

LP 31 – PRÉSENTATION DE L’OPTIQUE GÉOMÉTRIQUE À L’AIDE DU PRINCIPE DE FERMAT

4 juin 2019

Victor Dansage & Ramborghi Thomas (réédition)

Niveau : L3

Bibliographie

- ✦ *Optique : une approche expérimentale et pratique*, **Houard** Pour la photo 2.14 du mirage page 47
- ✦ *Optique géométrique*, **T. Bécherrawy** Pour l’ensemble des démonstrations de la leçon
- ✦ *dictionnaire de physique*, **Richard Taillet** Pour les définitions propres
- ✦ *Principes variationnels et dynamique*, **J-L Basdevant** Pour les rappels éventuels sur le principe variationnel
- ✦ *Les instruments d’optique*, **Luc Dettwiller** Pour l’approche ondulatoire à se remettre en mémoire pour les questions
- ✦ *Optique géométrique et ondulatoire*, **M. Bertin, J-P. Faroux et J. Renault** Apparemment super bouquin, super clair!

Prérequis

- Optique géométrique (bases du lycée)
- Cours d’introduction à la mécanique analytique

Table des matières

1	Cadre de l’optique géométrique	2
1.1	Rayon lumineux et approximation de l’optique géométrique	2
1.2	Principe de Fermat (et chemin optique)	3
2	Loi empirique de l’optique géométrique	3
2.1	Propagation rectiligne, retour inverse	3
2.2	Lois de Snell-Descartes	4
3	Les apports du principe de Fermat à l’optique géométrique	5
3.1	Stigmatisme des systèmes centrés	5
3.2	Équation des rayons lumineux	6
3.3	Application aux mirages	7
4	Conclusion	8

Introduction

Certaines lois de l'optique géométrique, comme la réflexion sur un miroir plan sont connus depuis l'antiquité. Au contraire, d'autre comme la réfraction sur un dioptre séparant 2 milieux ont été découvertes plus tard au 17^{ème} siècle par Snell et Descartes et ont débouché sur les bien connues lois de Snell-Descartes.

Peu convaincu par la démarche de Descartes, Fermat résout ce qu'il juge être "peu rigoureux" par un peu de géométrie et énonce le principe de Fermat qui est un principe variationnel et permet de retrouver des lois de l'optique géométrique et permet de plus l'étude du stigmatisme en partant sur le chemin emprunté par la lumière.

Au cours de cette leçon, nous définirons en premier temps le cadre d'étude de l'optique géométrique et le principe de Fermat, et nous verrons comment retrouver les lois de l'optique géométriques avant de voir quelques applications.

1 Cadre de l'optique géométrique

1.1 Rayon lumineux et approximation de l'optique géométrique

Nous avons déjà remarqué que l'ombre d'un objet est homothétique (c'est à dire correspond à un grandissement ou une réduction du dit objet). Cette idée suggère que le faisceau lumineux issue de S est constitué de rayon lumineux rectiligne (voir figure 1).

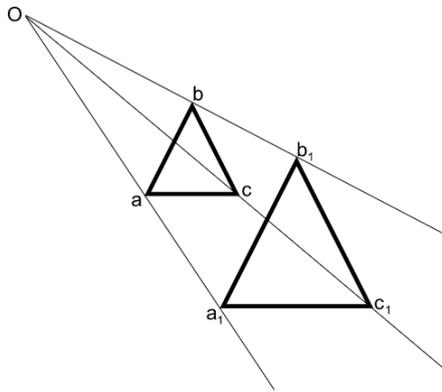


FIGURE 1 – Homothétie de centre O transformant le triangle (abc) en le triangle $(a_1b_1c_1)$. cette image a été prise sur Wikipédia.

Le laser est une bonne approche de rayon lumineux. Pour le montrer, il faut disposer de la poussière ou de la craie sur le parcours du faisceau. Nous voyons clairement que le laser est constitué de rayon lumineux. Est-il possible d'en isoler un ? Si nous plaçons un diaphragme et que nous réduisons son ouverture, nous finissons par observer que la figure s'élargit. Nous sommes alors confronté au problème de diffraction.

définition : un rayon lumineux est une idéalisation de la région de l'espace traversée par un fin pinceau de lumière et dans laquelle nous négligeons tout phénomène de diffraction.

Ces rayons lumineux sont les objets de base de l'optique géométrique qui considère que la lumière émise dans une direction donnée à partir d'un point fixe suit une courbe unidimensionnelle (analogue à une trajectoire).

