

# LP30 – RAYONNEMENT DIPOLAIRE ÉLECTRIQUE

13 juin 2019

Lagoin Marc (discussion) & Ramborghi Thomas

## Niveau : L2

### Commentaires du jury

- TROP de calcul tue le calcul
- Discuter des approximations réalisées
- Application aux antennes doit être connue
- milieu homogène ne diffuse pas (s'en convaincre!)

### Bibliographie

➤ *Physique PC-PC\**, **Cap Prépa** Pour la première partie de la leçon

### Prérequis

- Ondes électromagnétiques dans le vide
- Équation de Maxwell
- Potentiel vecteur et scalaire
- Notion de jauge
- Approximation des régimes quasi-stationnaires
- Vecteur de Poynting

### Table des matières

<b>1</b>	<b>Considération générale sur le rayonnement dipolaire</b>	<b>2</b>
1.1	Positionnement du problème . . . . .	2
1.2	Mise en équation des champs . . . . .	3
1.3	Bilan énergétique . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Application du modèle à des phénomènes observés</b>	<b>5</b>
2.1	Diffusion Rayleigh . . . . .	5
2.1.1	Constatation expérimentale . . . . .	5
2.1.2	Modèle représentatif : électron élastiquement lié . . . . .	5
2.1.3	Puissance rayonnée . . . . .	5
2.2	Angle de Brewster . . . . .	6
2.2.1	Constatation expérimentale . . . . .	6
2.3	Positionnement du problème . . . . .	6

## Introduction

Dans les cours précédents, nous nous sommes intéressés à la propagation d'onde électromagnétique dans le vide. Cette étude ne peut pas être complète si nous ne nous intéressons pas aux sources de telle onde. Nous verrons que leur géométrie nous permet d'expliquer de nombreuses constatations expérimentales concrètes tel que la couleur du ciel ou encore la présence d'un angle limite appelé angle de Brewster au delà duquel il est possible de faire disparaître complètement la lumière réfléchi sur du verre. Des recherches effectuées à partir de cette constatation permis à Brewster de déterminer l'indice d'un milieu par réflexion de la lumière ; ce qui lui value la médaille d'or de la royal Society en 1815.

## 1 Considération générale sur le rayonnement dipolaire

### 1.1 Positionnement du problème

Nous allons commencer par poser notre système d'études. Nous considérons une distribution de charges  $q_i$  se déplaçant à la vitesse  $v_i$  dans un domaine  $\mathcal{D}$ . Nous la considérerons discrète pour les calculs qui vont suivre mais il est possible de passer à la limite continue grâce à des intégrales. Elles induisent un courant  $\vec{j}$ . Nous supposons que l'espace entourant ce domaine est vide charge (et donc de courant).

Notre étude va reposer sur 3 hypothèses permettant de faciliter sa résolution analytique :

- Nous considérons que nos particules chargées se déplacent à des vitesse très inférieur à la vitesse de la lumière. Nous portons donc notre étude dans le cas non-relativiste.

Le potentiel vecteur associée à cette distribution prend la forme :

$$\mathcal{A}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_i \frac{q_i \vec{v}_i(M, t - \frac{|\vec{P}_i \vec{M}|}{c})}{|\vec{P}_i \vec{M}|} \quad (1)$$

Nous avons vu dans les cours précédant que nous pouvions faire un choix de jauge (le lagrangien de d'un système s'écrit toujours à la dérivée totale exacte d'une fonction. Ce choix est à priori purement arbitraire. Nous choisirons ici la jauge de Lorenz qui impose :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathcal{A}} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial t} = 0 \quad (2)$$

Nous pouvons, par intégration, en déduire le potentiel vecteur  $\mathcal{V}$  :

$$\mathcal{V}(M, t) = \mathcal{V}(M, 0) - c^2 \int_0^t dt' \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathcal{A}}(M, t') \quad (3)$$

Les formules obtenues pour les champs  $\vec{\mathcal{A}}$  et  $\mathcal{V}$  sont appelées potentiel retardés. Elles sont appelées ainsi car la valeur du potentiel à un instant  $t$  donné, dépend des charges et des courants à un temps  $t - \frac{|\vec{P}_i \vec{M}|}{c}$ . Elle tiennent donc compte du temps de propagation de l'onde électromagnétique dans la matière (ou le vide).

Les formules très générales obtenues permet de résoudre de résoudre tous les problèmes non relativistes que nous pouvons rencontrer. Cependant le calcul devient très vite compliqué voir irréalisable analytiquement. Nous allons donc nous intéresser à des problèmes particuliers pour lesquelles nous pouvons émettre des hypothèses supplémentaires.

