LP35 - Diffraction de Fraunhoffer

June 16, 2019

Contents

1 Introduction théorique à la diffraction **3**
- 1.1 Principe de Huygens Fresnel . . . 3
  - 1.1.1 Position du problème : . . . 3
  - 1.1.2 Enoncé : . . . 4
  - 1.1.3 Mathématiques : . . . 5
- 1.2 approximation de Franhoffer : . . . 5
  - 1.2.1 Traitement de L'amplitude . . . 6
  - 1.2.2 Traitement de la phase . . . 6
  - 1.2.3 (Optionnel) Nombre de Fresnel . . . 7
  - 1.2.4 Bilan : Hypothèses : . . . 7

2 Étude de la figure de diffraction de Fraunhofer **8**
- 2.1 Premier exemple simple : la fente rectangulaire . . . 8
- 2.2 Diffraction de Fraunhoffer et transformée de fourrier . . . 9
- 2.3 Propriétés . . . 10

3 Optique de Fourier **11**
- 3.1 Réseau blasé . . . 11
- 3.2 Filtrage optique . . . 12

4 Annexe **14**
- 4.1 Principe de Yugens Fresnel : Justification par les fonctions de Green . . . 14
  - 4.1.1 Situation du problème : . . . 14
  - 4.1.2 Rappel de fonctions de Green . . . 14
  - 4.1.3 Source ponctuelle . . . 14
  - 4.1.4 Application à la diffraction par un trou . . . 15
- 4.2 Quelques définitions des concepts : . . . 17
- 4.3 Questions possibles : . . . 17

- 2017 : Les conditions de Fraunhofer et leurs conséquences doivent être présentées, ainsi que le lien entre les dimensions caractéristiques d'un objet diffractant et celles de sa figure de diffraction.
  Jusqu'en 2013, le titre était : Diffraction de Fraunhofer. Applications.

- 2011, 2012, 2013, 2014 : Les conditions de l'approximation de Fraunhofer doivent être clairement énoncées. Pour autant, elles ne constituent pas le coeur de la leçon.

- 2009, 2010 : Les phases associées aux amplitudes doivent être traitées avec soin.
- 2006, 2007, 2008 : Le principe de Huygens-Fresnel doit être exposé clairement, sans débordements mathématiques excessifs. Il faut expliquer pourquoi la diffraction de Fraunhofer est pertinente dans la formation des images.
  2005 : Rappelons que la diffraction de Fraunhofer accompagne l'image géométrique d'une source initiale et que l'écriture du principe de Huygens-Fresnel dans le cadre de l'approximation de Fraunhofer doit être rigoureuse. Les applications ne doivent pas se limiter au trou circulaire et à la fente fine. Dans ce dernier cas, il faut justifier le calcul qui est mené.

De manière générale, on s'attend à ce que soient dégagées les caractéristiques fortes de la diffraction de Fraunhofer : la figure de diffraction est centrée sur l'image géométrique de la source, invariante par translation de l'objet diffractant dans son plan etc (des propriétés qui sont effectivement celles de la transformée de Fourier)

Marc Vincent : "Il est important de savoir que dans depuis la réforme de 2014 en CPGE, on ne parle plus du tout du principe de Huygens-Fresnel avec la décomposition en ondes sphériques, mais toute la diffraction est développée dans le cadre de l'optique de Fourier avec une décomposition en ondes planes. Les présentations sont équivalentes mathématiquement mais les paradigmes sont très différents."

Bon courage !

Références :

- J'intègre tout en un PC PC* pour un petit historique.
- Ondes lumineuses, R-J Champeau
- Physique expérimentale, Jolidon p284 pour le passage de Fresnel à Fraunhofer (en particulier le 2.2 p 294 pour Fraunhofer exact), page 303 pour Fresnel (pour les questions) et page 320 pour Fraunhofer

Niveau : L3

Prérequis :

- Transformées de Fourier
- Modèle scalaire de la lumière
- Interférences
- Constante d'équilibre
- Fractions molaires, massiques

faire un doublet de trous de young pour le expériences plutôtque des fentes de Young.
voir 2016

Introduction

Experience :

J'éclaire ici une fente mince de largeur réglable par un faisceau laser. Quand la largeur de la fente est de l'ordre du cm, on observe sur l'écran (lointain) l'image géométrique de la fente, ie une fente. Si maintenant je réduis la largeur de la fente, je vois que la figure est modifiée. On observe un étalement périodique des tâches lumineuses autour de l'image géométrique. Cette figure est appelée figure de diffraction. On voit ici que les rayons lumineux ne vérifient plus les lois de l'optique géométrique.

L'optique géométrique n'est pas une théorie capable de décrire complètement la propagation d'une onde lumineuse. En effet, elle se base sur l'approximation que tous les éléments utilisés sont de grandes dimensions devant la longueur d'onde de la lumière. Cependant, dans la plupart des situations pratiques les ondes lumineuses se propagent parmi des obstacles ou des ouvertures qui modifient leur nature (en particulier la forme des fronts d'ondes où la phase instantanée).
On observe alors que la distribution de l'intensité lumineuse observée sur un écran placé derrière ledit obstacle, la figure de diffraction[1], est élargie par rapport à la prédiction de l'optique géométrique. Ce phénomène constitue une mise en évidence de la nature ondulatoire de la lumière et peut également être vu avec d'autres types d'ondes. Par exemple la houle arrivant parallèlement à l'entrée d'un port ressort sous forme d'anneaux concentriques.

A ce stade, la diffraction en optique se caractérise par :

- Une limitation dans l'espace d'un front d'onde
- Une limite des lois de l'optique géométrique
- Apparait lorsque la taille de la pupille n'est plus très grande devant la longueur d'onde (rapport 100 environ)

Les objectifs pour ce cours sont :

- Quantifier la figure de diffraction et la relier à l'objet diffractant
- Voir l'importance de la diffraction dans quelques applications.

Pour cela, nous utiliserons une **approche scalaire de l'optique ondulatoire**, comme nous avons pu déjà le faire auparavant lors de notre étude des interférences. Nous verrons notamment que ces deux phénomènes sont liés.

1 Introduction théorique à la diffraction

Comment accéder à la distribution d'intensité situé derrière un obstacle diffractant ?

1.1 Principe de Huygens Fresnel

Voir J'intègre tout en un Sanz p833-834 pour un petit historique.

[1] Diffraction vient du latin "diffringere" qui signifie "briser en morceaux".

1.1.1 Position du problème :

Notre problème est le suivant : quelle est l'amplitude en un point de l'espace M, situé derrière une pupille dont on repère un point P, éclairée par une source ponctuelle monochromatique[2] S, connaissant l'amplitude au point P ?

L'utilisation des équations de Maxwell serait trop complexe pour résoudre ce problème. En fait, on va pouvoir simplement utiliser le modèle scalaire de la lumière[3].

On connaît donc l'onde lumineuse avant l'objet diffractant et en particulier à sa surface. On s'intéresse à son devenir après avoir interagi avec l'objet diffractant.

1.1.2 Enoncé :

Ne pas hésiter à insister sur l'intérêt du principe d'Huygens-Fresnel[4] : on connaît la vibration lumineuse sur la surface de l'objet diffractant, juste après qu'elle l'ait traversé, et on cherche à reconstruire la vibration lumineuse derrière l'objet à partir de cette donnée.