Dans l'optique géométrique, nous négligeons alors le comportement ondulatoire de la lumière. Cela reste valable dans le cadre de l'approximation de l'optique géométrique pour lesquelles les variations des amplitudes de \vec{E}_0 , \vec{H}_0 , ϵ_r et μ_r sont très lentes à l'échelle de la longueur d'onde λ_0 .

Dans la suite du cours, nous considérerons alors des milieux diélectriques linéaires et nous considérerons que l'approximation de l'optique géométrique est vérifiée. nous négligerons alors le caractère ondulatoire de la lumière et nous utiliserons la notion de rayon lumineux.

1.2 Principe de Fermat (et chemin optique)

Fermat était un physicien français du 17^{ème} siècle qui trouvait que la démonstration de la loi de réfraction de Descartes manquait de rigueur. Notamment parce que ce dernier avait du supposer que la vitesse de la lumière dans un milieu matériel était plus important que dans le vide.

Fermat était convaincu qu'un peu de géométrie pouvait le tirer d'affaire et il parvint à retrouver les lois de la réfractons de Descartes à partir d'un principe variationnel qu'il nommait "principe d'économie naturelle" et qui correspond à un principe de moindre temps que nous appelons aujourd'hui principe de Fermat.

Énoncé du principe : le trajet suivi par la lumière d'un point A à un point B correspond à une courbe dont le temps de parcours est stationnaire (minimal local) par rapport aux courbes fictives voisines.

Il s'agit bien d'un principe variationnel¹ car ce principe correspond à la stationnarité de :

$$\Delta t = \int_A^B dt \tag{1}$$

Nous pouvons réécrire Δt de la forme :

$$\Delta t = \int_A^B \frac{dl(M)}{v(M)} = \frac{1}{c} \int_A^B n(M) dl(M) = \frac{1}{c} \mathcal{L}_{AB} \tag{2}$$

où nous avons introduit \mathcal{L}_{AB} le chemin optique entre les points A et B. Comme c est une constante, le principe de Fermat revient à la stationnarité du chemin optique.

↓ *Maintenant que nous avons énoncé le principe variationnel de Fermat, nous allons voir comment le permet de retrouver les lois de l'optique géométrique que nous avons déjà rencontré et verrons comment ce principe permet d'étudier le stigmatisme et donc la formation des images.*

2 Loi empirique de l'optique géométrique

2.1 Propagation rectiligne, retour inverse

Comme nous voulons imposer la stationnarité du chemin optique, nous allons nous intéresser à la variation de longueur d'un segment lorsque ses extrémités subissent de petits déplacements. Un schéma est donné en figure 2.

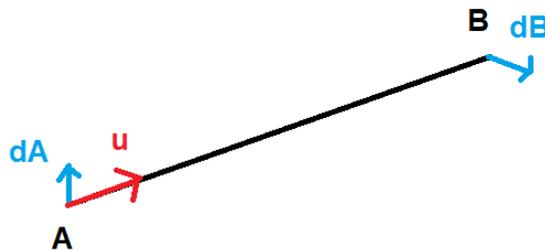


FIGURE 2 – Calcul de dAB .

Désignons par A et B les extrémités du segment et par AB sa longueur. Soient \vec{dA} et \vec{dB} les déplacements élémentaires de A et de B, et O un point fixe. Si nous différenciant la relation : $AB = \sqrt{AB^2}$, nous obtenons :

$$dAB = \frac{\vec{AB} \cdot d\vec{AB}}{AB} = \frac{\vec{AB}}{AB} \cdot (d\vec{OB} - d\vec{OA}) = \vec{u} \cdot (d\vec{OB} - d\vec{OA}) \equiv \vec{u} \cdot (\vec{dB} - \vec{dA}) \tag{3}$$

1. comme vous avez pu le voir en mécanique analytique où la quantité stationnaire est l'action.

- Propagation rectiligne : dans un milieu homogène d'indice n_0 :

$$\mathcal{L}_{AB} = \int_A^B n_0 dl = n_0 AB \quad (4)$$

La lumière se propage en ligne droite dans les milieux homogènes.

- Retour inverse : de plus si $\int_A^B n_0 dl$ est stationnaire, alors $\int_B^A n_0 dl$ l'est aussi car ils sont égaux. Par conséquent $\mathcal{L}_{AB} = \mathcal{L}_{BA}$ et nous retrouvons le retour inverse de la lumière.

