On a d'une part :

$$(-ik\vec{e}_z) \wedge (-ik\vec{e}_z) \wedge \vec{E} = -ik\vec{e}_z \wedge (-i\omega\vec{B}(\omega)) = -i\omega (-ik\vec{e}_z \wedge \vec{B}) = \frac{i\omega}{c^2} \left(i\frac{\omega_p^2}{\omega} + i\omega \right) \vec{E} \quad (50)$$

Et d'autre part, comme $\vec{A} \wedge \vec{B} \wedge \vec{C} = (A \cdot C)\vec{B} - (U \cdot V)\vec{W}$

$$(-ik\vec{e}_z) \wedge (-ik\vec{e}_z) \wedge \vec{E} = \underbrace{(i\vec{k} \cdot \vec{E})}_{=0} i\vec{k} - (i\vec{k} \cdot i\vec{k}) \vec{E} = k^2 \vec{E} \quad (51)$$

Donc, on obtient bien la relation de dispersion

Relation de dispersion du plasma :

$$\boxed{k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}} \quad (52)$$

Deux cas à distinguer :

- Si $\omega < \omega_p$ donc k est **imaginaire pur**. L'onde ne se propage pas dans le plasma^a. Il y a réflexion totale à l'interface. Dans le plasma, le champ est non nul sur une petite distance $\delta = \frac{c}{\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}}$ ^b **On parle d'onde évanescente**.
- Si $\omega > \omega_p$, alors k est réel. L'onde se propage alors sans atténuation liée au milieu. Le milieu est **transparent pour cette onde**.
On peut l'interpréter comme le fait que la fréquence est trop grande par rapport à l'inertie des électrons et que ces derniers n'ont pas le temps d'osciller.

^aOn dit que ω est dans la bande interdite.

^bEffet tunnel tout ça ;..

C'est comme ça que l'on fait une lame séparatrice 50/50 : on fait une réflexion totale avec une fine couche de métal; Or la couche est trop fine pour que l'onde s'annule et il y en a une partie qui se propage de l'autre côté de la lame.

Sur le même principe, on peut citer le microscope à onde évanescente.

3.5 Application aux télécommunications :

Sanz p 1007

La ionosphère permet de guider les ondes radio :

- une densité d'électrons : $n \approx 10^{10} \text{ m}^{-3}$
- donc une pulsation plasma $\omega_p \approx 5.64 \cdot 10^6 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ soit $f_p \approx 900 \text{ kHz}$
- Les ondes radio utilisé pour joindre les satellites sont à $f \approx 100 \text{ MHz}$.
La ionosphère est bien transparente pour cs ondes.
- les ondes radio ont une fréquence inférieure : $f \in [3 \text{ kHz}(\lambda = 100 \text{ km}) 300 \text{ kHz}(\lambda = 1 \text{ km})]$
En 1901, la première liaison radio transatlantique a été réalisée : le sol et la ionosphère agissent comme des miroirs et guident l'onde pour qu'elle soit reçue plus loin.

Conclusion :

On a vu deux exemples de la propagation d'ondes électromagnétiques dans les conducteurs. D'abord les métaux à basse fréquence et ensuite les plasmas et on a présenté quelques applications. Un lecteur attentif aura aperçu que la vitesse de phase dans le plasma dépendait de la pulsation de l'onde. C'est le phénomène de **dispersion**. La prochaine fois, on s'intéressera au phénomène de dispersion dans les milieux libres puis l'influence des conditions aux limites sur la dispersion.

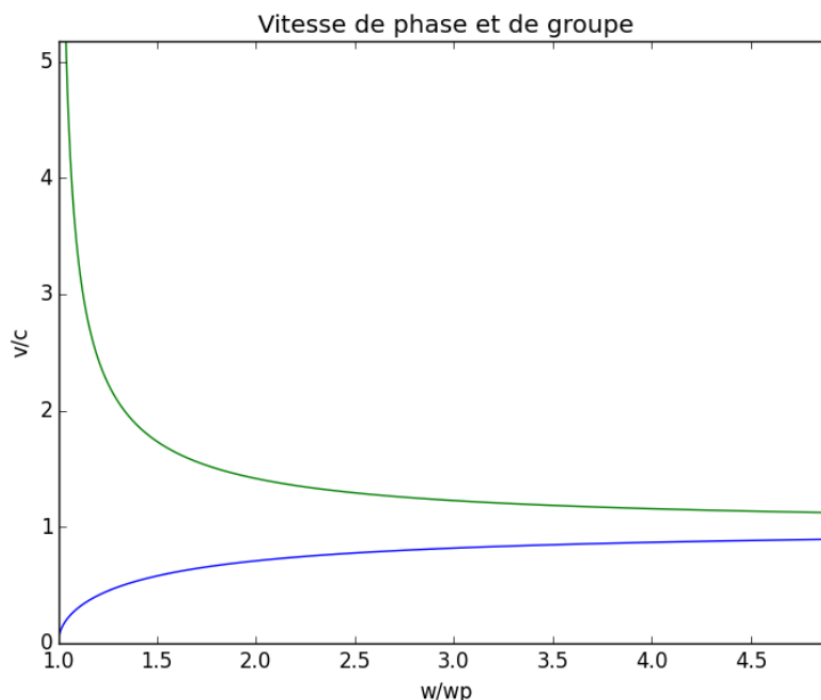


Figure 3: vert : vitesse de phase, bleu, vitesse de groupe.