Le principe de Huygens-Fresnel est à comprendre seulement comme une intuition (de Huygens) dont la formulation mathématique (mise en place par Fresnel) conduit à des calculs d'éclairement confirmés par l'expérience, sous certaines conditions.

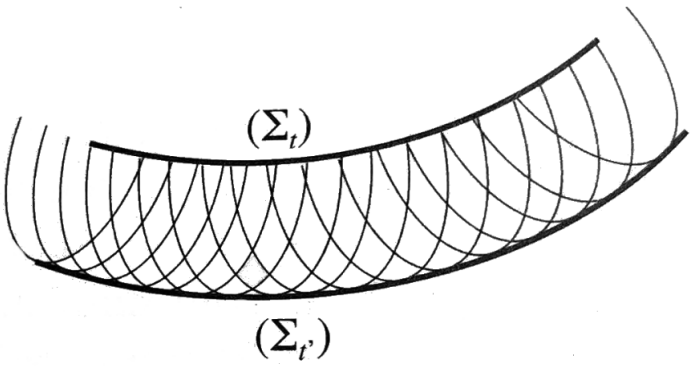


Figure 1: Un petit dessin pour bien comprendre.

[2] On ne réduit pas la généralité du problème en se limitant au cas d'une source ponctuelle monochromatique car il suffirait d'intégrer sur les longueurs d'onde pour une source polychromatique et sur les points de la source pour une source étendue.

[3] On associe à l'onde lumineuse un état de vibration a sans tenir compte de son caractère vectoriel. On ne tient donc pas compte de la polarisation.

[4] **Contribution de Yugens (1678)** :
" La lumière se propage de proche en proche. Chaque élément d'une surface d'onde se comporte comme une source secondaire d'ondelettes sphériques. L'enveloppe de ces ondelettes à un instant donné définit la nouvelle surface d'onde. "
Contribution de Fresnel (1818) :
" Les différentes sources secondaires sont cohérentes. Les ondelettes interfèrent entre elles "

Experience :

Soit un front d'onde Σ_t, **tout se passe comme si**[a] tous les points du front d'onde se comportaient comme des sources secondaires ponctuelles.
Chaque point P du front d'onde émet ainsi une ondelette sphériques dont l'amplitude et la phase sont identiques à celles de l'onde incidente en ce point $a(P,t)$.
(Puisque c'est un front d'onde, la phase est la même en chaque point) Ces ondelettes interfèrent alors entre elles pour former le nouveau front d'onde $\Sigma_{t'}$

[a] Ce "principe" est un "tout se passe comme si"-like. Il n'a pas de réel fondement physique. Il compare le résultat de l'expérience avec le résultat prédit par cette théorie : En effet, il y a aucune raison physique pour que les points du front d'onde émettent des ondes sphériques en phase.
C'est juste une base qui permet de calculer le résultat. Ce qui compte c'est que cela marche.

1.1.3 Mathématiques :

On considère une ouverture plane (Σ) centrée sur 0 éclairée par une source ponctuelle S monochromatique de longueur d'onde fixée λ. On décompose (Σ) en éléments de surface $d\Sigma$ centrés sur un point courant P, on calcule ensuite l'éclairement au point M d'un écran placé à une distance R de l'ouverture. Cette situation est présentée en figure (2).

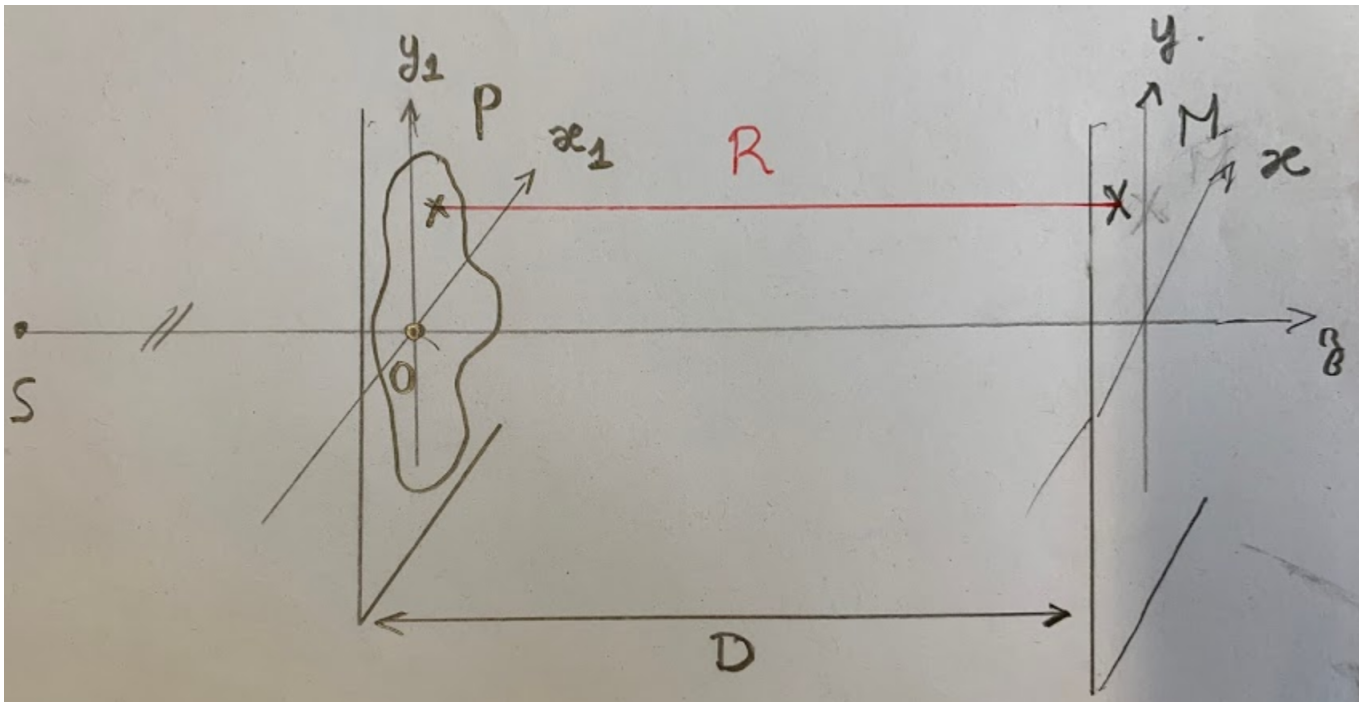


Figure 2: Notations

On applique le principe de Huygens-Fresnel :
Chaque élément de surface $d\Sigma$ se comporte alors comme la source d'ondes sphériques appelées ondelettes dont l'amplitude instantanée en P est proportionnelle à l'amplitude instantanée $a_S(P,t)$ de l'onde émise par S arrivant en P et à l'élément de surface $d\Sigma$;
Ces sources fictives sont toutes cohérentes entre elles.

On écrit donc l'amplitude complexe a de la vibration lumineuse en M en sommant toutes les vibrations des ondes allant en M depuis P en sommant sur $P \in \Sigma$:

$$\boxed{a(M,t) = \frac{A}{i\lambda}\int_\Sigma \left[\frac{\exp(ikR)}{R}\right] d\Sigma} \qquad avec\ :\ \begin{cases} A = a_S(P=0,t) \\ R = PM \end{cases} \tag{1}$$

On suppose en effet ici que l'objet est suffisamment petit et suffisamment loin de la source pour avoir $a_S(P,t) = a_S(P=0,t)$ et le sortir ainsi de l'intégrale.