- Nous nous intéresserons aux champs produits à grande distance par rapport à la taille caractéristique du domaine  $\mathcal{D}$  que nous noterons  $l$ . Cette considération se traduit mathématiquement par :  $|\vec{OM}| \gg l$ . Elle porte le nom d'hypothèse dipolaire.
- De plus, nous pouvons considérer toujours pour la raison que les temps de propagation au sein du domaine  $\frac{l}{c}$  sont négligeable devant les variations des charges et des courants de temps caractéristique  $\tau$ . Ceci permet de faire l'approximation :  $\frac{l}{c} \ll \tau$ . Nous reconnaissons l'approximation des régimes quasi-stationnaire.

*Nota Bene* : la faible vitesse des charges devant  $c$  nous indique ici que nous nous sommes placés en ARQS magnétique. Information utile par la suite lorsque nous supposons  $\vec{j} = 0$  dans Maxwell-Ampère ! Ceci signifie que les charges dominent sur les courants.

Avec ces hypothèses, nous pouvons alors remplacer  $t - \frac{|\vec{P}_i \vec{M}|}{c}$  par  $t - \frac{|\vec{OM}|}{c}$  signifiant que toutes les sources possèdent le même retard. Pour alléger les notations, nous notons  $t'$  le temps retardé,  $\vec{r}'_i$  le vecteur position  $\vec{OP}'_i$  repérant la particule  $i$  et  $\vec{r}$  le vecteur position  $\vec{OM}$ . Nous obtenons alors :

$$\vec{\mathcal{A}}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \sum_i q_i \vec{v}_i(t') = \frac{\mu_0}{4\pi r} \sum_i q_i \frac{d}{dt'} \vec{r}'_i(t') = \frac{\mu_0}{4\pi r} \frac{d}{dt'} \left( \sum_i q_i \vec{r}'_i(t') \right) \quad (4)$$

Nous reconnaissons, dans la dernière parenthèse, le moment dipolaire totale  $\vec{p}(t') = \sum_i q_i \vec{r}'_i(t')$  ; ce qui nous permet d'obtenir l'expression finale :

$$\vec{\mathcal{A}}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \frac{d}{dt'} \vec{p}(t') \quad (5)$$

## 1.2 Mise en équation des champs

Nous allons définir notre repère de telle sorte que le moment dipolaire totale est fixe et orienté suivant l'axe Oz. Nous ne perdons pas de généralisé par il est toujours possible de décomposer un vecteur en trois composantes dans un espace de dimension 3. Nous allons également nous placer en coordonnées cylindrique  $(\rho, \varphi, z)$ . Ici  $\vec{\mathcal{A}} = \mathcal{A}(r, t) \vec{e}_z$

*Nota Bene* : il sera utile d'accompagner la leçon d'un transparent sur lequel figurera les repères cylindriques et sphériques permettant de voir plus facilement le lien entre les différentes coordonnées.

Nous avons vu que le champs magnétique est relié au potentiel vecteur par la relation :  $\vec{\mathcal{B}} = \vec{\nabla} \wedge \vec{\mathcal{A}}$

En coordonnées cylindrique, le gradient prend la forme :

$$\vec{\nabla} = \left( \begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial \rho} \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{array} \right) \quad (6)$$

Ce qui nous donne dans notre cas :

$$\vec{\mathcal{B}} = - \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial \rho} \vec{e}_\varphi \quad (7)$$

Rappelons que :

$$r = \sqrt{z^2 + \rho^2}, t' = t - \frac{r}{c} \text{ et } \sin(\theta) = \frac{\rho}{r} \quad (8)$$

Dans ce système de coordonnées,  $\vec{\mathcal{B}}$  prend la forme :

$$\vec{\mathcal{B}}(M, t) = - \frac{\mu_0}{4\pi r} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \frac{d}{dt'} p(t') \right) \vec{e}_\varphi - \frac{\mu_0}{4\pi} \left( \frac{d}{dt'} p(t') \right) \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{1}{r} \vec{e}_\varphi \quad (9)$$

Si nous développons les dérivées :

$$\frac{\partial r}{\partial \rho} = \frac{\rho}{\sqrt{z^2 + \rho^2}} = \sin(\theta) \quad (10)$$

ainsi que :

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \left( \frac{d}{dt'} p(t') \right) = \left( \frac{d^2}{dt'^2} p(t') \right) \frac{\partial(t - \frac{r}{c})}{\partial \rho} = - \left( \frac{d^2}{dt'^2} p(t') \right) \frac{\sin(\theta)}{c} \quad (11)$$

Nous finissons par obtenir :

$$\vec{\mathcal{B}}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left( \frac{1}{c r} \frac{d^2}{dt'^2} p(t') + \frac{1}{r^2} \frac{d}{dt'} p(t') \right) \sin(\theta) \vec{e}_\varphi \quad (12)$$

La contribution majoritaire du champ magnétique à grande distance est donc l'évolution temporelle du dipôle électrique total.