2.2 Lois de Snell-Descartes

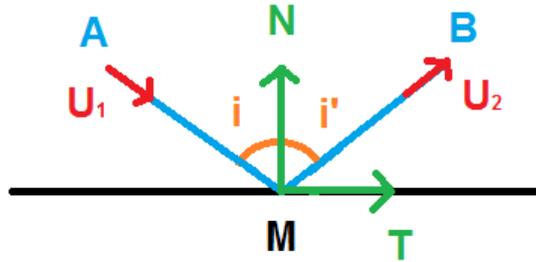
Considérons un rayon lumineux se propageant de A à B dans un milieu homogène d'indice n avec une réflexion en un point M. Comme le milieu est homogène, il faut prendre pour chemin de propagation les segments $[AM]$ et $[MB]$ pour que \mathcal{L}_{AB} soit stationnaire.

Ainsi :

$$\mathcal{L}_{AB} = \mathcal{L}_{AM} + \mathcal{L}_{MB} = n(AM + MB) \quad (5)$$

Comment devons nous choisir M pour que \mathcal{L}_{AB} soit stationnaire ?

- Loi de la réflexion :



Le principe de Fermat nous conduit à :

$$\begin{aligned} d\mathcal{L}_{AB} &= 0 \\ dAM + dMB &= 0 \\ \vec{u}_1 \cdot d\vec{M} - \vec{u}_2 \cdot d\vec{M} &= 0 \\ (\vec{u}_1 - \vec{u}_2) \cdot d\vec{M} &= 0 \end{aligned}$$

Cette relation est valable quelque soit $d\vec{M}$. Comme M appartient au dioptré alors $d\vec{M} \propto \vec{T}$ donc :

$$(\vec{u}_1 - \vec{u}_2) \propto \vec{N} \quad (6)$$

Les vecteurs \vec{u}_1 ($vecu_2$) et \vec{N} définissent le plan d'incidence. Nous retrouvons ainsi la loi de la réflexion. En projetant l'équation 6 suivant \vec{T} , nous obtenons :

$$\vec{u}_1 \cdot \vec{T} = \vec{u}_2 \cdot \vec{T} \quad \iff \quad \sin i = \sin i' \quad (7)$$

- Loi de la réfraction

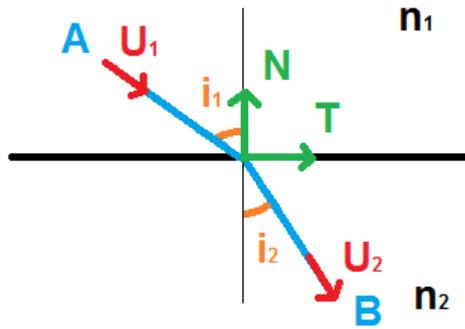
Nous repartons du principe de Fermat :

$$d\mathcal{L}_{AB} = n_1 dAM + n_2 dMB = (n_1 \vec{u}_1 - n_2 \vec{u}_2) \cdot d\vec{M} \quad (8)$$

Comme précédemment, cette expression doit être nulle pour tout déplacement $d\vec{M}$ s'effectuant à la surface du dioptré. $(n_1 \vec{u}_1 - n_2 \vec{u}_2)$ est donc colinéaire à la normal \vec{N} . En projetant suivant \vec{T} , nous obtenons :

$$n_1 \vec{u}_1 \cdot \vec{T} = n_2 \vec{u}_2 \cdot \vec{T} \quad \iff \quad n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2 \quad (9)$$

Nous retrouvons ainsi la loi de la réfraction.



↓ Qu'est ce que Fermat permet de dire de plus ?