1.2 approximation de Franhoffer :

On choisit nos systèmes d'axes pour qu'ils aient les mêmes directions et des z confondus.
On note $P = (x_1, y_1, 0)$ et $M = (x, y, D)$. D est donc la distance entre l'objet l'écran. On a donc :

$$R = \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + D^2} = D\sqrt{\frac{(x-x_1)^2}{D^2} + \frac{(y-y_1)^2}{D^2} + 1} \tag{2}$$

Dans les conditions usuelles (conditions de Gauss), on peut considérer que les angles sont faibles et que l'écran est loin, soit : que D est grand devant les autres termes sous la racine. On fait alors un DL en $\frac{(x-x_1)^2}{D^2} + \frac{(y-y_1)^2}{D^2}$:

$$R = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{(x-x_1)^2}{D^2} + \frac{(y-y_1)^2}{D^2}\right) = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{x_1^2 + 2xx_1 + x^2}{D^2} + \frac{y_1^2 + 2yy_1 + y^2}{D^2}\right) \tag{3}$$

Soient a et b les tailles typiques de l'objet diffractant. On peut alors comparer les différents termes intervenant dans l'intégrale :

Il y a un **terme d'amplitude au dénominateur** et un **terme de phase dans l'exponentielle** :

$$a(M,t) = \frac{A}{i\lambda}\int_\Sigma \left[\frac{\exp(ikR)}{R}\right] d\Sigma \tag{4}$$

L'astuce de ce développement est qu'on ne va pas garder les mêmes termes dans la phase et dans l'amplitude.

1.2.1 Traitement de L'amplitude

On remarque expérimentalement que l'**amplitude dépend peu de la taille de l'objet diffractant**. On va donc garder le terme d'ordre 0 en a et b. On a alors $R \approx D$:

$$a(M,t) = \frac{A}{i\lambda}\int_\Sigma \left[\frac{\exp(ikR)}{D}\right] d\Sigma \tag{5}$$

1.2.2 Traitement de la phase

Cependant, **la phase doit être comparée à** π

$$a(M,t) = \frac{A}{i\lambda}\int_\Sigma \left[\frac{\exp(i\frac{2\pi D}{\lambda}\left\{1 - \frac{1}{2}\left(\frac{x_1^2+2xx_1+x^2}{D^2} + \frac{y_1^2+2yy_1+y^2}{D^2}\right)\right\})}{D}\right] d\Sigma \tag{6}$$

On peut bien entendu sortir la phase constante pour obtenir :

$$a(M,t) = \frac{Ae^{i\phi_0}}{i\lambda}\int_\Sigma \left[\frac{\exp(-i\frac{1}{2D^2}\frac{2\pi D}{\lambda}\left\{x_1^2 + y_1^2 + 2xx_1 + 2yy_1\right\})}{D}\right] d\Sigma \tag{7}$$

$$a(M,t) = \frac{Ae^{i\phi_0}}{i\lambda D}\int_\Sigma \left[\exp(-i\frac{\pi}{\lambda D}\left\{x_1^2+y_1^2+2xx_1+2yy_1\right\})\right] d\Sigma = \frac{Ae^{i\phi_0}}{i\lambda D}\int_\Sigma \left[\exp(-i\phi)\right] d\Sigma \quad (8)$$

Dans la phase ϕ, qui est la phase qui dépend encore de P, on voit apparaître deux types de termes :

$$\phi = -i\frac{\pi}{\lambda D}\left\{ \underbrace{x_1^2+y_1^2}_{quadratiques} + \underbrace{2xx_1+2yy_1}_{linaire} \right\} \quad (9)$$

On voit dès lors qualitativement qu'il va y avoir deux régimes de diffraction possible :

- si on ne garde que les termes linéaires, donc, **si on peut négliger les termes quadratiques**, on obtient l'expression d'une onde plane[5] qui arrive en M. **C'est ce qu'on appelle la diffraction de Fraunhoffer**.
- **Si on ne peut pas négliger les termes quadratiques on est en régime de diffraction de Fresnel**. La structure des ondes obtenues est alors approximativement parabolique. Mais on n'en parlera pas dans cette leçon.

1.2.3 (Optionnel) Nombre de Fresnel

Nombre de Fresnel :

Pour pouvoir comparer ces termes, on définit le nombre de Fresnel : Il compare les termes quadratiques à π :

$$\boxed{\mathcal{F} = \frac{ab}{\lambda D}} \quad (10)$$

On est en régime de diffraction de Fraunhoffer lorsque $\mathcal{F} < 1$[6].

En régime diffraction de Fraunhoffer, on obtient donc :

$$a(M,t) = \frac{A}{i\lambda}\int_\Sigma \left[\frac{\exp(-i\frac{2\pi}{\lambda D}\left\{xx_1+yy_1\right\})}{D}\right] d\Sigma \quad (13)$$

[5] DISCLAIMER : l'auteur de ce poly ne se sent pas responsable si cette interprétation est mal reçue du Jury :
Il considère que c'est faire passer beaucoup trop de choses sous le tapis :
Par exemple, on a arrêté le DL de R à l'ordre 2 dans la phase mais il reste encore des contributions linéaires et quadratiques dans les termes suivants qui font que le profil de l'onde ne sera jamais ni plan ni vraiment parabolique.

[6] En vrai, on a fait une grosse approximation en considérant notre source à l'infini dès le début du calcul.
Si on refaisait les choses plus proprement, on aurait deux termes d'ondes sphériques dans l'intégrale :

$$a(M,t) = \frac{1}{i\lambda}\int_\Sigma \left[\frac{\exp(ikR)}{R}\frac{\exp(ikSO)}{SO}\right] d\Sigma \quad (11)$$

On peut alors faire les mêmes développements. On récupère alors une onde plane en entrée et en sortie pour :

$$\boxed{\mathcal{F} = \frac{ab}{\lambda}\left(\frac{1}{D}+\frac{1}{D_s}\right)} \quad (12)$$

où D_s est la distance écran source.
On peut aller plus loin et faire remarquer que ce sont les rayons de courbure locaux qui comptent et qui valent approximativement $1/D_s$ et $1/D$.
Voir Jolidon p305

1.2.4 Bilan : Hypothèses :

On est dans l'approximation de Fraunhoffer lorsque :

- Le nombre de Fresnel est petit devant 1 : $\mathcal{F} << 1$ (Fraunhoffer approché)[7]
- On travaille dans les conditions de Gauss (ce qui autorise à considérer le DL sur R.