Nous allons en déduire la forme du champ électrique  $\vec{\mathcal{E}}$  grâce à l'équation de Maxwell-Ampère. Dans le cadre de l'ARQS (magnétique), elle prend la forme :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{\mathcal{B}} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{\mathcal{E}}}{\partial t} \quad (13)$$

La suite du calcul devient laborieuse et il n'a pas un grand intérêt à le développer ici. Personnellement, j'opterai par une résolution sur mathématica. Nous nous contenterons donc de donner le résultat qui se trouve dans le livre de Physique *PC – PC\** de Renvoizé :

$$\vec{\mathcal{E}}(M, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( 2 \cos\left(\frac{p}{r^3} + \frac{1}{r^2 c} \frac{d}{dt'} p(t')\right) + \frac{Q_{tot}}{r^2} \right) \vec{e}_r + \frac{\sin(\theta)}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{p}{r^3} + \frac{1}{r^2 c} \frac{d}{dt'} p(t') + \frac{1}{rc^2} \frac{d^2}{dt'^2} p(t') \right) \vec{e}_\theta \quad (14)$$

Où  $Q_{tot}$  représente la charge totale de la distribution.

Nous allons discuter des 2 cas limites de notre étude. Rappel : pour faire nos calculs, nous avons supposé que :  $|\vec{OM}| \gg l$  (hyp dipolaire) et  $\frac{l}{c} \ll \tau$  (ARQS). Cette restriction ne nous dit pas si la distance à laquelle nous mesurons le champ électromagnétique  $|\vec{OM}|$  est grande ou petite devant l'échelle caractéristique des variations des charges et des courants  $\tau c$ . Nous pouvons donc définir :

- une zone de champ proche où  $r \gg \tau c$  dans laquelle la distance à laquelle nous effectuons la mesure reste petite devant celle d'évolution de la distribution. Les calculs nous redonnent une décroissance inversement proportionnelle au carré de la distance et des dépendances en  $t$  et non  $t'$  (dipôle électrostatique).
- une zone dite de rayonnement où  $r \ll \tau c$ . Ici à l'inverse, le retard dû à la propagation de l'information joue un rôle important.

Nous allons donner la forme des champs dans cette zone car il s'agit du domaine valable pour de nombreuses applications . nous obtenons :

$$\vec{\mathcal{B}}(M, t) \simeq \frac{\mu_0}{4\pi cr} \frac{d^2}{dt'^2} p(t') \sin(\theta) \vec{e}_\varphi \quad \text{et} \quad \vec{\mathcal{E}}(M, t) \simeq \frac{\sin(\theta)}{4\pi\epsilon_0 r c^2} \frac{d^2}{dt'^2} p(t') \sin(\theta) \vec{e}_\theta \quad (15)$$

- Les calculs nous donnent ici une décroissance lente en  $\frac{1}{r}$ .
- La dépendance en  $\sin(\theta)$  traduit l'anisotropie du rayonnement.
- La dépendance en  $t' = t - \frac{r}{c}$  nous la vitesse de déplacement du champ ( $c$ ).
- les direction des champs nous renseigne sur la direction de propagation de l'onde électromagnétique, ici suivant  $e_r$ . De plus, ils sont orthogonaux entre eux  $\rightarrow$  structure d'onde plane.
- le moment dipolaire total apparait sous sa dérivée seconde ; ce qui indique qu'il faut que les charges du domaine soient accélérée. Il s'agit d'une propriété importante aux nombreuses retombées (accélérateurs synchrotrons).