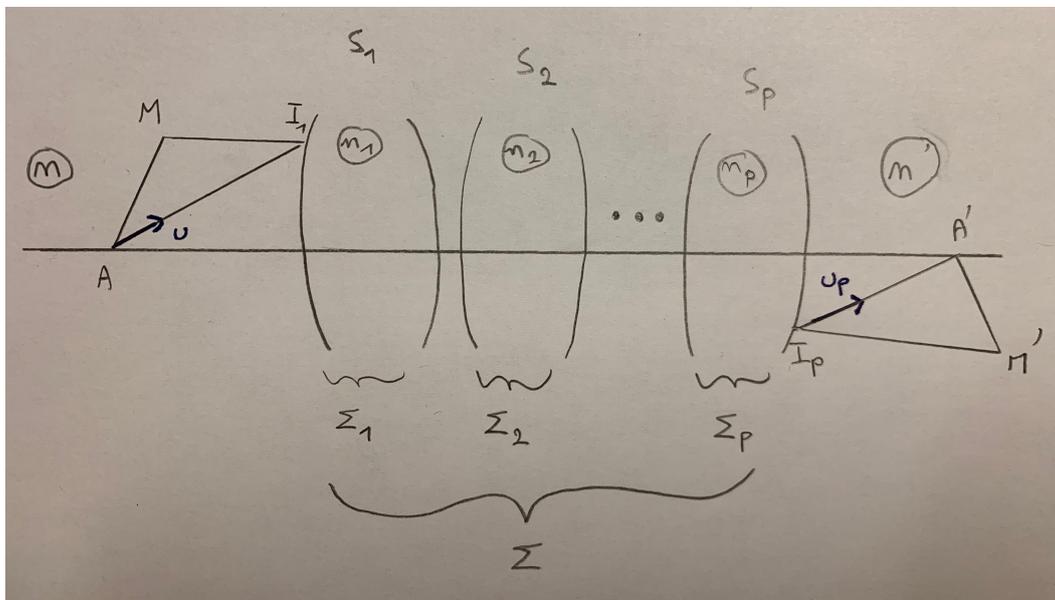
3 Les apports du principe de Fermat à l’optique géométrique

3.1 Stigmatisme des système centrés

définition : Un système optique est dit stigmatique pour 2 points si l’ensemble des rayons lumineux issue d’un des points et traversant le système optique se recoupent au second.

Le stigmatisme rigoureux définit pour tous les points n’existe que très rarement (miroir plan). Dans les autres cas, nous pouvons parler de stigmatisme approché qui est nécessaire pour traiter la formation des images.

Considérons un système optique centré Σ séparant un milieu d’entrée d’indice n d’un milieu de sortie d’indice n' et formé par une suite de surfaces dioptrique de sommets $S \equiv S_1, S_2, \dots, S_p \equiv S'$.



Soit :

$$\mathcal{L}_{AI_1I_2\dots I_pA'} = nAI_1 + n_1I_1I_2 + \dots + n_{p-1}I_{p-1}I_p + n'I_pA' \tag{10}$$

Considérons de petits déplacements $\delta I_1, \delta I_2, \dots, \delta I_p$ des points d’incidences sur les dioptres sphérique du système. À l’ordre 1 :

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L}_{AI_1I_2\dots I_pA'} &= n\frac{\overrightarrow{AI_1}}{\overrightarrow{AI_1}}\delta\vec{I}_1 + n_1\frac{\overrightarrow{I_1I_2}}{\overrightarrow{I_1I_2}}(\delta\vec{I}_2 - \delta\vec{I}_1) + \dots + n_{p-1}\frac{\overrightarrow{I_{p-1}I_p}}{\overrightarrow{I_{p-1}I_p}}(\delta\vec{I}_p - \delta\vec{I}_{p-1}) - n'\frac{\overrightarrow{I_pA'}}{\overrightarrow{I_pA'}}\delta\vec{I}_p \\ &= (n\vec{u} - n_1\vec{u}_1)\cdot\delta\vec{I}_1 + (n_1\vec{u}_1 - n_2\vec{u}_2)\cdot\delta\vec{I}_2 + \dots + (n_p\vec{u}_p - n'\vec{u}')\cdot\delta\vec{I}_p\end{aligned}$$

D'après le principe de Fermat, le système est stigmatique pour le couple (A, A') si

$$\forall \delta\vec{I}_1, \dots, \delta\vec{I}_p, \quad \delta\mathcal{L}_{AI_1I_2\dots I_pA'} = 0 \quad (11)$$

d'où :

$$(n_{i-1}\vec{u}_{i-1} - n_i\vec{u}_i)\cdot\delta\vec{I}_i = 0 \quad (12)$$

Considérons à présent un point M voisin de A et M' voisin de A' (objet étendu) et le chemin optique $\mathcal{L}_{MI_1, \dots, I_pM'}$. Alors :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{MM'} - \mathcal{L}_{AA'} &= (nMI_1 - n'I_pM') - (nAI_1 - n'I_pA') \\ &\approx n\frac{\overrightarrow{AI_1}}{\overrightarrow{AI_1}}\overrightarrow{M\vec{A}} - n'\frac{\overrightarrow{I_pA'}}{\overrightarrow{I_pA'}}\overrightarrow{M'\vec{A}} \\ &\approx n\vec{u}\overrightarrow{M\vec{A}} - n'\vec{u}'\overrightarrow{M'\vec{A}}\end{aligned}$$