2 Étude de la figure de diffraction de Fraunhofer

2.1 Premier exemple simple : la fente rectangulaire

Dans cette partie, on regarde comment réaliser le calcul de l'intensité sur l"écran dans un cas simple : L'objet diffractant est une fente rectangulaire de taille $a \times b$. Elle est éclairée par une source située à l'infini. Ce qui devient dans le cas de notre fente rectangle (on peut exprimer $d\Sigma$:

$$\begin{aligned}
a(M,t) &= \frac{A}{i\lambda}\int_{-a/2}^{a/2}\int_{-b/2}^{b/2}\left[\frac{\exp(-i\frac{2\pi}{\lambda D}\{xx_1+yy_1\})}{D}\right]dx_1dy_1 \\
&= \frac{A}{i\lambda}\int_{-a/2}^{a/2}\left[\int_{-b/2}^{b/2}\frac{\exp(-i\frac{2\pi}{\lambda D}\{xx_1+yy_1\})}{D}dx_1\right]dy_1 \\
&= \underbrace{\frac{A}{i\lambda D}}_{C}\int_{-a/2}^{a/2}\left(\int_{-b/2}^{b/2}\left[\exp(-i\frac{2\pi}{\lambda D}xx_1)\right]dx_1 \quad \exp(-i\frac{2\pi}{\lambda D}yy_1)dy_1\right) \\
&= C\left[\frac{\lambda D}{2\pi x}\exp(-i\frac{2\pi}{\lambda D}xx_1)\right]_{-b/2}^{b/2}\left[\frac{\lambda D}{2\pi y}\exp(-i\frac{2\pi}{\lambda D}yy_1)dy_1\right]_{-a/2}^{a/2} \\
&= C\frac{\lambda D}{2\pi x}\left(\exp(-i\frac{2\pi x}{\lambda D}\frac{a}{2}) - \exp(+i\frac{2\pi x}{\lambda D}\frac{a}{2})\right)\frac{\lambda D}{2\pi y}\left(\exp(-i\frac{2\pi y}{\lambda D}\frac{b}{2}) - \exp(+i\frac{2\pi y}{\lambda D}\frac{b}{2})\right) \\
&= C\ ab\ sinc\left(\frac{\pi ax}{\lambda D}\right)sinc\left(\frac{\pi by}{\lambda D}\right)
\end{aligned}$$

Donc l'intensité sur l'écran est :

$$\boxed{I = I_0 \times sinc^2\left(\frac{\pi ax}{\lambda D}\right)sinc^2\left(\frac{\pi by}{\lambda D}\right)} \tag{14}$$

- On voit bien qu'on a une figure qui est periodique spatialement suivant x et y. Cette période est l'interfrange qui est reliée à la taille de la frange et à la longueur d'onde :

$$I = \lambda D/b \tag{15}$$

- La figure d'interférence a les mêmes symétries que l'objet diffractant.
- Expérimentalement, c'est bien ce que l'on observe.

Pour le cas de la fente dont on parlait au début, on peut simplement reprendre ce calcul avec $b \longrightarrow 0$. La figure va alors se ramasser sur l'axe x alors que la figure sur y devient un pic.

[7] Pour être en Fraunhoffer exact, il faut $\mathcal{F} = 0$ Ce qui s'obtient si la source est rigoureusement plane ou à l'infini ou bien si les deux rayons de courbures sont opposés et donc que $\mathcal{F} = 0$

Expérience :

Experience :

Remplacer la fente initiale par un diapositive comportant une fente carrée. Faire la diffraction de Fraunhoffer et mesurer plusieurs interfranges (attention, la tache centrale mesure $2I$)
Utiliser la relation précédente pour retrouver la taille de la fente (ne faire qu'un coté)

TR :

Cependant, vous avez vu que les calculs sont lourds, même pour un objet simple. Il nous faut aller plus loin dans l'interprétation... dans l'espoir qu'on remarquera quelque chose nous sauvera.

2.2 Diffraction de Fraunhoffer et transformée de fourrier

Reprenons l'expression assez générale que nous avions obtenu précédemment :

$$a(M,t) = \frac{A}{i\lambda}\int_\Sigma \left[\frac{\exp(-i\frac{2\pi}{\lambda D}\{xx_1+yy_1\})}{D}\right] d\Sigma \tag{16}$$

Un oeuil averti reconnaît la transformée de Fourier $2D$ d'une porte $2D$ à une constante multiplicative complexe C près Soit $u = \frac{x}{\lambda D} = \frac{\alpha}{\lambda}$ et $v = \frac{y}{\lambda D} = \frac{\beta}{\lambda}$). Où α et β peuvent êtres interprétés comme les angles duquel l'écran voit l'objet diffractant. On a alors :

$$a(M,t) = C\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{T}(x_1,y_1)\exp(-i2\pi\{ux_1+vy_1\})dx_1dy_1 \tag{17}$$

où $\mathcal{T}$ est la fonction de transparence du système. Elle relie l'état vibratoire incident sur l'objet diffractant et l'amplitude de l'onde diffractée.

On peut voir la fonction de transparence comme une fonction de réponse de notre ouverture. Elle a un module entre 0 et 1 et peut porter une phase. C'est un nombre complexe.

En reprenant l'exemple précédent :

$$\mathcal{T} = \Pi_a(x_1)\Pi_b(y_1) \tag{18}$$

où Π_b désigne la fonction porte. Donc :

$$a(M,t) = C\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \Pi_a(x_1)\Pi_b(y_1)\exp(-i2\pi\{ux_1+vy_1\})dx_1dy_1 \tag{19}$$

La transformée de Fourier de chaque porte étant un sinus cardinal, on retrouve directement le résultat précédent.

$$a(M,t) = C\ ab\ sinc\left(\frac{\pi ax}{\lambda D}\right) sinc\left(\frac{\pi by}{\lambda D}\right) = C\ ab\ sinc\left(\frac{\pi a}{\lambda}\alpha\right) sinc\left(\frac{\pi b}{\lambda}\beta\right) \tag{20}$$

On peut alors interpréter que les petits détails sur l'objet diffractant donnent des figures de diffractions plus larges et inversement[8][9]. Cette remarque (petit α = grande fréquence)est très importante pour comprendre le filtrage optique par la suite.

[8] La première annulation du sinus cardinal est en $u = 1/a$ Donc $\alpha = \lambda/a$. Donc, petit $a \longrightarrow$ grand α

[9] Comme la TF c'est linéaire, on peut imaginer que chaque pixel de nos images sont es petits rectangles comme ceux qu'on vient de tester

2.3 Propriétés

La diffraction de Franhauffer s'accompagne d'un certain nombre de propriétés : On les illustrera expérimentalement en même temps dans le cas de la fente. (Ce sont des propriétés liées à la TF) :

- En déplaçant la fente dans la direction de sa longueur, la figure reste inchangée tant que la lumière passe à travers la fente. Ce résultat est compréhensible puisque l'on a b que l'on suppose infini, donc le système est invariant par translation selon cette direction.
- En la déplaçant perpendiculairement à celle-ci, la figure de diffraction reste ici aussi inchangée. Ce résultat peut être compris en se rappelant qu'on envoie en entrée une onde quasi-plane : le problème est donc ici invariant par translation. Une autre manière de voir cela est comme une conséquence directe des propriétés de la TF (comme le précédent d'ailleurs) : en déplaçant la fente d'une distance x_0 , l'amplitude vaut :

$$A'(\alpha) = exp(-i2\pi\frac{\alpha}{\lambda}x_0) \times A \tag{21}$$

  Et l'intensité reste donc inchangée puisque seul un terme de phase est introduit.
- Si l'on déplace cette fois la source, l'image suit le déplacement de la source. L'une des manières de voir cela est que la figure de diffraction est centrée sur l'image géométrique; en déplaçant la source, on déplace l'image géométrique et donc la figure de diffraction.
- Si on fait une rotation de la fente, l'image va elle aussi subir une rotation de telle sorte à rester toujours perpendiculaire à la fente. Cela se comprend aisément en regardant les symétries du problème : l'image est orthogonale à la fente d'après le calcul effectué plus haut donnant l'intensité, et seule l'orientation de la fente compte ici, la source étant considérée comme ponctuelle.
- Enfin, si on joue sur la taille de la fente, on observe bien un allongement ou rétrécissement de la taille de la tache centrale de l'image de diffraction, comme discuté plus haut.
- On peut illustrer le **théorème de Babinet** :
  Il stipule que la forme d'une figure de diffraction est la même, **en dehors de l'image géométrique (!)**, si elle est obtenue à partir d'un corps opaque ou de son « conjugué », obtenu en perçant une plaque aux emplacements où se situe ce corps[10].
  L'exemple le plus simple d'utilisation de ce théorème est la diffraction par une fente : la figure est la même avec une fente ou avec un fil tendu, sauf au centre, là où il y a l'image géométrique qui est sombre pour le file et brillante pour la fente.