### 1.3 Bilan énergétique

Nous allons maintenant déterminer les propriétés énergétiques dans la zone de rayonnement. Elles sont données par le vecteur de Poynting  $\vec{\Pi}$  :

$$\vec{\Pi}(M, t) = \frac{\vec{\mathcal{E}}(M, t) \wedge \vec{\mathcal{B}}(M, t)}{\mu_0} = \frac{\sin^2(\theta)}{16\pi^2 \epsilon^2 c^3 r^2} \left( \frac{d^2}{dt'^2} p(t') \right)^2 \vec{e}_r \quad (16)$$

De nouveau, plusieurs remarques :

- La puissance est elle aussi anisotrope (max dans la direction perpendiculaire à l'axe et nulle suivant l'axe du moment dipolaire total.
- Le sens de ce vecteur est toujours suivant les  $z$  positifs  $\rightarrow$  énergie cédée par les charges au milieu extérieur.

*Flexcam* : fig 23.3 p682 diagramme du rayonnement en puissance d'un dipôle à grande distance.

Si nous voulons la puissance rayonnée à travers une sphère de rayon  $r$ , il nous suffis d'intégrer. Nous obtenons alors

$$\mathcal{P}(t') = \frac{1}{6\pi\epsilon_0 c^3} \left( \frac{d^2}{dt'^2} p(t') \right)^2 \quad (17)$$

## 2 Application du modèle à des phénomènes observés

### 2.1 Diffusion Rayleigh

#### 2.1.1 Constatation expérimentale

##### Diffusion de Rayleigh dans le lait

↗ Sextant, p273-277

⊖ 2/3 minutes

- Nous remplissons une cuve d'eau à laquelle nous ajoutons quelques centilitre de lait entier. Puis nous l'éclairons à l'aide d'une lampe Quartz-Iode. La lumière diffusée doit être de couleur bleue et celle transmise de couleur rouge/orangée.
- A l'entrée de la cuve, nous plaçons également un polariseur ainsi qu'un filtre anti-calorique après la lampe pour le protéger. La lumière doit être partiellement polarisée perpendiculairement au plan de propagation, nulle à la transmission et dans un état intermédiaire pour un angle quelconque.

Essayons de voir en bon physicien comment nous allons expliquer ces observations grâce à nos connaissances sur le rayonnement dipolaire.

#### 2.1.2 Modèle représentatif : électron élastiquement lié

Dans notre expérience, les éléments diffusant sont des micelles de liquide d'un rayon caractéristique de 100nm. Elles sont constituées d'atomes, donc d'un noyau chargé positivement et d'un nuage électronique chargé négativement. Ce dernier est déformé sous l'action du champ électrique émis par la QI et forme donc notre dipôle. Pour décrire cette interaction lumière-matière, nous allons passer par le modèle bien connu de l'électron élastiquement lié.

En nous plaçant dans le référentiel du noyau (choix pertinent puisque se dernier bouge peu par rapport au nuage), nous effectuons le principe fondamental de la dynamique sur notre système (ici l'électron de masse  $m_e$ , de charge  $q$  et de position  $r$ ) :

*Nota Bene* : faire un schéma du problème au tableau !

$$m_e \frac{d^2}{dt^2} \vec{r} = \vec{\mathcal{F}}_{rappel} + \vec{\mathcal{F}}_{frottement} + \vec{\mathcal{F}}_{\mathcal{E}} \quad (18)$$

$$= -m\omega_0^2 \vec{r} - \frac{m}{\tau} \frac{d}{dt} \vec{r} - e \vec{\mathcal{E}} \quad (19)$$

L'équation étant linéaire, nous pouvons passer en notation complexe ( $\underline{r}$ ,  $\underline{\mathcal{E}}$ ). Nous obtenons :

$$-m\omega^2 \underline{r} = -m\omega_0^2 \underline{r} - i \frac{m}{\tau} \omega \underline{r} - e \underline{\mathcal{E}} \quad (20)$$

$$\text{soit : } \underline{r} = -\frac{e}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + \frac{i\omega}{\tau}} \underline{\mathcal{E}} \quad (21)$$

Nous en déduisons simplement le moment dipolaire de l'électron :

$$\underline{p} = -e \underline{r} = \frac{e^2}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + \frac{i\omega}{\tau}} \underline{\mathcal{E}} \quad (22)$$

#### 2.1.3 Puissance rayonnée

Nous nous plaçons dans le cas de la diffusion Rayleigh  $\omega \ll \omega_0$  qui est valable lorsque la fréquences d'excitation par le champ  $\vec{\mathcal{E}}$  est faible devant la fréquence propre de vibration de l'atome. Ici le champ exciteur est dans le visible d'où une fréquence  $\omega \approx 10^{14} \text{rad.s}^{-1}$ . Nous avons vu que si le lait est peu concentrée dans l'eau, les micelles ont une taille caractéristique de 100nm soit une pulsation  $\omega_0 \approx 3.10^{15} \text{rad.s}^{-1}$ . Le choix du domaine est donc justifié.