Comme le système est stigmatique pour (A, A') , il l'est pour (M, M') (ie stigmatisme approché) si :

$$\delta\mathcal{L}_{MM'} = \delta\mathcal{L}_{MM'} - \delta\mathcal{L}_{AA'} = 0 \quad (13)$$

Nous obtenons alors la condition de stigmatisme approchée :

$$n\vec{u}\overrightarrow{M\vec{A}} = n'\vec{u}'\overrightarrow{M'\vec{A}} \quad (14)$$

Remarque : nous pouvons obtenir la condition des sinus d'Abbe en écrivant cette condition de stigmatisme approchée pour des objets transversaux en prenant $\overrightarrow{M\vec{A}}$ et $\overrightarrow{M'\vec{A}}$ orthogonaux à l'axe principale. Nous obtenons alors :

$$n\overrightarrow{M\vec{A}}\sin u = n'\overrightarrow{M'\vec{A}}\sin u' \quad (15)$$

De même, avec la condition de Herschel en prenant M et M' sur l'axe, nous obtenons :

$$n\overrightarrow{M\vec{A}}\sin^2 \frac{u}{2} = n'\overrightarrow{M'\vec{A}}\sin^2 \frac{u'}{2} \quad (16)$$

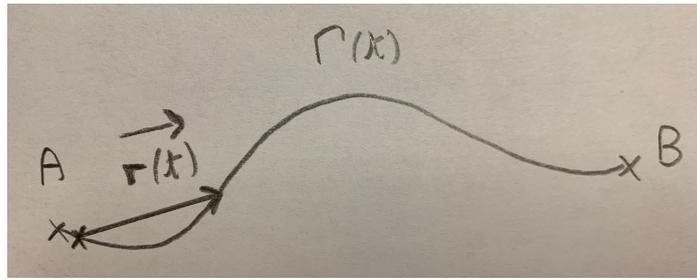
↓
Nous venons de voir que Fermat permet de discuter de la formation des images à travers l'étude du stigmatisme. Nous allons à présent voir comment il permet de traiter le cas d'un milieu inhomogène et utiliser sa nature variationnelle.

3.2 Équation des rayons lumineux

Nous nous proposons ici de déterminer à partir du principe variationnel de Fermat, l'équation des rayons lumineux dans un milieu quelconque. Soit une courbe Γ entre les points A et B paramétré par la grandeur $t \in [a, b]$. Le principe de Fermat donne ici :

$$\mathcal{L}_{AB} = \int_A^B n(\vec{r})ds(\vec{r}) = \int_A^B n(r(t))\left\|\frac{d\vec{r}(t)}{dt}\right\|dt = \int_A^B n(r(t))\sqrt{\left(\frac{d\vec{r}(t)}{dt}\right)^2}dt \quad (17)$$

avec ds l'abscisse curviligne et \vec{r} le vecteur position.



$$\mathcal{L}_{AB} = \int_A^B n(x, y, z) \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt \tag{18}$$

Nous reconnaissons à gauche de l'égalité ce nous appelons action en mécanique analytique et le lagrangien dans l'intégrale du terme de droite. Nous pouvons donc appliquer le théorème d'Euler-Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = 0 \quad q \forall \{x, y, z\} \tag{19}$$

Ce qui nous donne :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{n(x, y, z) \dot{q}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} \right) - \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \frac{\partial n(x, y, z)}{\partial q} &= 0 \\ \frac{1}{\|\dot{\vec{r}}\|} \frac{d}{dt} \left(\frac{n(x, y, z) d\vec{r}}{\|\dot{\vec{r}}\|} \right) &= \vec{\nabla} n(\vec{r}(t)) \end{aligned}$$

Or : $ds = \|\dot{\vec{r}}\| dt$
donc :