TR :
la figure de diffraction est centrée sur l'image géométrique de la source, invariante par translation de l'objet diffractant dans son plan, et invariante par "conjugaison" de l'objet diffractant à condition de regarder hors de l'image géométrique.

[10] Cela est dù à la parité de la transformée de Fourier entre autre.

3 Optique de Fourier

Finalement, la figure de diffraction de Fraunhoffer nous donne la transformée de Fourier de l'objet diffractant. L'utilisation de ce phénomène a de nombreuses applications.

3.1 Réseau blasé

Voici un réseau blazé. Comme on ne s'intéresse pas aux structures periodiques spécifiquement, On va simplement s'intéresser ici à une dent de ce réseau. On se limite entre $-a/2$ et $+a/2$ L'épaisseur traversée dans le verre est donc :

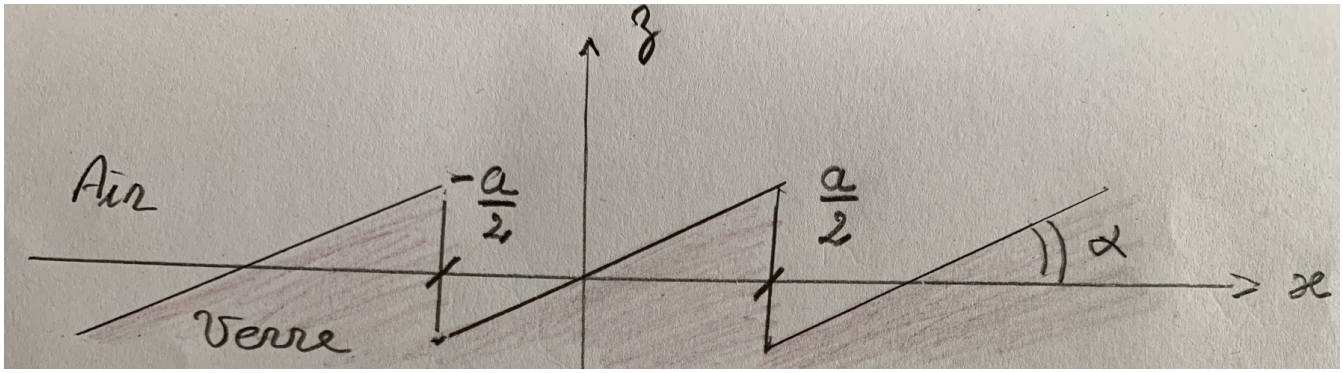


Figure 3: C'est x_1 et pas x su l'axe. L'axe optique est suivant z. Le réseau lui, il dit "PFF !"

$$e(x_1) = \alpha x_1 \tag{22}$$

Un rayon traversant le motif prend donc une phase (par rapport à si il traversait de l'air) :

$$\phi(x_1) = \frac{2\pi}{\lambda}(n-1)\alpha x_1 \tag{23}$$

La fonction de transparence du motif est donc :

$$\mathcal{T} = \Pi_a \times \exp(\frac{2\pi}{\lambda}(n-1)\alpha x_1) \tag{24}$$

La vibration en x sur La figure de diffraction donnée dans les conditions de Franhoffer est donc :

$$a(x) = C\int_{-\infty}^{+\infty} \Pi_a \times \exp(\frac{2\pi}{\lambda}(n-1)\alpha x_1)\exp(-i2\pi u x_1)dx_1 \tag{25}$$

$$= C\int_{-a/2}^{+a/2} \exp\left[-i2\pi x\left(u-(n-1)\frac{\alpha}{\lambda}x_1\right)\right]dx_1 \tag{26}$$

Donc :

$$a(x) = C\ sinc\left[\pi\left(u-(n-1)\frac{\alpha}{\lambda}\right)x\right] \tag{27}$$

Donc l'intensité :

$$I = I_0\ sinc^2\left[\pi\left(u-(n-1)\frac{\alpha}{\lambda}\right)x\right] \tag{28}$$

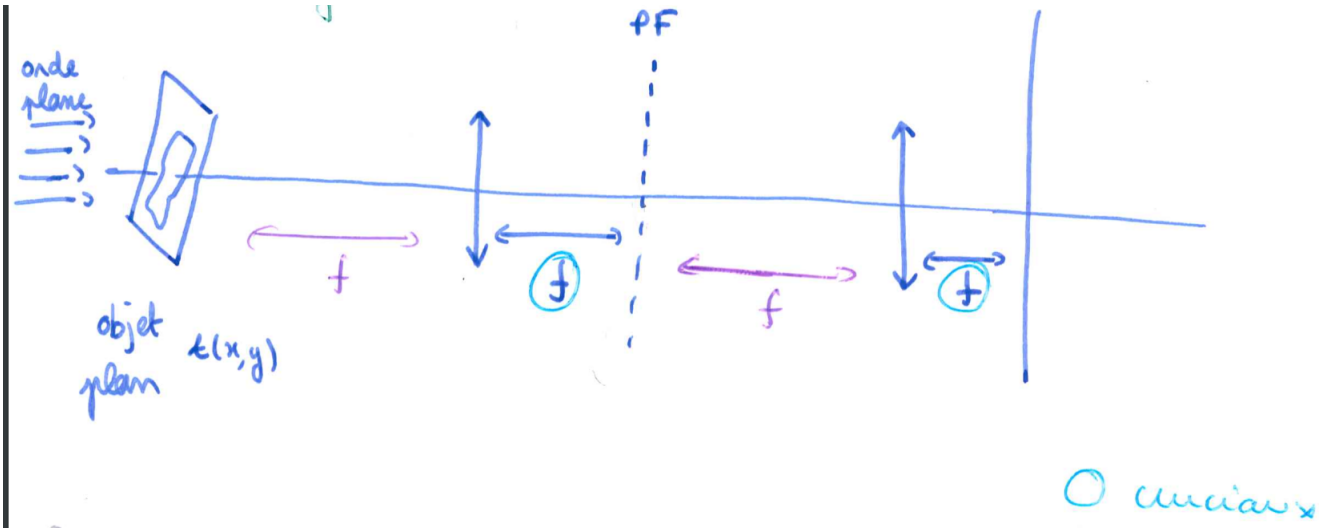
On voit que la figure de diffraction est cette fois ci centrée en $(n-1)\frac{\alpha}{\lambda}$. Avec un tel réseau, on peut donc choisir quel ordre du réseau on veut visualiser en particulier en y concentrant l'intensité. Montrer à l'aide de l'image de diffraction par un réseau pourquoi d'ordre zéro (où

toutes les longueur d'onde se recouvrent) est moins intéressant que les autres ordres.
C'est particulièrement utile dans le cas de l'obtention d'un spectre car pour un réseau simple, on a le maximum d'intensité qui coïncide avec la raie blanche de l'ordre 0. Cette fois-ci, on peut concentrer l'intensité sur l'ordre 1 par exemple.