Dans ce régime : 
$$\vec{p}(\omega) = \frac{e^2}{m\omega_0^2} \vec{\mathcal{E}} \tag{23}$$

Si nous considérons une champ électrique de la forme  $\vec{\mathcal{E}} = \mathcal{E}_0 e^{i\omega t}$ , nous trouvons facilement l'expression de  $\vec{p}(t)$ .

Pour rappel la puissance rayonnée à travers une sphère de rayon r est :

$$\mathcal{P}(t') = \frac{1}{6\pi\epsilon_0 c^3} \left( \frac{d^2 p(t')}{dt'^2} \right)^2 \tag{24}$$

donc ici  $\mathcal{P} \propto \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^4 | \vec{\mathcal{E}} |$

Nous allons donc pouvoir justifier les constatations expérimentales précédentes. La présence de  $\omega^4$  nous indique que la fréquence est d'autant plus grande que la fréquence est élevée. Ceci justifie pourquoi la lumière nous parait bleue perpendiculairement à la direction de propagation du rayon. En nous plaçant face à la sortie du rayon, nous observons d'onde émise. Puisque le bleu est très bien diffusé par nos dipôles, l'onde sortante sera donc pauvre en hautes fréquences d'où la couleur rouge/orangée en sortie. Nous expliquons par la même occasion pourquoi le ciel est bleu en journée et rouge au couché du soleil. Les dipôles émettant de façon anisotrope dans la direction transverse à leur excitation, nous comprenons pourquoi la lumière est polarisé perpendiculairement.

## 2.2 Angle de Brewster

### 2.2.1 Constatation expérimentale



#### Angle de Brewster

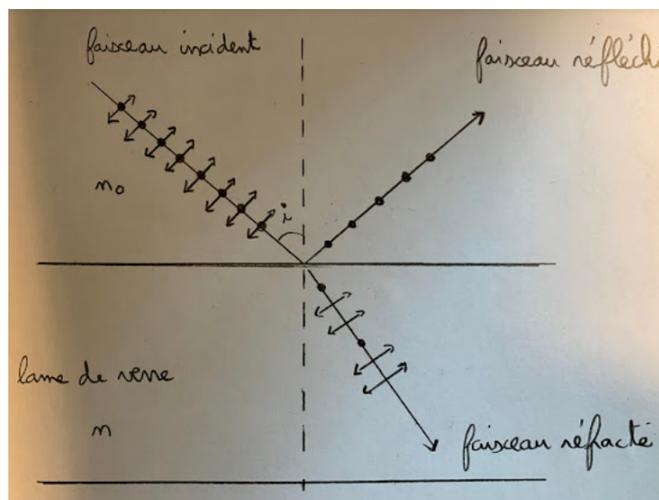
➤ Sextant, p269-272

⊖ 1 minutes

Nous éclairons une lame d'indice connu sous incidence non nul à l'aide d'une lampe QI non polarisé et nous observons le rayon réfléchi après passage dans un analyseur. Si nous sommes sous incidence de Brewster, nous pouvons éteindre le faisceau en tournant l'analyseur.

## 2.3 Positionnement du problème

Pour comprendre le phénomène, nous assimilons les particules constituant le dioptré à des dipôles oscillant. Lorsqu'il sont soumis à un rayon incident, il diffuse la lumière de façon anisotrope. En effet, nous avons vu que la puissance émise dans sa direction oscillation est nulle. Par conséquent, le rayon réfléchis à une polarisation orthogonale au plan d'incidence si la direction entre l'angle réfracté et celui réfléchis font un angle de 90°.



Pour le dessin, voir Houard p267 figure 9.25

L'angle de Brewster  $n_0 \sin(i_B) = n \sin(r) = n \sin(\frac{\pi}{2} - i_B) = n \cos(i_B)$  d'où :  $i_B = \arctan(\frac{n}{n_0})$

## conclusion

Caractéristique du champ généré par un ensemble de charge :

- Il est asymétrique.
- Il est non nul si ces dernière sont accélérées.
- Il possède une structure d'onde plane en champ lointain.
- Il a une dépendance en  $\omega^4$  dans sa puissance
- Il traduit la perte d'énergie par le dipôle qui est cédée à son environnement.
- Il permet d'expliquer la couleur du ciel ainsi que l'existence de l'angle de Brewster.