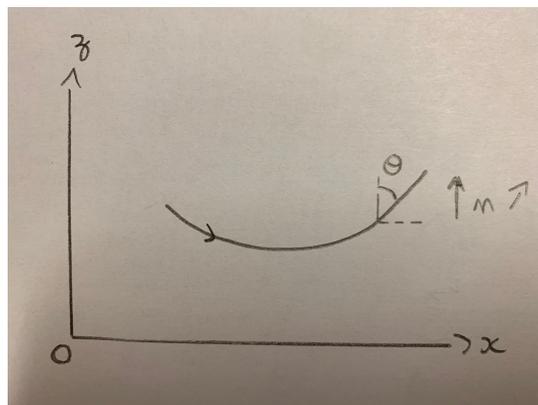
$$\frac{d}{ds} \left(n \frac{d\vec{r}}{ds} \right) = \vec{\nabla} n \tag{20}$$

Cette équation décrit la marche d'un rayon lumineux en fonction de la variation de l'indice du milieu dans lequel il se propage.

Remarque : dans un milieu homogène, $\vec{\nabla} n = 0$ et donc $\vec{r} = s\vec{a} + b$. La propagation est alors rectiligne.

3.3 Application aux mirages

Projeter image dans le Houard à la flexcam.



Un mirage optique se produit lorsque l'indice du milieu varie de façon continue (le plus souvent variation de température dans l'air). Nous considérons donc un milieu d'indice $n = \sqrt{az + b}$. Nous avons :

$$\vec{\nabla} n \frac{d}{ds} \left(n(z) \frac{d\vec{r}}{ds} \right) \quad \text{et} : \quad \frac{\partial n^2}{\partial z} = 2n \frac{\partial n}{\partial z} \quad \text{d'où} : \quad \frac{\partial n}{\partial z} = \frac{a}{2n} \tag{21}$$

$$\vec{\nabla}n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{a}{2n} \end{pmatrix} \quad (22)$$

Nous étudions le rayon lumineux dans le plan (Oxz), x définit pour faire une étude planaire (symétrie). $\frac{d\vec{r}}{ds}$ unitaire donc nous pouvons définir un angle θ tel que :

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \begin{pmatrix} \sin \theta \\ 0 \\ \cos \theta \end{pmatrix} \quad (23)$$

En projetant suivant x, nous obtenons :

$$\left(\vec{\nabla}n \frac{d}{ds} \left(n(z) \frac{d\vec{r}}{ds} \right) \right) \cdot \vec{e}_x \iff \frac{d}{ds} (n(z) \sin \theta) = 0 \iff n(z) \sin \theta = cste \quad (24)$$

En projetant suivant z, nous obtenons :

$$\frac{d}{ds} (n(z) \cos \theta) = \frac{a}{2n(z)} \quad (25)$$

Or :

$$\cos \theta = \frac{\sin \theta}{\tan \theta} = \frac{\sin \theta}{\frac{dx}{dz}} = \sin \theta \frac{dz}{dx} \quad (26)$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} (n(z) \cos \theta) &= \frac{d}{ds} \left(n(z) \sin \theta \frac{dz}{dx} \right) = n(z) \sin \theta \frac{d}{ds} \left(\frac{dz}{dx} \right) \\ &= n(z) \sin \theta \frac{d}{dx} \left(\frac{dz}{dx} \right) \frac{dx}{ds} = n(z) \sin^2 \theta \frac{d^2 z}{dx^2} \end{aligned}$$

d'où :

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{a}{2n^2(z) \sin^2 \theta} = cste' \frac{a}{2} \quad \text{avec : } cste' \geq 0 \quad (27)$$

finalemet :

$$z = ctes' \frac{a}{2} \frac{x^2}{2} + bx + c \quad (28)$$

Le rayon lumineux se courbe vers le haut si $a \geq 0$. Nous m=parlons alors de mirage inférieur ou mirage chaud (lorsque le sol est plus chaud, route goudronnée désert) et le mirage supérieur (mer, banquise) lorsque le sol est plus froid.

4 Conclusion

Nous avons vu au cours de cette leçon qu'il était possible de traiter l'optique géométrique que vous connaissiez déjà avec un principe variationnel. Ce dernier permettait de discuter de la formation des images et du cas d'un milieu in-homogène en ne considérant pas la nature ondulatoire de la lumière.

Nous pourrions à présent faire le lien avec cet aspect de la lumière en partant des équation de Maxwell, et en établissant l'équation eikonal et le théorème de Malus unissant les approches. En dehors de l'approximation de l'optique géométrique, l'approche ondulatoire reste valide et permet de traiter le phénomène de diffraction (théorie de Kirchoff).