Tr
| A présent, on va passer à une seconde application absolument nécessaire pour l'optique des lasers : le filtrage optique.

3.2 Filtrage optique

On considère le montage $4f$ suivant :



On a besoin des deux lentilles entourées en vert (bleu ciel d'après Victor) à distance focale.

- après l'objet diffractant, la figure de diffraction de Fraunhoffer se retrouve à l'infini.
- On utilise alors une lentille de gauche en vert pour projeter cette figure dans un plan que l'on appelle le plan de Fourier. Il s'agit donc du plan focal image de cette lentille.
- **Toute l'astuce du montage est là :** On peut imaginer que le plan de fourier est un nouvel objet diffractant dont la transmittance est la figure de diffraction précédente : Un écran plus ou moins opaque là où la figure est lumineuse...
  Maintenant, la deuxième lentille fait la même chose que la première en remplaçant le rôle de l'objet diffractant par l'image dans le plan de Fourier.
- On utilise alors une autre lentille pour conjuguer ce plan sur un écran d'observation.[11]

Le **Plan de Fourier** contient donc la figure de diffraction de Fruanhoffer de l'objet diffractant qui correspond donc à la transformée de Fourier de sa fonction de transmittance.

[11] Il faut donc avoir conscience que dans le plan de Fourier, on a la TF de l'objet diffractant.
Dans le plan d'observation, on obtient la TF de ce qui est dans le plan de Fourier. C'est donc la TF de la TF de l'objet diffractant. Or, on peut montrer que TF(TF(f(t)))=f(-t). On obtient donc sur l'écran une image correspondant à l'objet diffractant.

En agissant sur ce plan, on peut alors directement influencer le spectre de l'image sur l'écran. C'est le principe de l'épurateur de faisceau. On filtre les modes transverses par exemple pour garder le mode gaussien fondamental (voir Jolidon)

Conclusion

Remarquant expérimentalement les limites de l'optique géométrique, nous nous sommes intéressés au phénomène de diffraction et l'avons interprété à l'aide du principe de Huygens-Fresnel. Ce principe, difficilement utilisable en pratique, nous a amené à poser l'approximation de Fraunhofer, c'est-à-dire placer la source et l'image à l'infini, afin d'avoir une expression de l'amplitude plus facilement manipulable. Cela nous a amené à la propriété suivante : l'amplitude dans la diffraction de Fraunhofer est la TF de la transmittance de l'objet diffractant. Cette propriété nous a permis de nous pencher sur l'application du filtrage optique.

La diffraction est donc un phénomène avec lequel les chercheurs doivent jongler fréquemment : il peut être utilisé de manière bénéfique comme on l'a vu avec le filtrage, mais peut aussi poser des problèmes comme pour le pouvoir de résolution (critère de Rayleigh sur Wikipedia). De plus, nous venons de voir ici que l'optique géométrique ne suffisait pas à décrire certains phénomènes en optique, mais cela est vrai dans d'autres domaines de la physique : on retrouve des phénomènes de diffraction avec les vagues, les ondes acoustiques, ...

4 Annexe

4.1 Principe de Yugens Fresnel : Justification par les fonctions de Green

La démonstration présentée est reprise intégralment d'une correction de Hervé Gayvallet. Il donne les références :

Principles of Optics : Electromagnetic Theory of Propagation, Interference and Diffraction of Light ? BORN and WOLF .

4.1.1 Situation du problème :

Nous souhaitons exprimer la grandeur scalaire $F(-r,t)$ en un point de l'espace temps $M(-r,t)$, intérieur à un domaine $\mathcal{D}$, connaissant sa valeur en tout point $Q(-r_1,t1)$ d'une surface fermée $\mathcal{S}$ qui le délimite. La grandeur F décrit un champ scalaire spatio-temporel vérifiant l'équation de d'Alembert (dans le vide) sur un domaine, incluant $\mathcal{D}$, où nous supposons qu'il n'existe aucun terme de source.

4.1.2 Rappel de fonctions de Green

Les équations de départ sont :

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right) F(Q) = 0 & (\Delta \textit{ est pris en } Q) \\ \left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right) G(M-Q) = \delta(r-r_1)\delta(t-t_1) \end{cases} \tag{29}$$

La fonction $G = G(M-Q)$ qui a été introduite représente la fonction de Green du d'alembertien (réponse à une impulsion initiée en $-r$ au temps t).
Cette fonction décrit la propagation (onde sphérique) de cette impulsion initiale.
En multipliant le seconde équation par $F(M)$ puis en l'intégrant sur le temps (t_1) et l'espace ($-r_1$), après quelques transformations, on obtient la relation de Kirchoff permettant d'exprimer $F(M)$ (sous une forme intégrale) :

$$F(r,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 \int_{\mathcal{S}} \left[G\overrightarrow{grad}(F) - F\overrightarrow{grad}(G)\right] \overrightarrow{n}\, dS \qquad avec \begin{cases} G = G(M-Q) \\ F = F(Q) \end{cases} \tag{30}$$

Avec ici :

$$G(r-r_1, t-t_1) = \frac{1}{4\pi}\frac{\tau - R/c}{R}\Theta(R) \qquad avec \begin{cases} \tau = t - t1 \qquad R = \| r - r_1 \| \\ \Theta'(R) = \delta(R) \end{cases} \tag{31}$$

Θ est la fonction de Heaviside.
Notons que la connaissance de l'état vibratoire en tout point de la surface $\mathcal{S}$, et en tout temps, détermine complètement l'état vibratoire de tout point intérieur au domaine $\mathcal{D}$, à tout instant.

4.1.3 Source ponctuelle

Nous supposons que la surface $\mathcal{S}$ est soumise au champ émis par une source ponctuelle $\mathcal{S}$ **isotrope et mono- chromatique** (supposée placée au point O), générant l'onde sphérique :

$$F(r_1,t_1) = a\frac{\exp i\left((kr_1 - \omega t_1)\right)}{r_1} = f(r_1,t_1)\exp(ikr_1) \tag{32}$$

Les gradients s'expriment alors (se reporter à la figure (4) :