4 Annexe

4.1 Vitesse de phase et vitesse de groupe dans le plasma

4.2 Commentaire de Camille pour la leçon ?

Justification du plan :

La raison pour laquelle j'ai pensé ne pas faire de première partie "générale" sur les ondes EM dans les milieux conducteurs est cette histoire d'électroneutralité. On a PAS $\text{div} \mathbf{E} = 0$ quelque soit la fréquence et quelque soit le milieu conducteur. On POURRAIT le faire si on supposait dans cette hypothétique première partie qu'on ne travaille qu'avec des ondes transverses mais ça réduit la généralité du discours, ça l'embrouille, et ça peut potentiellement être faux dans les cas où les ondes transverses sont les seules solutions (là où on suggérerait qu'il y en a d'autres). Ce plan permet aussi d'introduire directement des "problèmes" réalistes plutôt qu'une discussion générale sur les ondes dans les conducteurs (ondes qui, de fait, dépendent du milieu).

Je pense donc plus pertinent de faire deux parties distinctes (largement suffisant en 40 min si les problèmes sont bien traités à mon avis) traitant de deux milieux conducteurs distincts, et conclure par les analogies et différences entre les deux cas. Le côté un peu irréaliste de cette leçon est de penser traiter D'ABORD des modèles de milieux conducteurs ET ENSUITE de traiter des ondes EM dans ces milieux, mais je ne pense pas que cela soit un problème pour cette leçon puisque tous ces éléments de cours se font en même temps dans l'année, et on pourrait envisager donner un cours qui suit cette leçon plutôt que la façon "classique" d'enseigner les ondes EM dans les conducteurs.

4.2.1 Modèle de Drudes :

Aschcroft p12

On modélise le **métal** comme un **réseau d'atomes dans lequel se déplacent des électrons**. On considère un volume V de métal avec N électrons dedans. La densité du gaz d'électrons est donc : $n = \frac{N}{V}$. On suppose

- les électrons de conduction sont fournis par chaque atome et n'interagissent pas entre eux.
- les ions positifs (cations) du réseau sont fixes, seuls les électrons bougent ;
- On suppose que les électrons ont un comportement balistique (classique) et leur vitesse est faible devant la vitesse de phase de l'onde.
- Les électrons peuvent se heurter à un cation du réseau. Ils vont alors réaliser un choc élastique et (puisque les cations sont fixes) vont repartir avec une impulsion de direction aléatoire. La durée typique entre deux chocs pour un électron est τ . Entre deux chocs, les électrons sont soumis à un champ électromagnétique variable à la pulsation ω .

Pour commencer, entre deux chocs, c'est à dire en présence de $\vec{E}(\omega)$ et $\vec{B}(\omega)$, un électron dans le métal subit la force de Lorentz :

$$\vec{F} = -e\vec{E} - e\vec{v} \wedge \vec{B} \quad (53)$$

Comparons les ordres de grandeurs associées à ces deux termes : Dans le cas des ondes planes, on a :

$$(\mathcal{MF}) \quad \vec{rot}(\vec{E}) = -\partial_t \vec{B} \iff k \parallel \vec{E} \parallel = \omega \parallel \vec{B} \parallel \iff \parallel \vec{E} \parallel \approx v_\phi \parallel \vec{B} \parallel \quad (54)$$

Donc :

$$\boxed{\frac{\parallel -e\vec{E} \parallel}{\parallel -e\vec{v} \wedge \vec{B} \parallel} \approx \frac{v_\phi}{v} \gg 1} \quad (55)$$

Par hypothèse, le terme magnétique peut donc être négligé.

Un bilan de quantité de mouvement de l'électron entre t et $t + dt$, avec $dt \ll \tau$ mais aussi petit devant la période du champ $\vec{E}$ de sorte qu'on pourra prendre $\vec{F}$ constante pendant dt :

$$\vec{p}(t + dt) = \left(1 - \frac{dt}{\tau}\right) \left[\vec{p}(t) + \underbrace{\vec{F}(t)dt}_* \right] \quad (56)$$

En effet, $\left(1 - \frac{dt}{\tau}\right)$ donne la probabilité qu'il n'y ait pas eu de choc pendant dt . et $*$ est la quantité de mouvement que reçoit l'électron entre 2 chocs.

Donc, à l'ordre 1 en dt :

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{p} = -\frac{1}{\tau} \vec{p} + \vec{F}(t) \quad (+\mathcal{O}(dt^2)) \quad (57)$$