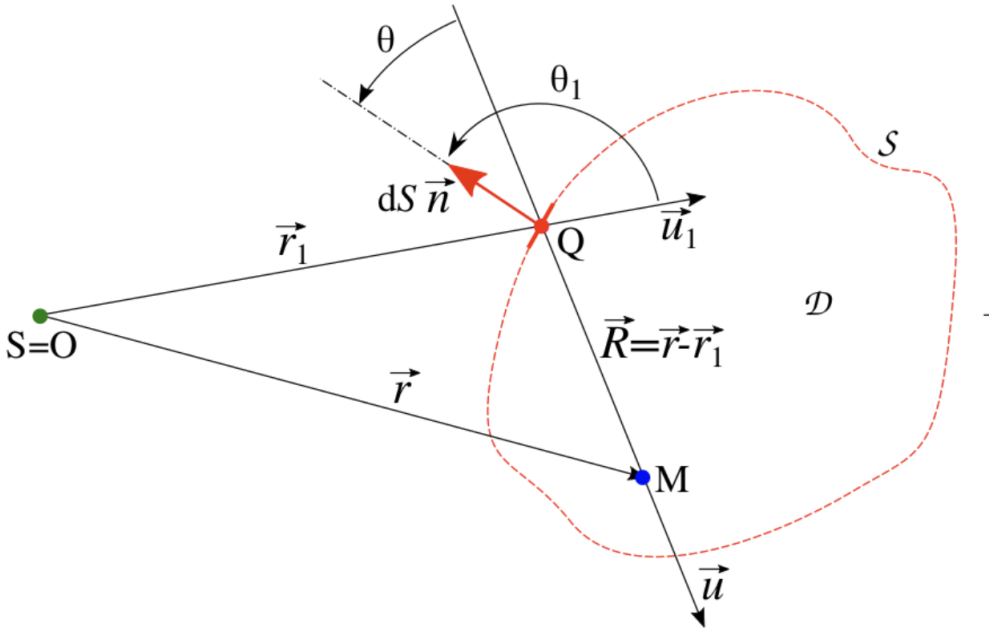


Figure 4: À gauche : Surface fermée S entourant le point M et soumise au champ émis par une source ponctuelle S. Merci à Hervé Gayvallet

$$\begin{cases} \overrightarrow{grad}(F) = \frac{\partial F}{\partial r_1}\overrightarrow{u_1} & avec\ \overrightarrow{u_1}\cdot\overrightarrow{n} = cos(u_1, n) = \cos(\theta_1) \\ \overrightarrow{grad}(G) = \frac{\partial G}{\partial r}\overrightarrow{-u} & avec\ \overrightarrow{-u}\cdot\overrightarrow{n} = \cos(-u, n) = \cos(\theta) \end{cases} \tag{33}$$

Le second résultat s'obtient aisément en écrivant R sous la forme $R = \sqrt{(-r - r_1)^2}$ car :

$$\overrightarrow{grad}(G) = \frac{\partial G}{\partial r_1} = \frac{\partial R}{\partial \overrightarrow{r_1}}\frac{\partial G}{\partial R} = \frac{-\overrightarrow{R}}{R}\frac{\partial G}{\partial R} \tag{34}$$

L'identité de Kirchoff (35) donne alors :

$$F(r,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 \int_{\mathcal{S}} \left[G\frac{\partial F}{\partial r_1}\cos(\theta_1) - F\frac{\partial G}{\partial R}\cos(\theta) \right] dS \tag{35}$$

Ce résultat a été obtenu pour une surface S quelconque.

4.1.4 Application à la diffraction par un trou

On décompose la surface $\mathcal{S}$ en deux éléments : l'orifice diffractant (au sens large et qui peut être représenté par une fonction de transparence) et son complémentaire sur lequel on suppose que $F(-r_1, t_1) = 0$ (se reporter à la figure (5)).
On suppose de plus que l'état vibratoire au niveau de l'orifice diffractant est le même qu'en l'absence d'écran. On peut espérer s'approcher de cette situation si l'écran est parfaitement absorbant et d'épaisseur faible devant la taille caractéristique a de l'orifice, elle-même grande devant la longueur d'onde[12].

[12]Dans un contexte pratique, la validité de ces hypothèses peut paraître discutable. Les résultats auxquels elles conduisent décrivent pourtant très convenablement les observations expérimentales, dans les situations courantes.

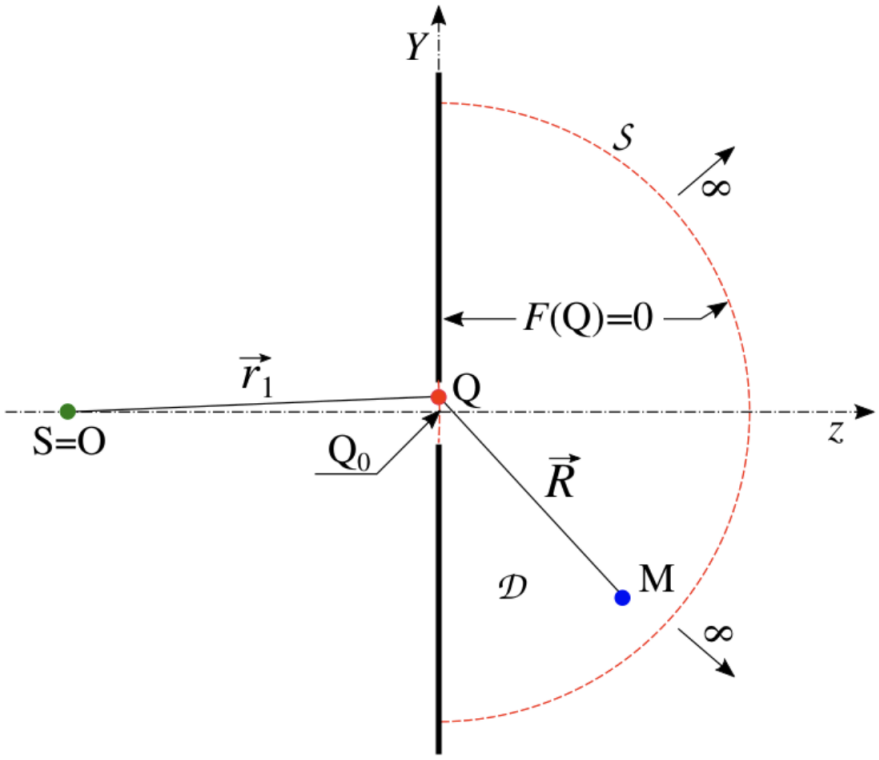


Figure 5: Transposition et approximation dans le cadre de la diffraction (cas où la source est située sur l'axe (Oz)). Merci à Hervé Gayvallet

Tout calcul fait (un peu délicat par le fait de la présence des distributions), on obtient finalement la relation (pour $R > 0$) :

$$F(\overrightarrow{r},t) = \frac{1}{i\lambda}\int_{\mathcal{S}}\left[K(\theta_1,\theta)\times F(\overrightarrow{r_1},t)\frac{\exp(ikR)}{R}\right]dS \qquad avec\ :\ K(\theta_1,\theta) = \frac{\cos(\theta)-\cos(\theta_1)}{2} \tag{36}$$

Dans l'expression des gradients nous avons négligé les termes de dérivation d'amplitude devant ceux de dérivation de phase ($\frac{1}{r^2} << \frac{k}{r}$) ce qui suppose que $r_1 >> \lambda$ et $R >> \lambda$. Enfin, si r_1 et R sont très supérieurs à la taille caractéristique de l'orifice diffractant, on obtient la relation approchée :

$$F(\overrightarrow{r},t) = \frac{f(Q_0)}{i\lambda}\int_{\mathcal{S}}\left[K(\theta_1,\theta)\times\frac{\exp(ikr_1)\exp(ikR)}{R}\right]dS \tag{37}$$

Elle devient, dans le cas où la source est située sur l'axe (Oz), $\theta_1 \longrightarrow \pi$:

$$F(\overrightarrow{r},t) = \frac{F(Q_0)}{i\lambda}\int_{\mathcal{S}}\left[K(\theta_1,\theta)\times\frac{\exp(ikR)}{R}\right]dS \qquad avec\ :\ K(\theta_1,\theta) = \frac{\cos(\theta)-(-1)}{2} \tag{38}$$

Tous les termes que l'on a sorti sont a présent des constantes qui dépendent de la distance source-objet diffractant
Dans les conditions normales d'utilisation : $\theta \to 0$ (**Conditions de Gauss**) donc $K(\theta_1,\theta) \to 1$
Du coup, on trouve bien le **Principe de Huygens-Fresnel** :

$$\boxed{F(\overrightarrow{r},t) = \frac{A}{i\lambda}\int_{\mathcal{S}}\left[\frac{\exp(ikR)}{R}\right]dS} \tag{39}$$

4.2 Quelques définitions des concepts :

Il me semble que l'on a souvent une confusion entre 4 concepts : Phénomène de diffraction, phénomène d'interférence, figure de diffraction, figure d'interférence.

Je pense qu'il faut éviter d'utiliser le terme "diffraction" seul si on veut lever la confusion. Le phénomène de diffraction a trait à la 'création' des ondes lumineuses depuis la source secondaire alors que le phénomène d'interférence a trait à ce que l'on voit, moyenné par le récepteur, en un point donné de l'espace, comme somme des ondes lumineuses.

- **Phénomène de diffraction :**
  - Expérimentalement : La propagation de la lumière ne suit plus les lois de l'optique géométrique : étalement pour fraunhoffer, lumière dans l'ombre géométrique pour Fresnel.
  - D'un point de vue physique : Modification des propriétés d'une onde lorsqu'on limite sa propagation par un obstacle [Taillet].
  - Du point de vue des interactions : interactions entre photons et électrons
  - Du point de vue des équations : Principe d'Huygens-Fresnel
- **Phénomène d'interférence :**
  - Expérimentalement : lumière + lumière = ombre
  - D'un point de vue physique : Phénomène par lequel la superposition de plusieurs ondes produit localement une intensité qui est différente de la somme des intensités individuelles [Taillet].
  - Du point de vue des interactions : interactions entre photons et photons
  - Du point de vue des équations : $I = \langle (S_1 + S_2)^2 \rangle_\tau$
- **Figure de diffraction** (ex des trous d'Young) :
  il s'agit, dans la répartition lumineuse observée sur l'écran de la partie de la figure correspondant à la taille finie des trous d'Young (sinus cardinal)

Les différents modèles de la lumière :

- Optique ondulatoire (scalaire) : domaine de l'optique dans lequel la lumière est modélisée par une onde dont la nature n'est pas nécessairement spécifiée [Taillet]. Par opposition à optique quantique (photons), optique géométrique (pas d'hypothèse sur la nature de la lumière) et ondes électromagnétiques (on tient compte de + onde).
- la nature vectorielle de E Notation complexe : Possible si équations linéaires, ce qui est le cas en optique (EM). Réseau sinusoïdal : Dire que l'on présente un réseau sinusoïdal et ne pas présenter un réseau sinusoïdal me parait une pratique très dangereuse. Les réseaux sinusoïdaux sont fabriqués par holographie.

4.3 Questions possibles :

- La diffraction de Fraunhofer est forcément obtenue avec une source et une observation à l'infini ?
  Non, on peut aussi faire un montage à une lentille, conjuguant source et écran, donnant Fraunhofer approché (on rend le terme de Fresnel négligeable, mais pas le terme d'ordre supérieur).

- Que se passe-t-il si on prend, au lieu d'un objet de transparence t, un objet de transparence 1-t ?
  Même figure, sauf pour l'image géométrique.

- Comme, expérimentalement, peut-on dire si on est plutôt proche des conditions de Fraunhofer ou de Fresnel ?
  Dans le cas de la diffraction de Fraunhofer, la diffraction ajoute à l'image géométrique des structures en dehors de celle-ci, alors que la diffraction de Fresnel ajoute des structures dans l'image géométrique.

- Donner une idée simple du phénomène de diffraction à un élève néophyte.
  Dans le cadre de l'optique géométrique, un rayon, définit par une seule direction de propagation, peut être dévié ou réfléchi par un objet, il reste un rayon, définit par une nouvelle direction de propagation. Dans le cadre de l'optique ondulatoire, un seul vecteur d'onde incident sur un objet peut donner en réflexion ou transmission une onde qui ne peut plus être décrite par un seul vecteur d'onde.

- Quand survient la diffraction ?
  Lorsque la taille caractéristique des objets se rapproche de la longueur d'onde de la lumière. Attention, une fente diffractante de la taille de la longueur d'onde de la lumière va donner une ouverture pour la tache centrale d'environ 60°, ce qui est déjà un effet très notable : pour une observation à 1 m de distance, on aura une tache centrale de l'ordre de la dizaine de centimètres. Dire que si la longueur d'onde est négligeable devant le taille de la fente la diffraction est négligeable est par trop simpliste : si on prend une fente dix fois plus grande que la longueur d'onde, on observera très bien une tache de diffraction, par exemple à 1 m de distance, mais celle-ci aura effectivement une taille très petite devant la distance d'observation, ce qui ne la rend pas forcément négligeable pour autant.

- Quelle différence faites-vous entre diffraction et réflexion ?
  Pour répondre à cette question, on peut, par exemple, revenir à la définition de la diffraction par Sommerfeld : Tout écart à la propagation rectiligne qui ne peut s'expliquer ni par une réflexion, ni par une réfraction.

- Savoir justifier l'emploi du modèle scalaire de la lumière avec l'onde dite de Fresnel.

Autres :

- Citer une application de la contribution/construction de Huygens en optique géométrique ? On retrouve les lois de Snell-Descartes. De

- réflexion et réfraction.

- Comment expliquer le changement de direction des ondes diffractées par rapport à celle du faisceau incident ? Revenir à l'électromagnétisme, à l'équation de propagation de Kirchhoff.

- Vous utilisez un faisceau laser comme onde plane, est-ce bien légitime ? Revoir la notion de faisceau gaussien borné spatialement, validité du modèle d'onde cylindrique (plane localement) ou sphérique (avec la divergence du faisceau...) !

- Comment est défini le nombre de Fresnel ? quel est son intérêt ?

- Que se passe-t-il si on observe la figure de diffraction d'un objet comportant un très grand nombre de pupilles/ouvertures identiques réparties régulièrement ou aléatoirement (poudre de lycopode, buée,...) ? Intérêts, applications ?

- Savoir citer quelques applications du filtrage de Fourier (photographie bien sûr, quoique de plus en plus supplanté par le filtrage numérique), épurateur de faisceau laser, visualisation d'écoulements par strioscopie (non linéaire), microscopie/imagerie à contraste de phase (linéaire)...

- Savoir expliquer en détail une application de l'imagerie en contraste de phase

- Nom de la figure de diffraction par un diaphragme ?
  Tache d'Airy

- Schéma d'un télescope :
  Savoir faire un schéma d'un télescope simple de type Cassegrain ou Newton.

- Comment obtenir la constante dans la formule de diffraction ?
  Par la théorie de Kirchhoff. Différence entre l'apport de Huygens de Fresnel : Huygens a mis en place le modèle ondulatoire avec des sources secondaires fictives émettant des ondelettes. Fresnel a repris plus tard ces travaux en y apportant le bon formalisme mathématique et les propriétés sur la phase et l'amplitude des ondelettes et sur le sur le fait que les vibrations de ces différentes sources sont cohérentes entre elles.